Stokes sats

Kom ihåg Greens sats

$$\oint_\gamma \vec{F}\cdot d\vec{r} = \iint_D \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right) dxdy$$

där $\vec{F} = (F_1, F_2)$.

Curl $\vec{F}$ är definierad endast för vektorfält $\vec{F} = (F_1, F_2, F_3)$
Vi kan dock definiera Curl $\vec{F}$ som en funktion då $\vec{F} = (F_1, F_2)$
på följande vis. Givet $\vec{F} = (F_1(x,y), F_2(x,y))$ definiera
$\vec{G} = (F_1(x,y), F_2(x,y), 0)$.

Då är $\operatorname{Curl}\vec{G} = \begin{vmatrix} \vec{e_1} & \vec{e_2} & \vec{e_3} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ F_1(x,y) & F_2(x,y) & 0 \end{vmatrix} =$

$$= \begin{vmatrix} \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ F_2(x,y) & 0 \end{vmatrix} \vec{e_1} - \begin{vmatrix} \partial/\partial x & \partial/\partial z \\ F_1(x,y) & 0 \end{vmatrix} \vec{e_2} + \begin{vmatrix} \partial/\partial x & \partial/\partial y \\ F_1(x,y) & F_2(x,y) \end{vmatrix} \vec{e_3}$$

$$= \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right)\vec{e_3} \underset{\text{def}}{=:} (\operatorname{Curl}\vec{F})\,\vec{e_3}$$

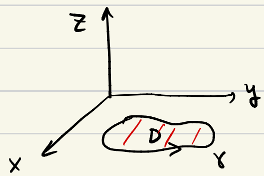
<u>Definition</u>: Om $\vec{F} = (F_1, F_2)$ så är

$$\operatorname{Curl}\vec{F} = \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}$$

Vi kan nu skriva Greens sats som

$$\oint_\gamma \vec{F}\cdot d\vec{r} = \iint_D \operatorname{Curl}\vec{F}\, dx dy$$

Vi kan också tolka Greens sats på följande sätt



D i xy-planet
γ i xy-planet

Om $\vec{F} = (F_1(x,y), F_2(x,y), 0)$ då gäller

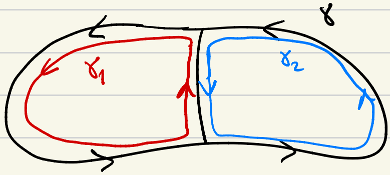
$$\oint_\gamma \vec{F}\cdot d\vec{r} = \iint_D \operatorname{Curl}\vec{F}\cdot \vec{e_3}\, dA$$

Stokes sats generaliserar detta till ytor i rummet.

<u>Stokes sats</u>: Låt S vara en styckvis glatt, orienterad yta i $\mathbb{R}^3$, med enhetsnormalfält $\vec{N}$ och rand γ som består av en eller flera styckvis glatta kurvor med orientering inducerad från S. Om $\vec{F}$ är ett glatt vektorfält definierad i en öppen mängd som innehåller S, så gäller

$$\oint_\gamma \vec{F}\cdot d\vec{r} = \iint_S \operatorname{Curl}\vec{F}\cdot\vec{N}\, dS.$$

Bevis: Vi "klipper" ytan i bitar som projicerar 1-1 på en del av koordinatplanen.

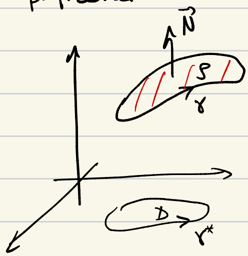


$$\oint_\gamma \vec{F}\cdot d\vec{r} =$$

$$= \oint_{\gamma_1} \vec{F}\cdot d\vec{r} + \oint_{\gamma_2} \vec{F}\cdot d\vec{r}$$

Vi antar att S projicerar 1-1 till xy-planet.

Vi har



$z = g(x,y)$

$G(x,y,z) = z - g(x,y)$

$\vec{N} = \dfrac{\nabla G}{|\nabla G|}$ $\qquad dS = |\nabla G|\, dA$

$$\iint_S \operatorname{Curl}\vec{F}\cdot\vec{N}\, dS = \iint_D \operatorname{Curl}\vec{F}\cdot\nabla G\, dA =$$

$$= \iint_D \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}\right)\left(-\frac{\partial g}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}\right)\left(-\frac{\partial g}{\partial y}\right) + \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right)\cdot 1\, dA$$

