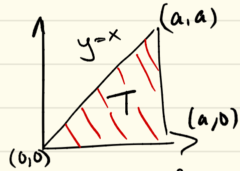
Demonstrationsuppgifter 5

(1) Antag att $a>0$ och att T är triangeln i planet med hörn i $(0,0)$, $(a,0)$ samt (a,a). Beräkna

$$\iint_T \sqrt{a^2-y^2}\, dA.$$

Lösning:

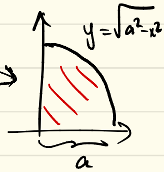


$$\iint_T \sqrt{a^2-y^2}\, dA = \int_0^a \left(\int_y^a \sqrt{a^2-y^2}\, dx\right) dy =$$

$$= \int_0^a \left[x\sqrt{a^2-y^2}\right]_{x=y}^{x=a} dy = \int_0^a (a-y)\sqrt{a^2-y^2}\, dy$$

$$= \underbrace{a\int_0^a \sqrt{a^2-y^2}\, dy}_{\mathrm{I}} - \underbrace{\int_0^a y\sqrt{a^2-y^2}\, dy}_{\mathrm{II}}$$

I är lika med a gånger arean av



Alltså $\mathrm{I} = a\cdot \dfrac{\pi a^2}{4} = \dfrac{\pi a^3}{4}$

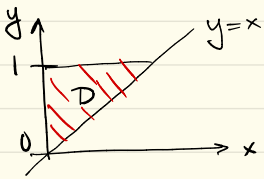
$$\mathrm{II} = \int_0^a y\sqrt{a^2-y^2}\, dy = \left[\begin{array}{l} t = a^2-y^2 \\ dt = -2y\,dy \end{array}\right] = -\frac{1}{2}\int_{a^2}^0 t^{1/2}\, dt =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{t^{3/2}}{3/2}\right]_0^{a^2} = \frac{1}{3}a^3$$

$$\Longrightarrow \iint_T \sqrt{a^2-y^2}\, dA = \left(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{3}\right)a^3$$

(2) Låt $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 ;\ 0 \le y \le 1,\ 0 \le x \le y\}$
Beräkna volymen av den kropp som ligger under ytan $z = 1 - x^2$ och över D.

Lösning:



Volymen av kroppen $= \iint_D 1 - x^2 \, dA =$

$$= \int_0^1 \left(\int_0^y 1 - x^2 \, dx \right) dy = \int_0^1 \left[x - \frac{x^3}{3} \right]_{x=0}^{x=y} dy =$$

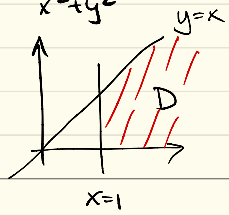
$$= \int_0^1 y - \frac{y^3}{3} \, dy = \left[\frac{y^2}{2} - \frac{y^4}{12} \right]_{y=0}^{y=1} = \frac{1}{2} - \frac{1}{12} = \frac{5}{12}$$

Svar: Volymen är $\frac{5}{12}$ volymsenheter

(3) Låt $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 ;\ x \ge 1,\ 0 \le y \le x\}$

Beräkna $\iint_D \frac{1}{x^2+y^2} \, dA$ om den är konvergent.

Lösning:



$$\iint_D \frac{1}{x^2+y^2}\,dA = \int_1^\infty \left(\int_0^x \frac{1}{x^2+y^2}\,dy\right)dx$$

Först $\displaystyle\int_0^x \frac{1}{x^2+y^2}\,dy = \frac{1}{x^2}\int_0^x \frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\,dy = \left[\begin{array}{l} t = y/x \\ x\,dt = dy \end{array}\right]$

$$= \frac{x}{x^2}\int_0^1 \frac{1}{1+t^2}\,dt = \frac{1}{x}\Big[\arctan t\Big]_{t=0}^{t=1} = \frac{1}{x}\cdot\frac{\pi}{4}$$

$$\Longrightarrow \iint_D \frac{1}{x^2+y^2}\,dA = \int_1^\infty \frac{\pi}{4}\,\frac{1}{x}\,dx = \frac{\pi}{4}\lim_{N\to\infty}\int_1^N \frac{1}{x}\,dx =$$

$$= \frac{\pi}{4}\lim_{N\to\infty}(\ln N - \ln 1) = \infty$$

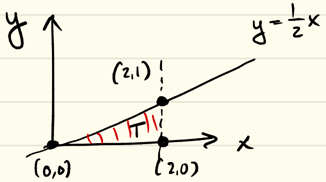
$\Longrightarrow \displaystyle\iint_D \frac{1}{x^2+y^2}\,dA$ är divergent.

