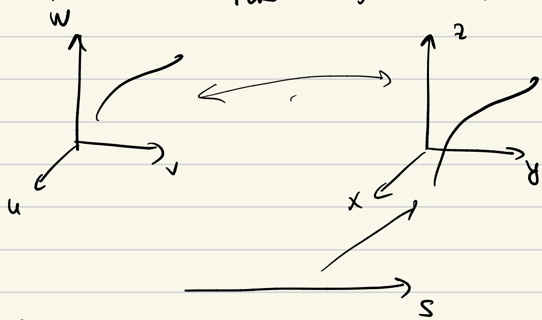
Gradienten, divergensen och Curl i ortogonala kroklinjära koordinater

Vi börjar med gradienten. Vi vill hitta $\nabla f = f_u \hat{u} + f_v \hat{v} + f_w \hat{w}$.

Först låt oss ta en kurva $\gamma(s)$ som parametriserats med båglängden. ($\left|\frac{d\gamma}{ds}\right| = 1$, "hastighet = 1")



$$\frac{df}{ds} = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{du}{ds} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{dv}{ds} + \frac{\partial f}{\partial w} \cdot \frac{dw}{ds}$$ genom kedjeregeln

Vi vet också $\frac{df}{ds} = \nabla f \cdot \hat{T}$ där $\hat{T}$ är enhetstangentvektor till γ.

$$\hat{T} = \frac{d\gamma}{ds} = \frac{\partial \gamma}{\partial u} \cdot \frac{du}{ds} + \frac{\partial \gamma}{\partial v} \cdot \frac{dv}{ds} + \frac{\partial \gamma}{\partial w} \cdot \frac{dw}{ds} =$$

$$= h_u \frac{du}{ds} \hat{u} + h_v \frac{dv}{ds} \hat{v} + h_w \frac{dw}{ds} \hat{w}$$

Alltså

$$\frac{df}{ds} \underset{\substack{\hat{T} \\ [\hat{u}, \hat{v}, \hat{w}] \\ \text{ortogonalt}}}{=} f_u h_u \frac{du}{ds} + f_v h_v \frac{dv}{ds} + f_w h_w \frac{dw}{ds}$$

$$\Rightarrow \quad f_u h_u = \frac{\partial f}{\partial u}, \quad f_v h_v = \frac{\partial f}{\partial v} \quad \& \quad f_w h_w = \frac{\partial f}{\partial w}$$

$$\Rightarrow \quad \nabla f = \frac{1}{h_u}\frac{\partial f}{\partial u}\hat{u} + \frac{1}{h_v}\frac{\partial f}{\partial v}\hat{v} + \frac{1}{h_w}\frac{\partial f}{\partial w}\hat{w}.$$

Ex I polära koordinater

$$\begin{cases} x = R\cos\theta \\ y = R\sin\theta \end{cases} \qquad \begin{aligned} h_R &= |(\cos\theta, \sin\theta)| = 1 \\ h_\theta &= |(-R\sin\theta, R\cos\theta)| = R \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \nabla f = \frac{\partial f}{\partial R}\hat{R} + \frac{1}{R}\frac{\partial f}{\partial \theta}\hat{\theta}$$

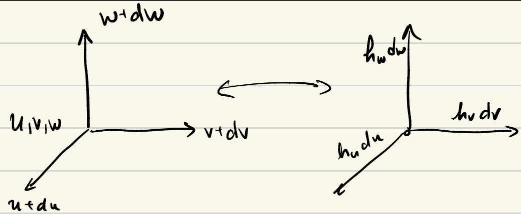
I cylindriska koordinater $(h_R = 1 = h_z, h_\theta = R)$

får vi $\quad \nabla f = \frac{\partial f}{\partial R}\hat{R} + \frac{1}{R}\frac{\partial f}{\partial \theta}\hat{\theta} + \frac{\partial f}{\partial z}\hat{z}$

Divergens

Antag att $\vec{F}(u,v,w) = F_u\hat{u} + F_v\hat{v} + F_w\hat{w}$

Kom ihåg att $\operatorname{div}\vec{F}$ är flödet ut ur en kropp per enhetsvolym



