Differential- och integralkalkyl 3, MS-A0309

Björn Ivarsson (Y326)
bjorn.ivarsson@aalto.fi
Mottagningstid: Freday, 13:00 - 14:00 (Y326)

Assistent: Andreas Holmqvist

Två sätt att få vitsord på kursen

I Tentamen 17.04.2024

II Övningar & kurstentamen (17.04.2024)
40 % 60 %

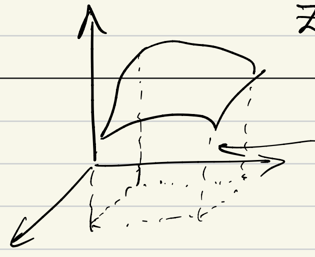
Övningstillfällen: Onsdagar Hemtal ← [Inlämnas tisdag, midnatt]
Fredagar Demoövningar

Inlämningsuppgifter: Inlämnas torsdagar, midnatt

Repetition? Multipelintegraler

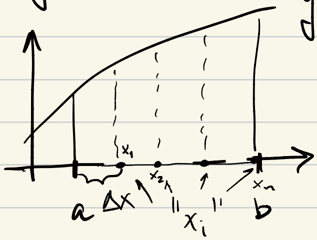
Först dubbelintegraler

$z = f(x,y)$



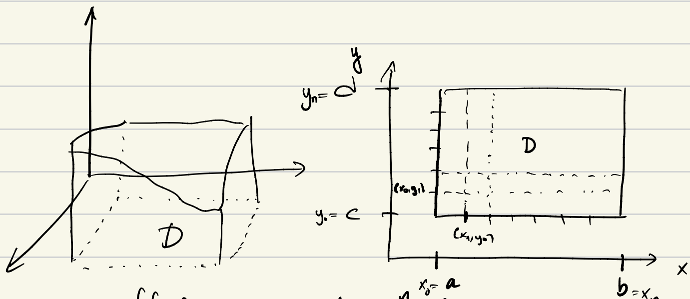
Beräkna volymen

I det endimensionella fallet detta är en areaberäkning.



$$\text{Arean} = \int_a^b f(x)\,dx = $$
$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x$$

Samma idé i det tvådimensionella fallet



$$\text{Volymen} = \iint_D f(x,y)\,dA = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} f(x_i, y_j)\,\Delta x \Delta y \qquad \Delta x = \frac{b-a}{n}, \quad \Delta y = \frac{d-c}{n}$$

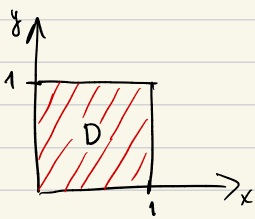
Det finns ingen direkt motsvarighet till integralkalkylens fundamentalsats för multipelintegraler. Man kan beräkna multipelintegraler som itererade integraler och därför är primitiva funktioner och alla integrationsmetoder som vi lärt oss tidigare viktiga också vid beräknandet av multipelintegraler.

Ex

$$f(x,y) = xy^2$$

Beräkna $\iint_D f(x,y)\, dA$ då

$$D = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le x \le 1 ,\ 0 \le y \le 1 \}$$



$$\iint_D xy^2\, dA = \int_0^1 \left(\int_0^1 xy^2\, dy \right) dx =$$

$$= \int_0^1 \left[\frac{xy^3}{3} \right]_{y=0}^{y=1} dx = \int_0^1 \frac{x}{3}\, dx$$

$$= \left[\frac{x^2}{6} \right]_0^1 = \frac{1}{6}$$

Trippelintegraler (och multipelintegraler generellt) funkar på samma sätt. Konstruktionen fungerar på samma sätt och man kan beräkna dem som itererade integraler.

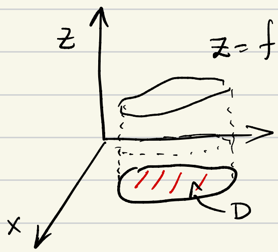
Ex $\iiint_K xye^z\, dV$ där $K = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \le x \le 2,\ 0 \le y \le 1 ,\ -1 \le z \le 1 \}$

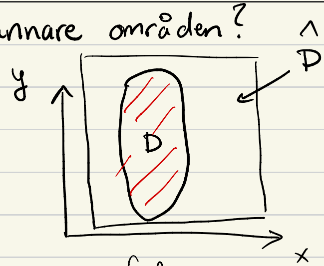
$$\iiint_K xye^z\, dV = \int_{-1}^1 dz \int_0^1 dy \int_0^2 xye^z\, dx = \int_{-1}^1 dz \int_0^1 dy \left[\frac{x^2}{2} ye^z \right]_{x=0}^{x=2} =$$

$$= \int_{-1}^1 dz \int_0^1 2ye^z\, dy = \int_{-1}^1 \left[y^2 e^z \right]_{y=0}^{y=1} dz =$$

$$= \int_{-1}^1 e^z\, dz = \left[e^z \right]_{-1}^1 = e - e^{-1}$$

Hur integrerar man över allmännare områden?



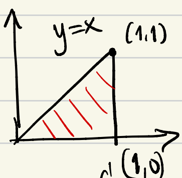


$$\hat{f}(x,y) = \begin{cases} f(x,y) & \text{om } (x,y) \in D \\ 0 & \text{om } (x,y) \in \hat{D} \setminus D \end{cases}$$

$$\iint_D f(x,y)\,dA := \iint_{\hat{D}} \hat{f}(x,y)\,dA.$$

I praktiken så gör man som i följande exempel.

