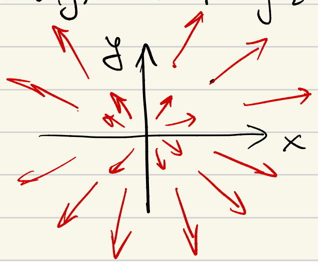
Vektorfält

Vi har hittills studerat $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Det är också nödvändigt att studera $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ (vektorvärda funktioner). Om $n = m$ så kallas dessa vektorfält.

Ex $\quad F(x,y) = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 = (x,y) = (F_1(x,y), F_2(x,y))$



Notation och terminologi

$F: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

$$F(x_1,\dots,x_n) = (F_1(x_1,\dots,x_n), F_2(x_1,\dots,x_n), \dots, F_n(x_1,\dots,x_n))$$

$$= F_1(\vec{x})\vec{e}_1 + \dots + F_n(\vec{x})\vec{e}_n$$

C^k-vektorfält om $F_i \in C^k$ för $i = 1,\dots,n$

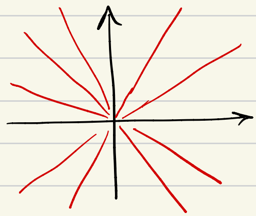
glatt / C^∞-vektorfält om F_i är.

15

Integralkurvor / Fältlinjer / Trajektorier

En integralkurva till ett vektorfält är en kurva vars tangentvektorer är parallella med vektorfältet i varje punkt på kurvan.

Ex $\quad F(x,y) = (x,y)$



Integralkurvor = strålar från origo.

Vad är en kurva?

$$r : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n \qquad r(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$$

Hur hittar vi enkelt tangentvektorer till r?

$$\frac{dr}{dt} = \dot{r}(t) = \left(\frac{dx_1}{dt}, \dots, \frac{dx_n}{dt}\right)$$

Om $r(t)$ är en integralkurva så gäller

$$\dot{r}(t) = \lambda(t)\, F(r(t))$$

för någon funktion $\lambda(t)$

Då $n=3$ (funkar på samma sätt för andra n) gäller

$$\frac{dx}{dt} = \lambda(t)\, F_1(x,y,z) \; ; \quad \frac{dy}{dt} = \lambda(t)\, F_2(x,y,z)$$

och $$\frac{dz}{dt} = \lambda(t)\, F_3(x,y,z)$$

$$\Longrightarrow \quad \lambda(t)\,dt = \frac{dx}{F_1(x,y,z)} = \frac{dy}{F_2(x,y,z)} = \frac{dz}{F_3(x,y,z)}$$

<u>Om</u> det är möjligt att multiplicera dessa ekvationer med en funktion så att

$$P(x)\,dx = Q(y)\,dy = R(z)\,dz$$

Så kan vi integrera och få likheter som kurvan måste uppfylla.

<u>Ex</u> $F(x,y) = (x,y)$. Integralkurvor?

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y}$$

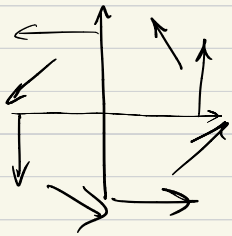
$$\ln|y| = \ln|x| + C \quad \Longrightarrow \quad |y| = A|x|$$

$$\Rightarrow \quad y = Ax \quad x > 0$$

eller $y = Ax$; $x < 0$

Man kan också verifiera att $x=0$ och $y=0$ ger integralkurvor.

Ex $F(x,y) = (-y, x)$



$$\frac{dx}{-y} = \frac{dy}{x}$$

$$\Rightarrow x\,dx = -y\,dy$$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{2} = -\frac{y^2}{2} + \frac{c}{2}$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 = C$$

Integralkurvorna är cirklar

Konservativa vektorfält

Givet en funktion $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ så är dess gradient $\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\right) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ett vektorfält. När är ett givet vektorfält gradienten av en funktion? Ett vektorfält som är gradienten av en funktion kallas ett konservativt vektorfält. Funktion(erna) kallas för en potential till vektorfältet. Det är relativt enkelt att hitta ett nödvändigt villkor för vektorfält i planet att vara konservativa

(Om vektorfältet inte uppfyller detta villkor så är det inte konservativt.)