På u och u+du ytan är flödet

$$\vec{F}(u+du,v,w)\cdot\hat{u}\, dS_u - \vec{F}(u,v,w)\cdot\hat{u}\, dS_u =$$
$$= F_u(u+du,v,w)\, h_v(u+du,v,w)\, h_w(u+du,v,w)\, dv\,dw$$
$$- F_u(u,v,w)\, h_v(u,v,w)\, h_w(u,v,w)\, dv\,dw =$$
$$= \frac{\partial}{\partial u}(F_u h_v h_w)\, du\,dv\,dw + \text{termer av högre ordning.}$$

Lägg till de övriga ytorna och dela med volymen $(= h_u h_v h_w\, du\,dv\,dw)$

$$\Longrightarrow \operatorname{div}\vec{F} = \frac{1}{h_u h_v h_w}\left(\frac{\partial}{\partial u}(F_u h_v h_w) + \frac{\partial}{\partial v}(h_u F_v h_w) + \frac{\partial}{\partial w}(h_u h_v F_w)\right)$$

Ex Cylindriska koordinater ($h_R = h_z = 1$ och $h_\theta = R$)

$$\vec{F}(R,\theta,z) = F_R\hat{R} + F_\theta\hat{\theta} + F_z\hat{z}$$

$$\operatorname{div}\vec{F} = \frac{1}{R}\left(\frac{\partial}{\partial R}(RF_R) + \frac{\partial}{\partial\theta}F_\theta + \frac{\partial}{\partial z}(RF_z)\right) =$$

$$= \frac{1}{R}F_R + \frac{\partial F_R}{\partial R} + \frac{1}{R}\frac{\partial F_\theta}{\partial\theta} + \frac{\partial F_z}{\partial z}$$

Slutligen Curl $\vec{F}$ (Här är det viktigt att $[\hat{u}, \hat{v}, \hat{w}]$ är högerorienterat)

Först visar vi att $\mathrm{Curl}(f\nabla g) = (\nabla f) \times (\nabla g)$

Räknereglerna för div, grad & Curl ger

c) $\mathrm{Curl}(\phi \vec{F}) = (\nabla \phi) \times \vec{F} + \phi (\nabla \times \vec{F})$

och g) $\mathrm{Curl}(\nabla g) = \nabla \times (\nabla g) = \vec{0}$

Detta ger $\mathrm{Curl}(f \nabla g) \overset{c)}{=} (\nabla f) \times (\nabla g) + f(\nabla \times (\nabla g)) \overset{g)}{=} (\nabla f) \times (\nabla g)$

Studera $f(u,v,w) = u$. Vad är $\nabla f \; (= \nabla u)$?

$\nabla f = \dfrac{1}{h_u} \dfrac{\partial f}{\partial u} \hat{u} = \dfrac{1}{h_u} \hat{u}$ eller $\nabla u = \nabla f = \dfrac{1}{h_u} \hat{u}$

$\Longrightarrow \hat{u} = h_u \nabla u$

Dessutom $\hat{v} = h_v \nabla v$ och $\hat{w} = h_w \nabla w$

Därför får vi

$$\vec{F} = F_u \hat{u} + F_v \hat{v} + F_w \hat{w} = F_u h_u \nabla u + F_v h_v \nabla v + F_w h_w \nabla w$$

och $\mathrm{Curl}\,\vec{F} = \nabla \times (F_u h_u \nabla u) + \nabla \times (F_v h_v \nabla v) + \nabla \times (F_w h_w \nabla w)$

$$\nabla \times (F_u h_u \nabla u) = \nabla (F_u h_u) \times (\nabla u) =$$

$$= \left(\frac{1}{h_u} \frac{\partial}{\partial u}(F_u h_u)\,\hat{u} + \frac{1}{h_v}\frac{\partial}{\partial v}(F_u h_u)\,\hat{v} + \frac{1}{h_w}\frac{\partial}{\partial w}(F_u h_u)\,\hat{w} \right) \times \left(\frac{1}{h_u}\,\hat{u} \right) =$$

$$= \left[\begin{array}{l} \hat{u}\times\hat{u} = 0 \\ \hat{v}\times\hat{u} = -\hat{w} \\ \hat{w}\times\hat{u} = \hat{v} \end{array} \right] = \frac{1}{h_u h_v h_w}\left[\frac{\partial}{\partial w}(F_u h_u)\, h_v \hat{v} - \frac{\partial}{\partial v}(F_u h_u)\, h_w \hat{w} \right]$$

