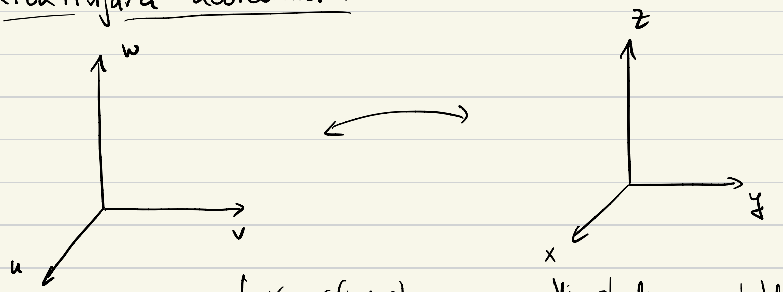
$$\operatorname{Curl} \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{e_1} & \vec{e_2} & \vec{e_3} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ -y^3 & x^3 & -z^3 \end{vmatrix} = (0, 0, 3x^2 + 3y^2)$$

$$\oint_\gamma \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_S \operatorname{Curl}\vec{F} \cdot \vec{N}\, dS = \iint_D 3x^2 + 3y^2 \, dx\,dy =$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^1 3r^2 \cdot r \, dr\,d\theta = \left[\frac{3r^4}{4}\right]_0^1 2\pi = \frac{3\pi}{2}.$$

Kroklinjära koordinater



$$\begin{cases} x = x(u,v,w) \\ y = y(u,v,w) \\ z = z(u,v,w) \end{cases}$$

Vi studerar avbildningar som är lokalt 1-1 (inte nödvändigtvis globalt 1-1)

Vi vill beskriva div, grad och Curl i (u,v,w). Först behöver vi förstå hur man byter koordinater i vektorfält och för detta behöver vi veta vad en lokal bas (eller ram) är.

Koordinatytor och koordinatkurvor

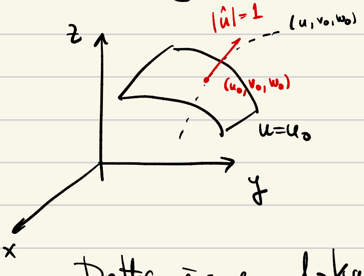
Bilden av $u = u_0$ (eller $v = v_0$, eller $w = w_0$) i xyz-koordinater kallas för en koordinatyta. Dessa ytor har en parametrisering enligt

$$(v, w) \longmapsto \big(x(u_0, v, w), y(u_0, v, w), z(u_0, v, w)\big)$$

Skärningen av två koordinatytor kallas koordinatkurvor.
T.ex.

$$w \longmapsto \big(x(u_0, v_0, w), y(u_0, v_0, w), z(u_0, v_0, w)\big)$$

Vi kallar ett kroklinjärt koordinatsystem ortogonalt om koordinatytor (eller ekvivalent koordinatkurvor) skär i räta vinklar (i de punkter där de skär)
I ett ortogonalt kroklinjärt koordinatsystem kan vi använda koordinatkurvor för att hitta normalvektorer till koordinatorytor.



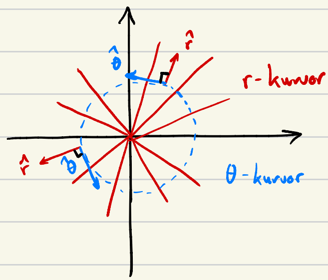
På liknande sätt hittar vi $\hat{v}$ & $\hat{w}$

Detta är en lokal bas i punkten (u_0, v_0, w_0)
Vi betecknar den $[\hat{u}, \hat{v}, \hat{w}]$.

Ex Polära koordinater

$(r,\theta) \longmapsto (r\cos\theta, r\sin\theta)$ $\quad 0<r<\infty \quad , \quad \theta \in \mathbb{R}$

$x = r\cos\theta \quad y = r\sin\theta$



$\hat{r} = (\cos\theta, \sin\theta)$

$\hat{\theta} = \frac{1}{r}(-r\sin\theta, r\cos\theta)$
$= (-\sin\theta, \cos\theta)$

$\hat{r}\cdot\hat{\theta} = 0$

Ex Skriv $\vec{F}(x,y) = (-y,x)$ i polära koordinater (med hjälp av de lokala baserna/ramen $[\hat{r},\hat{\theta}]$).

