Demonstrationsuppgifter 6

(1) Låt $R>0$. Beräkna volymen av den kropp som ges av olikheterna

$$0 \leq z \leq e^{-(x^2+y^2)}$$

och

$$x^2+y^2 \leq R^2$$

Lösning: Låt $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x^2+y^2 \leq R^2\}$

Volymen av kroppen är

$$\iint_D e^{-(x^2+y^2)}\, dA$$

Inför polära koordinater. Vi får

$$\iint_D e^{-(x^2+y^2)}\, dA = \int_0^{2\pi}\int_0^R re^{-r^2}\, dr\, d\theta =$$

$$= 2\pi \int_0^R re^{-r^2}\, dr = \begin{bmatrix} t = r^2 & t_R = R^2 \\ dt = 2r\,dr & t_0 = 0 \end{bmatrix} =$$

$$= 2\pi \int_0^{R^2} \frac{1}{2} e^{-t}\, dt = \pi\left[-e^{-t}\right]_0^{R^2} = \pi\left(1-e^{-R^2}\right)$$

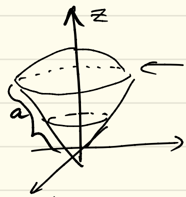
(2) Antag att $a>0$. Beräkna volymen av kroppen som ges av olikheterna

$$\sqrt{x^2+y^2} \leq z$$

och

$$x^2+y^2+z^2 \leq a^2.$$

Lösning:



Vi skall beräkna volymen av denna kropp K.

Volymen $= \iiint_K 1 \, dV$.

Inför sfäriska koordinater och få

$$\iiint_K 1 \, dV = \int_0^a \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/4} R^2 \sin\phi \, d\phi \, d\theta \, dR =$$

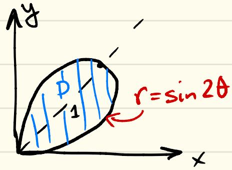
$$= 2\pi \int_0^a R^2 \left[-\cos\phi\right]_{\phi=0}^{\phi=\pi/4} dR =$$

$$= 2\pi \left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \int_0^a R^2 \, dR = (2-\sqrt{2})\pi \left[\frac{R^3}{3}\right]_0^a =$$

$$= \frac{(2-\sqrt{2})\pi}{3} a^3$$

(3) Beräkna arean av det område som begränsas av kurvan som skrivs i polära koordinater som $r = \sin 2\theta$ där $0 \le \theta \le \pi/2$. Skissa också kurvan.

<u>Lösning:</u> Vi skissar kurvan först.



$$\text{Arean} = \iint_D 1 \, dxdy$$

Inför polära koordinater

$$\iint_D 1 \, dxdy = \int_0^{\pi/2} \int_0^{\sin 2\theta} r \, dr d\theta = \int_0^{\pi/2} \left[\frac{r^2}{2} \right]_{r=0}^{r=\sin 2\theta} d\theta =$$

$$= \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2 2\theta}{2} d\theta = \left[\sin^2 \alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2} \right] =$$

$$= \int_0^{\pi/2} \frac{1-\cos 4\theta}{2 \cdot 2} d\theta = \frac{1}{4} \left[\theta - \frac{\sin 4\theta}{4} \right]_{\theta=0}^{\theta=\frac{\pi}{2}} =$$

$$= \frac{1}{4} \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\sin 2\pi}{4} - \left(0 - \frac{\sin 0}{4}\right) \right) = \frac{\pi}{8}$$

Övningsuppgifter sista veckan

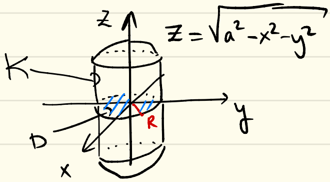
① Låt $a > R > 0$. Beräkna volymen av kroppen som ges av punkter som uppfyller olikheterna

$$x^2+y^2+z^2 \le a^2$$

och

$$x^2+y^2 \le R^2$$

Lösning: Vi vill beräkna volymen av K



polära koordinater

$$\text{Volymen av } K = 2\iint_D \sqrt{a^2-x^2-y^2}\,dxdy =$$

$$= 2\int_0^{2\pi}\int_0^R r\sqrt{a^2-r^2}\,drd\theta = 4\pi\int_0^R r\sqrt{a^2-r^2}\,dr =$$

$$= \begin{bmatrix} t=a^2-r^2 \\ dt=-2r\,dr \end{bmatrix} = 4\pi\int_{a^2}^{a^2-R^2} -\frac{1}{2}t^{1/2}\,dt =$$