$[\hat{u}, \hat{v}, \hat{w}]$ högerorienterat

Gör samma räkningar för övriga termer och stirra på resultatet. Du ser då att

$$\text{Curl}\,\vec{F} = \frac{1}{h_u h_v h_w} \begin{vmatrix} h_u \hat{u} & h_v \hat{v} & h_w \hat{w} \\ \partial/\partial u & \partial/\partial v & \partial/\partial w \\ F_u h_u & F_v h_v & F_w h_w \end{vmatrix}$$

Ex Cylindriska koordinater $(h_R = h_z = 1\,,\ h_\theta = R$
$[\hat{R}, \hat{\theta}, \hat{z}]$

$$\vec{F} = F_R \hat{R} + F_\theta \hat{\theta} + F_z \hat{z}$$

$$\text{Curl}\,\vec{F} = \frac{1}{R} \begin{vmatrix} \hat{R} & R\hat{\theta} & \hat{z} \\ \partial/\partial R & \partial/\partial \theta & \partial/\partial z \\ F_R & RF_\theta & F_z \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{R}\left(\left(\frac{\partial F_z}{\partial \theta} - \frac{\partial}{\partial z}(RF_\theta) \right)\hat{R} + \left(\frac{\partial F_z}{\partial R} - \frac{\partial F_R}{\partial z} \right) R\hat{\theta} + \left(\frac{\partial}{\partial R}(RF_\theta) - \frac{\partial F_R}{\partial \theta} \right)\hat{z} \right) =$$

$$= \left(\frac{1}{R}\frac{\partial F_z}{\partial \theta} - \frac{\partial F_\theta}{\partial z} \right)\hat{R} + \left(\frac{\partial F_R}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial R} \right)\hat{\theta} + \left(\frac{1}{R}F_\theta + \frac{\partial F_\theta}{\partial R} - \frac{1}{R}\frac{\partial F_R}{\partial \theta} \right)\hat{z}$$

Ex $\quad \vec{r} = (x,y,z)$ och $\vec{F}(x,y,z) = m\dfrac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3}$

Genom att välja m korrekt så är detta ett gravitationsfält (med ett annat val ett elektromagnetiskt fält)

Det är jobbigt att verifiera att $\operatorname{div}\vec{F} = 0$ (utanför origo). Men inte i sfäriska koordinater!

Låt $[\hat{R}, \hat{\phi}, \hat{\theta}]$ vara vår lokala bas
(notera ordningen)

I sfäriska koordinater

$$\vec{F}(R,\phi,\theta) = \frac{m}{R^2}\hat{R}$$

Kom ihåg, $\begin{cases} x = R\sin\phi\cos\theta \\ y = R\sin\phi\sin\theta \\ z = R\cos\phi \end{cases}$

och $h_R = |(\sin\phi\cos\theta, \sin\phi\sin\theta, \cos\phi)| = 1$

$$h_\phi = |(R\cos\phi\cos\theta, R\cos\phi\sin\theta, -R\sin\phi)| = R$$

$$h_\theta = |(-R\sin\phi\sin\theta, R\sin\phi\cos\theta, 0)| = R\sin\phi$$

$$\operatorname{div}\vec{F} = \frac{1}{h_R h_\phi h_\theta}\left(\frac{\partial}{\partial R}(F_R \cdot h_\phi \cdot h_\theta) + \underbrace{\ldots}_{=0 \text{ i detta fall}}\right) = \frac{1}{R^2\sin\phi}\frac{\partial}{\partial R}\left(\frac{m}{R^2}R^2\sin\phi\right) = 0$$