Vi vet att

$$\vec{F} = (F_1, F_2) = F_1\vec{e_1} + F_2\vec{e_2}$$

Notera att

$$F_1 = \vec{F}\cdot\vec{e_1} \quad \text{och} \quad F_2 = \vec{F}\cdot\vec{e_2}$$

På samma sätt (eftersom $\hat{r}\cdot\hat{\theta} = 0$) så gäller

$$\vec{F} = \underbrace{(\vec{F}\cdot\hat{r})}_{=F_r}\hat{r} + \underbrace{(\vec{F}\cdot\hat{\theta})}_{=F_\theta}\hat{\theta}$$

Vi får $F_r = \vec{F} \cdot \hat{r} = (-r\sin\theta, r\cos\theta) \cdot (\cos\theta, \sin\theta) = 0$

$$F_\theta = \vec{F} \cdot \hat{\theta} = (-r\sin\theta, r\cos\theta) \cdot (-\sin\theta, \cos\theta) = r$$

$$\Longrightarrow \vec{F} = 0\hat{r} + r\hat{\theta} = r\hat{\theta}$$

Ex Cylindriska koordinater

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta, \quad z = z$$

Koordinatytor

$r = r_0$ cylinder med radie r_0

$\theta = \theta_0$ vertikala halvplan från z-axeln

$z = z_0$ horisontella plan

$\hat{r} = (\cos\theta, \sin\theta, 0)$ $\quad$ $\hat{r} \cdot \hat{\theta} = \hat{r} \cdot \hat{z} = \hat{\theta} \cdot \hat{z} = 0$

$\hat{\theta} = (-\sin\theta, \cos\theta, 0)$

$\hat{z} = (0, 0, 1)$

Ex Sfäriska koordinater

$$\begin{cases} x = r\cos\theta\sin\phi \\ y = r\sin\theta\sin\phi \\ z = r\cos\phi \end{cases}$$

Koordinatytor $r = r_0$ sfär med radie r_0

$\theta = \theta_0$ vertikala halvplan från z-axeln

$\phi = \phi_0$ koner med vertex i origo

Det är enkelt, men lite långtråkigt, att verifiera att detta är ett ortogonalt kroklinjärt koordinatsystem.

Skalfaktorer och differentialelement

Ortsvektorn i xyz-koordinater

$$\vec{r}(u,v,w) = (x(u,v,w), y(u,v,w), z(u,v,w))$$

Då gäller

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial u} = \left(\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial u}\right)$$

(samma för $\frac{\partial \vec{r}}{\partial v}$ & $\frac{\partial \vec{r}}{\partial w}$)

Längden av dessa vektorer kallas skalfaktorer för koordinatsystemet

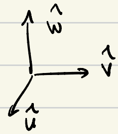
$$h_u = \left|\frac{\partial \vec{r}}{\partial u}\right|, \quad h_v = \left|\frac{\partial \vec{r}}{\partial v}\right| \text{ och } h_w = \left|\frac{\partial \vec{r}}{\partial w}\right|$$

Notera att

$$(*) \qquad \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} = h_u \hat{u}, \quad \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} = h_v \hat{v} \quad \text{och} \quad \frac{\partial \vec{r}}{\partial w} = h_w \hat{w}.$$

Vi antar att skalfaktorerna alla är noll-skilda <u>och</u> att $[\hat{u}, \hat{v}, \hat{w}]$ definierar ett högerorienterat system. När $[\hat{u}, \hat{v}, \hat{w}]$ dessutom är ortogonalt så kan man använda skalfaktorerna för att snabbt hitta areaelement och volymselement när man gör variabelbyten i integraler.

P.g.a. $(*)$ och $\hat{u}\cdot\hat{v} = \hat{u}\cdot\hat{w} = \hat{v}\cdot\hat{w} = 0$



$$\Longrightarrow \quad dV = h_u h_v h_w \, du\,dv\,dw$$

Man hittar också snabbt areaelementet för koordinatytor

<u>Ex</u>

$$u = u_0 \qquad dS = h_v h_w \, dv\,dw \qquad \text{o.s.v.}$$

<u>Ex</u> Cylindriska koordinater

$$\begin{cases} x = R\cos\theta \\ y = R\sin\theta \\ z = z \end{cases} \qquad (R,\theta,z) \longmapsto (x,y,z)$$

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial R} = (\cos\theta, \sin\theta, 0) \qquad h_R = 1$$

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} = (-R\sin\theta, R\cos\theta, 0) \qquad h_\theta = R$$

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial z} = (0,0,1) \qquad h_z = 1$$

$$\Longrightarrow \quad dV = R \, dR\,d\theta\,dz$$