Hemtal 5

① Låt T vara triangeln med hörn i $(0,0)$, $(2,0)$ och $(2,1)$. Beräkna

$$\iint_T x\,y\,dA.$$

Lösning:



$$\iint_T x\,y\,dA = \int_0^2 \left(\int_0^{x/2} x\,y\,dy \right) dx = \int_0^2 \left[\frac{x\,y^2}{2} \right]_{y=0}^{y=x/2} dx =$$

$$= \int_0^2 \frac{x^3}{8}\,dx = \left[\frac{x^4}{32} \right]_0^2 = \frac{16}{32} = \frac{1}{2}$$

② Parabeln $y=x^2$ skär enhetscirkeln $x^2+y^2=1$ i två punkter. Approximera skärningspunkten där $x>0$ genom att göra två steg med Newtons metod. Använd $(x_0,y_0)=(1,0)$ som startgissning.

Lösning: Vi vet att

$$x_{n+1} = x_n - \begin{vmatrix} f(x_n,y_n) & f_y(x_n,y_n) \\ g(x_n,y_n) & g_y(x_n,y_n) \end{vmatrix} \Bigg/ \begin{vmatrix} f_x & f_y \\ g_x & g_y \end{vmatrix}$$

i (x_n,y_n)

$$y_{n+1} = y_n - \begin{vmatrix} f_x & f \\ g_x & g \end{vmatrix} \Bigg/ \begin{vmatrix} f_x & f_y \\ g_x & g_y \end{vmatrix}$$

Vi letar punkter där $f(x,y) = y - x^2 = 0$ och
$g(x,y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$.

Vi får $f_x = -2x$, $f_y = 1$, $g_x = 2x$ och $g_y = 2y$.

$(x_0, y_0) = (1,0)$ ger

$$x_1 = 1 - \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \Big/ \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 1 - \frac{0}{-2} = 1$$

$$y_1 = 0 - \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} \Big/ \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 0 - \frac{2}{-2} = 1$$

$\Longrightarrow (x_1, y_1) = (1,1)$ vilket i sin tur ger

$$x_2 = 1 - \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \Big/ \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 1 - {}^{(-1)}\!/_{-6} = {}^{5}\!/_{6}$$

$$y_2 = 1 - \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \Big/ \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 1 - {}^{(-2)}\!/_{-6} = {}^{2}\!/_{3}$$

$\Longrightarrow (x_2, y_2) = \left(\frac{5}{6}, \frac{2}{3}\right)$ är vår approximation.

3 Beräkna $\displaystyle\int_0^1 \int_0^1 \frac{2ye^x}{1+y^2}\,dy\,dx$

Lösning:

$$\int_0^1\int_0^1 \frac{2ye^x}{1+y^2}\,dy\,dx = \int_0^1\int_0^1 \frac{2ye^x}{1+y^2}\,dx\,dy =$$

$$= \int_0^1 \left[\frac{2ye^x}{1+y^2}\right]_{x=0}^{x=1} dy = \int_0^1 (e-1)\frac{2y}{1+y^2}\,dy =$$

$$= \begin{bmatrix} t = 1+y^2 \\ dt = 2y\,dy \end{bmatrix} = (e-1)\int_1^2 t^{-1}\,dt = (e-1)\left[\ln t\right]_1^2$$

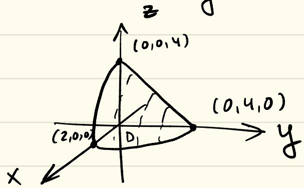
$$= (e-1)\ln 2$$

Inlämningsuppgift 5

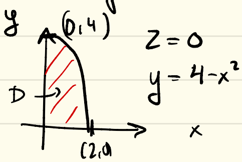
① Beräkna volymen av kroppen

$$\{(x,y,z);\ 0 \le x,\ 0 \le y, \text{och } 0 \le z \le 4 - x^2 - y\}.$$

Lösning: $z = 4 - x^2 - y$ är en yta i $\mathbb{R}^3$.