Ex Låt D vara som i figuren.



$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le x\}$$

$$\iint_D xy\,dA = \int_0^1 dx \int_0^x xy\,dy = \int_0^1 \left[\frac{xy^2}{2}\right]_{y=0}^{y=x} dx = \int_0^1 \frac{x^3}{2}\,dx =$$

$$= \left[\frac{x^4}{8}\right]_0^1 = \frac{1}{8}$$

Dessutom så kan D skrivas

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le y \le 1,\ y \le x \le 1\}$$

Därför

$$\iint_D xy\,dA = \int_0^1 dy \int_y^1 xy\,dx = \int_0^1 \left[\frac{x^2 y}{2}\right]_{x=y}^{x=1} dy = \int_0^1 \frac{y}{2} - \frac{y^3}{2}\,dy =$$
$$= \left[\frac{y^2}{4} - \frac{y^4}{8}\right]_0^1 = \frac{1}{4} - \frac{1}{8} = \frac{1}{8}.$$

Teoretiskt så spelar integrationsordningen ingen roll. Men i praktiken så kan den spela stor roll.

Ex $\iint_D e^{x^2}\,dA = ?$ D som ovan.

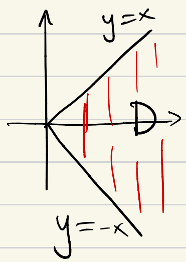
$$\iint_D e^{x^2}\,dA = \int_0^1 dx \int_0^x e^{x^2} dy = \int_0^1 x e^{x^2} dx =$$
$$= \left\{ \begin{array}{l} t = x^2 \\ dt = 2x\,dx \end{array} \right\} = \frac{1}{2}\int_0^1 e^t\,dt =$$
$$= \left[\frac{1}{2}e^t\right]_0^1 = \frac{e-1}{2}$$

Dock! $\int_0^1 \int_y^1 e^{x^2} dx\,dy$ är inte möjlig att beräkna direkt med hjälp av elementära funktioner.

Generaliserade integraler

Integrationsområdet och/eller integrand kan vara obegränsade. Vi behandlar endast fallet då $f \geq 0$ eftersom då klarar vi oss med itererade integraler.

Ex Låt D vara



$I = \iint_D e^{-x^2}\, dA$ är en generaliserad integral.

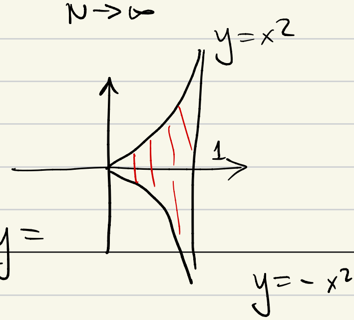
$$I = \int_0^{\infty} dx \int_{-x}^{x} e^{-x^2}\, dy =$$

$$= \int_0^{\infty} 2xe^{-x^2}\, dx = \lim_{N\to\infty} \int_0^{N} 2xe^{-x^2}\, dx =$$

$$= \begin{bmatrix} t = x^2 & t_N = N^2 \\ dt = 2x\, dx & t_0 = 0 \end{bmatrix} = \lim_{N\to\infty} \int_0^{N^2} e^{-t}\, dt =$$

$$= \lim_{N\to\infty} \left[-e^{-t}\right]_0^{N^2} = \lim_{N\to\infty} 1 - e^{-N^2} = 1.$$

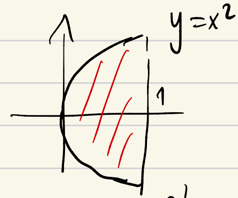
Ex Låt R vara



$$\iint_R \frac{1}{x^2}\, dA = \int_0^1 dx \int_{-x^2}^{x^2} \frac{1}{x^2}\, dy =$$

$$= \int_0^1 2\, dx = 2$$

Ändra R till



$$\iint_R \frac{1}{x^2}\, dA = \int_0^1 dx \int_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} \frac{1}{x^2}\, dy = \int_0^1 2\sqrt{x}\, \frac{1}{x^2}\, dx = \int_0^1 2x^{-3/2}\, dx =$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_\varepsilon^1 2x^{-3/2}\, dx = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \left[\frac{2x^{-1/2}}{-1/2} \right]_\varepsilon^1 =$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0^+} \frac{4}{\sqrt{\varepsilon}} - 4 = \infty$$

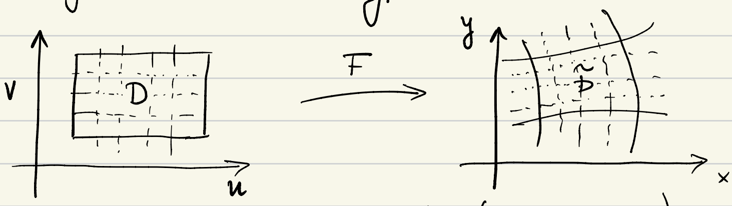
Integrabilitet beror på $f(x,y)$ och R.

Variabelbyten i multipelintegraler

En avbildning $F: U \to W$ kallas ett variablebyte

$U \subset \mathbb{R}^n$, $W \subset \mathbb{R}^n$

om den är bijektiv (av rätt typ). Först $\mathbb{R}^2$.



$$F(u,v) = (x(u,v),\, y(u,v))$$