$$= 2\pi\int_{a^2-R^2}^{a^2} t^{1/2}\,dt = \frac{4\pi}{3}\left[t^{3/2}\right]_{a^2-R^2}^{a^2} =$$

$$= \frac{4\pi}{3}\left(a^3-(a^2-R^2)^{3/2}\right)$$ ⊗

(2) Låt $a>0$, $b>0$ och $c>0$. Beräkna

$$\iiint_K x^2 \, dV$$

där K begränsas av ellipsoiden

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1.$$

Lösning: Vi inför nya variabler $u=\frac{x}{a}$, $v=\frac{y}{b}$ och $w=\frac{z}{c}$

$$\iiint_K x^2\,dx\,dy\,dz = \iiint_{u^2+v^2+w^2\le 1} a^2u^2 \left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}\right| du\,dv\,dw =$$

$$= \left[\ \left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}\right| = \left|\det\begin{pmatrix} a & 0 & 0\\ 0 & b & 0\\ 0 & 0 & c\end{pmatrix}\right| = abc\ \right] =$$

$$= \iiint_{u^2+v^2+w^2\le 1} a^3bc\, u^2\,du\,dv\,dw = a^3bc \iiint_{u^2+v^2+w^2\le 1} u^2\,du\,dv\,dw$$

Vi inför sfäriska koordinater

$$\iiint_{u^2+v^2+w^2\le 1} u^2\,du\,dv\,dw = \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^1 (r\sin\phi\cos\theta)^2\, r^2\sin\phi\, dr\,d\theta\,d\phi =$$

$$= \int_0^{\pi} (\sin\phi)^3 \, d\phi \int_0^{2\pi} \cos^2\theta \, d\theta \int_0^1 r^4 \, dr = \frac{1}{5} \int_0^{\pi} (\sin\phi)^3 \, d\phi \int_0^{2\pi} \cos^2\theta \, d\theta$$

$$= \frac{1}{5} \int_0^{\pi} (1-\cos^2\phi)\sin\phi \, d\phi \int_0^{2\pi} \frac{1+\cos 2\theta}{2} \, d\theta =$$

$$= \frac{1}{5} \frac{2\pi}{2} \int_0^{\pi} (1-\cos^2\phi)\sin\phi \, d\phi = \left[\begin{array}{l} t = \cos\phi, \; t_\pi = -1 \\ dt = -\sin\phi \, d\phi, \; t_0 = 1 \end{array} \right]$$

$$= \frac{\pi}{5} \int_1^{-1} -(1-t^2) \, dt = \frac{\pi}{5} \left[t - \frac{t^3}{3} \right]_{-1}^{1} = \frac{4\pi}{15}$$

$$\Longrightarrow \iiint_K x^2 \, dV = \frac{4\pi}{15} a^3 bc$$

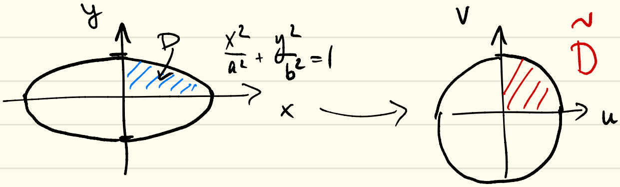
(3) Låt $a>0$, $b>0$ och $c>0$. Beräkna volymen av kroppen som ges av punkter i första oktanten som uppfyller olikheterna

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1$$

och

$$z \leq \frac{c}{a} x.$$

<u>Lösning</u>: Vi inför nya variabler $u = \frac{x}{a}$, $v = \frac{y}{b}$ och "$z = z$"



$$\text{Volymen} = \iint_D \frac{c}{a} x \, dx dy = \iint_{\tilde{D}} cu \left| \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right| du dv$$

$$\begin{cases} x = au \\ y = bv \end{cases} \Rightarrow \left| \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right| = \left| \det \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \right| = ab$$

$$\Rightarrow \text{Volymen} = \iint_{\tilde{D}} abc \, u \, du dv \overset{\text{Polära koordinater}}{=}$$

$$= \int_0^{\pi/2} \int_0^1 abc \, r\cos\theta \, r dr d\theta$$

$$= abc \int_0^{\pi/2} \cos\theta d\theta \int_0^1 r^2 dr =$$

$$= abc \left[\sin\theta \right]_0^{\pi/2} \int_0^1 r^2 dr =$$

$$= abc \left[\frac{r^3}{3} \right]_0^1 = \frac{abc}{3}.$$