$$\text{Volymen} = \iint_D 4 - x^2 - y \, dA$$



$$\iint_D 4 - x^2 - y \, dA = \int_0^2 \int_0^{4-x^2} 4 - x^2 - y \, dy \, dx =$$

$$= \int_0^2 \left[(4-x^2)y - \frac{y^2}{2} \right]_0^{4-x^2} dx =$$

$$= \int_0^2 (4-x^2)^2 - \frac{1}{2}(4-x^2)^2 \, dx = \frac{1}{2} \int_0^2 (4-x^2)^2 \, dx =$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^2 16 - 8x^2 + x^4 \, dx = \frac{1}{2} \left[16x - \frac{8x^3}{3} + \frac{x^5}{5} \right]_0^2 =$$

$$= \frac{1}{2}\left(32 - \frac{64}{3} + \frac{32}{5}\right) = 16 - \frac{32}{3} + \frac{16}{5} = \frac{18 \cdot 16 - 5 \cdot 32}{3 \cdot 5} =$$

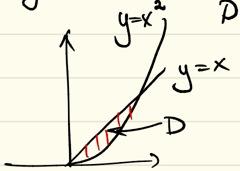
$$= \frac{8 \cdot 16}{15} = \frac{128}{15}$$

Svar: Volymen är $\frac{128}{15}$ volymsenheter

② Låt $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x^2 \le y \le x\}$ och

$f(x,y) = x^2 - y^2$. Beräkna $\iint_D f(x,y)\,dA$.

Lösning:



$$\iint_D x^2 - y^2\,dA = \int_0^1 \left(\int_{x^2}^{x} x^2 - y^2\,dy \right) dx = \int_0^1 \left[x^2 y - \frac{y^3}{3} \right]_{y=x^2}^{y=x} =$$

$$= \int_0^1 x^3 - \frac{x^3}{3} - x^4 + \frac{x^6}{3}\,dx = \int_0^1 \frac{2x^3}{3} - x^4 + \frac{x^6}{3}\,dx =$$

$$= \left[\frac{2x^4}{3\cdot 4} - \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7\cdot 3} \right]_0^1 = \frac{1}{2\cdot 3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{7\cdot 3} =$$

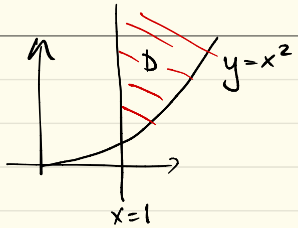
$$= \frac{5\cdot 7 - 2\cdot 3\cdot 7 + 2\cdot 5}{2\cdot 3\cdot 5\cdot 7} = \frac{35 + 10 - 42}{2\cdot 3\cdot 5\cdot 7} = \frac{3}{2\cdot 3\cdot 5\cdot 7} = \frac{1}{70}$$

③ Låt $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ 1 \le x \text{ och } y \ge x^2\}$.

Beräkna den generaliserade integralen

$$\iint_D \frac{1}{x^4 + y^2}\,dA.$$

Lösning:



$$\iint_D \frac{1}{x^4+y^2}\,dA = \int_1^\infty \int_{x^2}^\infty \frac{1}{x^4+y^2}\,dy\,dx$$

Först $\displaystyle\int_{x^2}^\infty \frac{1}{x^4+y^2}\,dy = \lim_{N\to\infty} \int_{x^2}^N \frac{1}{x^4+y^2}\,dy =$

$$= \lim_{N\to\infty} \int_{x^2}^N \frac{1}{x^4} \frac{1}{1+(y/x^2)^2}\,dy = \left[\begin{array}{l} t = \frac{y}{x^2} \\ dt = \frac{1}{x^2}dy \end{array}\right] =$$

$$= \lim_{N\to\infty} \frac{1}{x^2} \int_1^{N/x^2} \frac{1}{1+t^2}\,dt = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{x^2}\Big[\arctan t\Big]_1^{N/x^2} =$$

$$= \lim_{N\to\infty} \frac{1}{x^2}\left(\arctan\left(\frac{N}{x^2}\right) - \arctan 1\right) =$$

$$= \frac{1}{x^2}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{4}\cdot\frac{1}{x^2}$$

Alltså $\displaystyle\iint_D \frac{1}{x^4+y^2}\,dA = \int_1^\infty \frac{\pi}{4}\frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{N\to\infty}\int_1^N \frac{\pi}{4}\frac{1}{x^2}\,dx =$

$$= \lim_{N\to\infty}\left[-\frac{\pi}{4}\frac{1}{x}\right]_1^N = \lim_{N\to\infty} \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4}\cdot\frac{1}{N} = \frac{\pi}{4}$$

$\otimes$