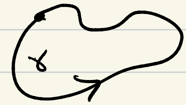
Till att börja med gör vi en definition

Låt γ vara en sluten kurva

$$\oint_\gamma F \cdot d\vec{r} = \text{cirkulationen hos } F \text{ längs } \gamma.$$

$\oint_\gamma$ användes endast då γ är sluten



Sats: Om D är ett öppet, sammanhängande område och F är ett glatt vektorfält så är följande villkor ekvivalenta.

1. F är konservativt i D.
2. $\oint_\gamma F \cdot d\vec{r} = 0$ för varje styckvist, glatt, sluten kurva i D.
3. $\int_\gamma F \cdot d\vec{r}$ beror endast på ändpunkter av γ.

Bevis: 1 $\Longrightarrow$ 2 (i $\mathbb{R}^2$)

$$\nabla \phi = F$$

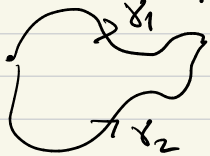
$$F \cdot d\vec{r} = \left(\frac{\partial \phi}{\partial x}, \frac{\partial \phi}{\partial y}\right) \cdot \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}\right) dt = \frac{d\,\phi(\gamma(t))}{dt}\, dt$$

$$\int_\gamma F \cdot d\vec{r} = \int_a^b \frac{d\,\phi(\gamma(t))}{dt}\, dt = \phi(\gamma(b)) - \phi(\gamma(a))$$

(Lägg märke till att detta ger en metod att beräkna $\int_\gamma F \cdot d\vec{r}$ om man känner ϕ!)

γ sluten $\Longrightarrow$ $\gamma(b) = \gamma(a)$ $\Longrightarrow$ $\oint_\gamma F \cdot d\vec{r} = 0.$

② ⇒ ③ (eller egentligen ¬③ ⇒ ¬②)



$$\int_{\gamma_1} F \cdot d\vec{r} \neq \int_{\gamma_2} F \cdot dr$$

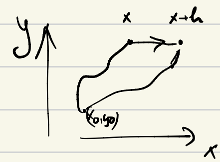
$$\Rightarrow \int_{\gamma_1 - \gamma_2} F \cdot d\vec{r} \neq 0 .$$

③ ⇒ ① Välj $(x_0, y_0) \in D$. För $(x,y) \in D$ välj γ från (x_0, y_0) till (x,y)

Definiera $\phi(x,y) = \int_\gamma F \cdot d\vec{r}$

Denna funktion är väl-definierad eftersom värdet inte beror på γ.

$$\phi(x+h, y) - \phi(x,y) = \int_x^{x+h} F_1(\xi, y)\, d\xi$$



$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \lim_{h \to 0} \frac{\phi(x+h,y) - \phi(x,y)}{h} = F_1(x,y)$$

Gör på samma sätt för $\frac{\partial \phi}{\partial y} = F_2(x,y)$

$$\Rightarrow \nabla \phi = F.$$

⊗

Denna sats visar varför konservativa vektorfält är så bra att jobba med.

Ex Beräkna arbetet när ett objekt rör sig från $(-1,0,1)$ till $(0,-2,3)$ längs godtycklig glatt kurva i kraftfältet

$$F(x,y,z) = (x+y)\vec{e_1} + (x-z)\vec{e_2} + (z-y)\vec{e_3}$$

Lösning: Vi försöker konstruera en potentialfunktion.

$$\frac{\partial\phi}{\partial x} = x+y \implies \phi(x,y,z) = \frac{x^2}{2} + xy + \alpha(y,z)$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial y} = x + \frac{\partial\alpha}{\partial y} = x-z \implies \frac{\partial\alpha}{\partial y} = -z \implies \alpha(y,z) = -yz + \beta(z)$$

$$\implies \phi(x,y,z) = \frac{x^2}{2} + xy - yz + \beta(z)$$

$$\implies \frac{\partial\phi}{\partial z} = -y + \beta'(z) = -y + z \implies \beta'(z) = z$$

$$\implies \beta(z) = \frac{z^2}{2} + C$$

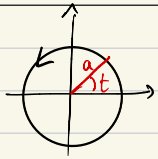
Välj $C=0$. $\displaystyle\int_\gamma \vec{F}\cdot d\vec{r} = \phi(0,-2,3) - \phi(-1,0,1) =$

$$= \ldots = \frac{19}{2}.$$

Ex Beräkna $\displaystyle\frac{1}{2\pi}\oint_\gamma \frac{-y\,dx + x\,dy}{x^2+y^2}$

motsols kring cirkeln $x^2+y^2=a^2$

Lösning: $\begin{cases} x = a\cos t \\ y = a\sin t \end{cases}$



$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{a^2\sin^2 t\,dt + a^2\cos^2 t\,dt}{a^2} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} dt = 1.$$

