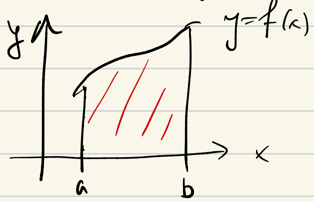
Kurvintegral / Linjeintegral

Vi brukar tänka på $\int_a^b f(x)\,dx$ som en areaberäkning

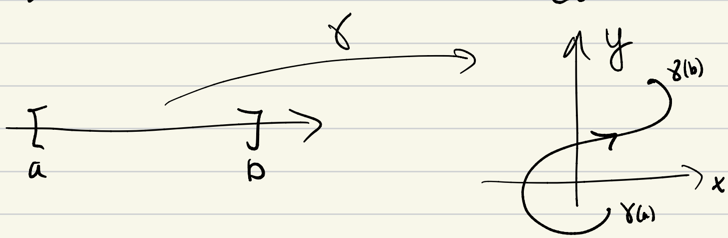


Vi vet att man har användning för dessa integraler i andra sammanhang också. Detta är också sant för kurvintegraler men vi tänker oss nu även dessa som en areaberäkning.

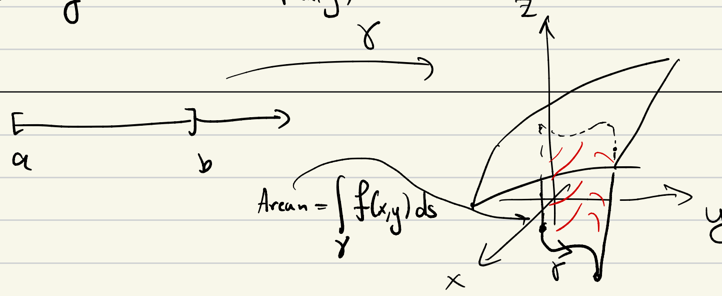
Först några saker om kurvor.

$\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ är en C^1-kurva om

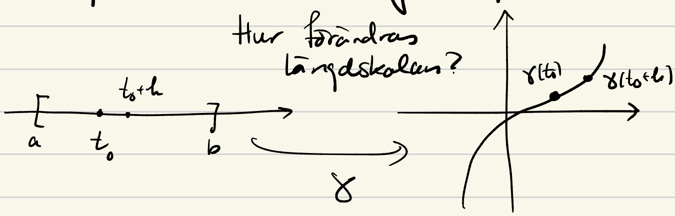
$\frac{d\gamma}{dt} = \dot{\gamma}$ är kontinuerlig <u>och</u> $\frac{d\gamma}{dt} = \dot{\gamma} \neq 0$ för $t \in (a,b)$



Antag att $z = f(x,y)$



Vi använder parametriseringen $\gamma(t)$ för att reducera beräkningen till en vanlig integral.

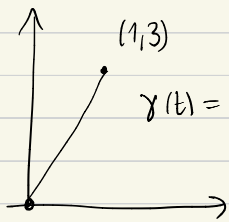


$$|\gamma(t_0+h)-\gamma(t_0)| \approx \left|\frac{d\gamma}{dt}(t_0)\right| h$$

$$\int_\gamma f(x,y)\,ds = \int_a^b f(\gamma(t))\left|\frac{d\gamma}{dt}\right| dt$$

<u>Ex</u> Beräkna $\int_\gamma x^2+y^2\,ds$ då γ är den räta linjen från $(0,0)$ till $(1,3)$.

<u>Lösning:</u> Vi parametriserar γ



$\gamma(t) = (t, 3t)$ $\quad 0 \le t \le 1$

$$\frac{d\gamma}{dt} = (1,3)$$

$$\left|\frac{d\gamma}{dt}\right| = \sqrt{1^2+3^2} = \sqrt{10}$$

$$\int_\gamma x^2+y^2\,ds = \int_0^1 \left(t^2+(3t)^2\right)\sqrt{10}\,dt =$$

$$= 10\sqrt{10}\int_0^1 t^2\,dt = \frac{10\sqrt{10}}{3}.$$

Ex Beräkna längden av cirkeln med radie $r > 0$

$$\gamma(t) = (r\cos t, r\sin t) \qquad 0 \le t \le 2\pi.$$

$$\text{Längden} = \int_\gamma 1 \, ds = \int_0^{2\pi} 1 \cdot \left|\frac{d\gamma}{dt}\right| dt \underbrace{=}_{\left|\frac{d\gamma}{dt}\right| = r} \int_0^{2\pi} r \, dt = 2\pi r.$$

I princip integralens värde kunna bero på parametriseringen av kurvan γ. På grund av kedjeregeln så är integralens värde oberoende av parametriseringen. Därför så kan vi skriva

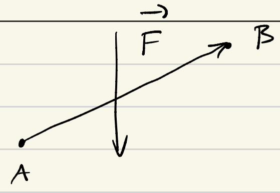
$$\int_\gamma f(x,y)\, ds \quad \text{utan att ange}$$

parametrisering. Dessutom spelar det ingen roll om vi går från a till b eller b till a.

($\gamma(t)$ eller $\gamma(-t)$ ger samma $\left|\frac{d\gamma}{dt}\right|$)

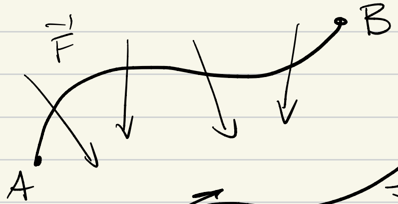
Kurvintegraler av vektorfält

Inom fysik så är arbete = kraft · väg

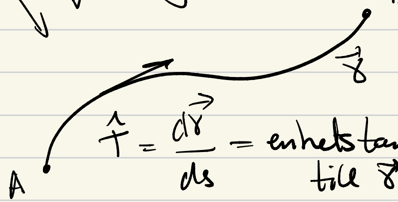


$$W = \vec{F} \cdot \vec{AB}$$

Vad händer om $\vec{F}$ varierar i rummet?