Antag att $\nabla\phi = F$

$$\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}, \frac{\partial\phi}{\partial y}\right) = \left(F_1(x,y), F_2(x,y)\right)$$

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial^2\phi}{\partial y\partial x} \qquad \frac{\partial F_2}{\partial x} = \frac{\partial^2\phi}{\partial x\partial y}$$

$$\Longrightarrow \frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial F_2}{\partial x} \quad \left(\text{eftersom } \frac{\partial^2\phi}{\partial y\partial x} = \frac{\partial^2\phi}{\partial x\partial y}\right)$$

Om denna likhet inte gäller så är F inte konservativt.

<u>Ex</u> $F(x,y) = (x,y)$

Är detta vektorfält konservativt?

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = 0 \ \& \ \frac{\partial F_2}{\partial x} = 0 \Longrightarrow F \text{ kan vara konservativt.}$$

Vi försöker konstruera en potentialfunktion $\phi(x,y)$

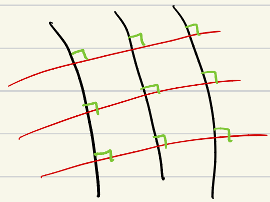
$$\frac{\partial\phi}{\partial x} = x \Longrightarrow \phi(x,y) = \frac{x^2}{2} + C(y)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial\phi}{\partial y} = C'(y) = y \Longrightarrow C(y) = \frac{y^2}{2} + D$$

$$\Rightarrow \phi(x,y) = \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} + D$$ är en potential för $F(x,y)$ (Kolla att $\nabla\phi = F$ om du är osäker)

Mängderna $\{\vec{x} \in \mathbb{R}^n \mid \phi(\vec{x}) = C\}$ kallas för ekvipotential kurvor (om $n=2$) / ytor (om $n=3$) / hyperytor (om $n \geq 4$)

Faktum: Ekvipotentialkurvor är ortogonala trajektorier till integralkurvor (för samma konservativa vektorfält)



Ex $F(x,y) = (y,x) = y\vec{e_1} + x\vec{e_2}$

Först integralkurvor

$$\frac{dx}{y} = \frac{dy}{x} \Rightarrow \int x\,dx = \int y\,dy \Rightarrow$$

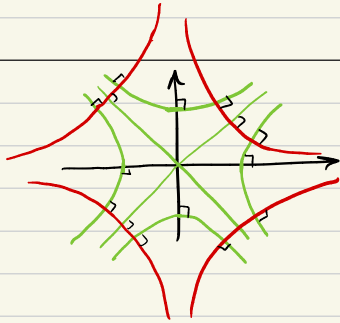
$$\Rightarrow \frac{x^2}{2} = \frac{y^2}{2} + C \Rightarrow \text{Integralkurvor } x^2 - y^2 = A \text{ (hyperbler)}$$

Nu ekvipotentialkurvor

$$\frac{\partial\phi}{\partial x} = y \Rightarrow \phi(x,y) = xy + \alpha(y) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\partial\phi}{\partial y} = x + \alpha'(y) \Rightarrow \alpha'(y) = 0$$

$$\Rightarrow \phi(x,y) = xy + C$$



Integralkurvor

Ekvipotentialkurvor
(också koordinataxlarna)

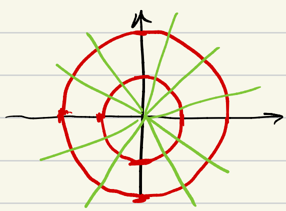
Ex $\quad F(x,y) = (x,y)$

Vi vet redan att integralkurvorna till detta vektorfält är strålar från origo. Låt oss hitta ekvipotentialkurvor.

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = x \Longrightarrow \phi(x,y) = \frac{x^2}{2} + \alpha(y) \Longrightarrow \frac{\partial \phi}{\partial y} = \alpha'(y) = y \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \alpha(y) = \frac{y^2}{2} + A \Longrightarrow \phi(x,y) = \frac{x^2+y^2}{2} + A$$

$\longrightarrow$ Ekvipotentialkurvorna är $x^2+y^2 = C$
(Cirklar kring origo)



Integralkurvor

Ekvipotentialkurvor