Dessutom $\displaystyle\oint_\gamma \vec{F}\cdot d\vec{r} = \oint_\gamma F_1\, dx + F_2\, dy + F_3\, dz =$

$$\left[z = g(x,y) \Rightarrow dz = \frac{\partial g}{\partial x}dx + \frac{\partial g}{\partial y}dy \right] =$$

$$= \oint_{\gamma^*} F_1\, dx + F_2\, dy + F_3\left(\frac{\partial g}{\partial x}dx + \frac{\partial g}{\partial y}dy\right) =$$

$$= \oint_{\gamma^*} \left(F_1 + F_3\frac{\partial g}{\partial x}\right)dx + \left(F_2 + F_3\frac{\partial g}{\partial y}\right)dy = (*)$$

Vi använder Greens sats.

$$\circledast = \iint_D \frac{\partial}{\partial x}\left(F_2(x,y,g(x,y)) + F_3(x,y,g(x,y))\frac{\partial g}{\partial y}\right) -$$

$$- \frac{\partial}{\partial y}\left(F_1(x,y,g(x,y)) + F_3(x,y,g(x,y))\frac{\partial g}{\partial x}\right)\Big)\, dA =$$

$$= \iint_D \frac{\partial F_2}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial z}\cdot\frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial F_3}{\partial x}\cdot\frac{\partial g}{\partial y} + \cancel{\frac{\partial F_3}{\partial z}\cdot\frac{\partial g}{\partial x}\cdot\frac{\partial g}{\partial y}} + \cancel{F_3\cdot\frac{\partial^2 g}{\partial x\partial y}} -$$

$$-\left(\frac{\partial F_1}{\partial y} + \frac{\partial F_1}{\partial z}\cdot\frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial y}\cdot\frac{\partial g}{\partial x} + \cancel{\frac{\partial F_3}{\partial z}\cdot\frac{\partial g}{\partial y}\cdot\frac{\partial g}{\partial x}} + \cancel{F_3\cdot\frac{\partial^2 g}{\partial y\partial x}}\right) dA$$

$$= \iint_D \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}\right)\left(-\frac{\partial g}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}\right)\left(-\frac{\partial g}{\partial y}\right) + \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right) dA.$$

$\circledast$

Återblick: Vi har bevisat

Greens sats:

Tänk på situationen i $\mathbb{R}^3$. Man måste tolka saker rätt här.

$$\oint_\gamma \vec{F}\cdot d\vec{r} = \iint_D \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right) dA = \iint_D \operatorname{Curl}\vec{F}\cdot\vec{e_3}\, dA$$

Stokes sats:

$$\oint_\gamma \vec{F}\cdot d\vec{r} = \iint_S \operatorname{Curl}\vec{F}\cdot\vec{N}\, dS$$

"Curl $\vec{F}$ används för att beräkna cirkulationen längs en kurva"

Divergenssatsen i planet

$$\oint_\gamma \vec{F} \cdot \vec{N} \, ds = \iint_D \operatorname{div} \vec{F} \, dA$$

Gauss sats $$\oiint_S \vec{F} \cdot \vec{N} \, dS = \iiint_D \operatorname{div} \vec{F} \, dV$$

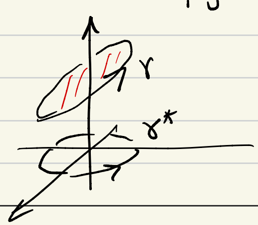
"div F används för att beräkna flödet över en kurva eller yta"

Detta är i själva verket olika former av en sats (som också heter Stokes sats) för så kallade differential former.

Ex Beräkna $\oint_\gamma \vec{F} \cdot d\vec{r}$ då

$$\vec{F}(x,y,z) = (-y^3, x^3, -z^3)$$

och γ är skärningskurvan mellan cylindern $x^2+y^2=1$ och planet $2x+2y+z=3$ orienterad motsols då den projiceras på xy-planet.



$$\oint_\gamma \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_S \operatorname{Curl} \vec{F} \cdot \vec{N} \, dS$$

$$\vec{N} \, dS = \frac{\nabla G}{|\nabla G|} |\nabla G| \, dx\,dy$$

$$= (2,2,1) \, dx\,dy$$

$$\text{Curl } \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{e_1} & \vec{e_2} & \vec{e_3} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ -y^3 & x^3 & -z^3 \end{vmatrix} = (0, 0, 3x^2 + 3y^2)$$

$$\oint_\gamma \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_S \text{Curl}\vec{F} \cdot \vec{N}\, dS = \iint_D 3x^2 + 3y^2\, dx\,dy =$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^1 3r^2 \cdot r\, dr\, d\theta = \left[\frac{3r^4}{4} \right]_0^1 2\pi = \frac{3\pi}{2}.$$