Hur beräknar man arbetet då?



$\hat{T} = \dfrac{d\vec{\gamma}}{ds}$ = enhetstangent till $\vec{\gamma}$.

$$W = \int_\gamma \vec{F} \cdot \hat{T}\, ds = \int_\gamma \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_\gamma F_1\, dx + F_2\, dy$$

Notera att
$$\int_\gamma \vec{F} \cdot d\vec{r} = -\int_{-\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

<u>Ex</u> Låt $F(x,y) = (y^2, 2xy)$. Beräkna
$$\int_\gamma \vec{F} \cdot d\vec{r}$$ då γ är

a) den räta linjen från $(0,0)$ till $(1,1)$

b) delen av parabeln $y = x^2$ som börjar i $(0,0)$ och slutar i $(1,1)$.

<u>Lösning</u>: a) $\gamma(t) = (t,t)$ $\quad 0 \le t \le 1$

$$\frac{d\gamma}{dt} = (1,1) \qquad \hat{T} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1)$$

$$F\cdot\hat{T} = (y^2, 2xy)\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1) = \frac{1}{\sqrt{2}}(y^2+2xy)$$

$$\int_\gamma F\cdot\hat{T}\,ds = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{2}}3t^2\cdot\sqrt{2}\,dt = \left[t^3\right]_0^1 = 1$$

Lägg märke till

$$\text{"}\hat{T}\,ds = \hat{T}\left|\frac{d\gamma}{dt}\right|dt = \frac{d\gamma}{dt}\,dt\text{"}$$

b) $\gamma(t) = (t, t^2)$ $\qquad \frac{d\gamma}{dt} = (1, 2t)$ "$= d\vec{r}$"

$F(t) = (t^4, 2t^3)$

$$\int_\gamma F\cdot d\vec{r} = \int_0^1 (t^4, 2t^3)\cdot(1,2t)\,dt = \int_0^1 t^4 + 4t^4\,dt =$$

$$= \int_0^1 5t^4\,dt = \left[t^5\right]_0^1 = 1.$$

<u>Alternativ</u>: $\int_\gamma y^2\,dx + 2xy\,dy =$

$$= \int_0^1 (t^2)^2\frac{dx}{dt} + 2t\cdot t^2\frac{dy}{dt}\,dt = \int_0^1 t^4 + 2t^3\cdot 2t\,dt =$$

$$= \int_0^1 5t^4\,dt = 1.$$

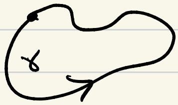
Låt oss nu undersöka när $\int_\gamma F\cdot d\vec{r}$ är oberoende av vägen γ mellan a och b.

Till att börja med gör vi en definition

Låt γ vara en sluten kurva

$$\oint_\gamma F \cdot d\vec{r} = \text{cirkulationen hos } F \text{ längs } \gamma.$$

$\oint_\gamma$ används endast då γ är sluten



Sats: Om D är ett öppet, sammanhängande område och F är ett glatt vektorfält så är följande villkor ekvivalenta.

1. F är konservativt i D.
2. $\oint_\gamma F \cdot d\vec{r} = 0$ för varje styckvist, glatt, sluten kurva i D.
3. $\int_\gamma F \cdot d\vec{r}$ beror endast på ändpunkter av γ.

Bevis: $1 \Rightarrow 2$ (i $\mathbb{R}^2$)

$$\nabla \phi = F$$

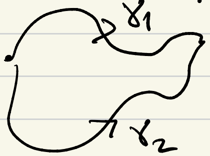
$$F \cdot d\vec{r} = \left(\frac{\partial \phi}{\partial x}, \frac{\partial \phi}{\partial y}\right) \cdot \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}\right) dt = \frac{d\,\phi(\gamma(t))}{dt}\, dt$$

$$\int_\gamma F \cdot d\vec{r} = \int_a^b \frac{d\,\phi(\gamma(t))}{dt}\, dt = \phi(\gamma(b)) - \phi(\gamma(a))$$

(Lägg märke till att detta ger en metod att beräkna $\int_\gamma F \cdot d\vec{r}$ om man känner ϕ!)

$$\gamma \text{ sluten} \Longrightarrow \gamma(b) = \gamma(a) \Longrightarrow \oint_\gamma F \cdot d\vec{r} = 0.$$

② ⇒ ③ (eller egentligen $\neg$③ ⇒ $\neg$②)



$$\int_{\gamma_1} F \cdot d\vec{r} \neq \int_{\gamma_2} F \cdot dr$$

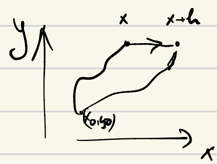
$$\Rightarrow \int_{\gamma_1 - \gamma_2} F \cdot d\vec{r} \neq 0.$$

③ ⇒ ① Välj $(x_0, y_0) \in D$. För $(x,y) \in D$ välj γ från (x_0,y_0) till (x,y)

Definiera $\phi(x,y) = \int_\gamma F \cdot d\vec{r}$

Denna funktion är väl-definierad eftersom värdet inte beror på γ.

$$\phi(x+h,y) - \phi(x,y) = \int_x^{x+h} F_1(\xi, y)\, d\xi$$



$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \lim_{h \to 0} \frac{\phi(x+h,y) - \phi(x,y)}{h} = F_1(x,y)$$

Gör på samma sätt för $\frac{\partial \phi}{\partial y} = F_2(x,y)$

$$\Rightarrow \nabla \phi = F.$$

⊗

Denna sats visar varför konservativa vektorfält är så bra att jobba med.