Alltså $\oint_\gamma \frac{-y\,dx + x\,dy}{x^2+y^2} = 1$ och vi ser att

$F(x,y) = \left(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}\right)$ inte är konservativt
(i $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$)

Ytor och ytintegraler

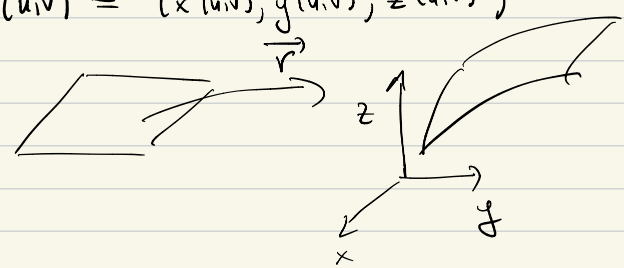
Vad menas med en yta?

Åter igen så behöver vi en parametrisering?

$\vec{r} : \underset{(u,v)}{\overset{}{U}} \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^n$ (vanligtvis $n=3$ för oss)

är en yta (under vissa förutsättningar)

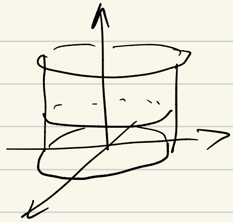
$\vec{r}(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$



$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \neq \vec{0}$$

Ex $\vec{r}(u,v) = (\cos u, \sin u, v)$

$$0 \le u \le 2\pi, \quad 0 \le v \le 1$$



S

Vi kan bilda ytintegraler $\iint_S f(x,y,z)\, dS$

som Riemannsummor precis som för kurvintegraler i $\mathbb{R}^n$. Hur beräknar man ytintegraler?

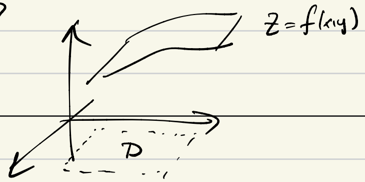
Vi använder parametriseringen och

$$dS = \text{"areaskalan"}\, du\, dv$$

$$dS = \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} du \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} dv \right| = \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \right| du\, dv$$

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial u} = \left(\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial u} \right) \qquad \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} = \left(\frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial v}, \frac{\partial z}{\partial v} \right)$$

Ex Vad är arean (mantelarean) hos en graf $z = f(x,y)$ över D?



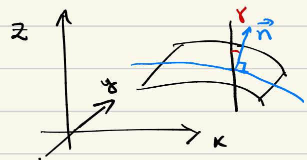
$$\vec{r}(u,v) = (u, v, f(u,v))$$

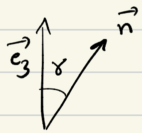
$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial u} = \left(1, 0, \frac{\partial f}{\partial u}\right) \qquad \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} = \left(0, 1, \frac{\partial f}{\partial v}\right)$$

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ 1 & 0 & \frac{\partial f}{\partial u} \\ 0 & 1 & \frac{\partial f}{\partial v} \end{vmatrix} = \left(-\frac{\partial f}{\partial u}, -\frac{\partial f}{\partial v}, 1\right)$$

$$\text{Mantelarean} = \iint_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)^2}\, du\, dv$$

Man kan också hitta dS utan att använda parametriseringen.





$$\Delta h, \quad \gamma, \quad \Delta x$$

$$\cos\gamma = \frac{\Delta x}{\Delta h} \Rightarrow \Delta h = \frac{\Delta x}{\cos\gamma}$$

$$\Longrightarrow \quad dS = \frac{1}{\cos\gamma}\, dx\, dy$$

Vi vet också $\cos\gamma = \dfrac{\vec{n}\cdot\vec{e}_3}{|\vec{n}|}$ och

därför $dS = \dfrac{|\vec{n}|}{\vec{n}\cdot\vec{e}_3}\, dx\, dy$

Detta är användbart då ytan ges som en nivåyta $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid G(x,y,z) = 0\}$

Vi vet att $\vec{n} = \nabla G$

Alltså $$dS = \frac{|\nabla G|}{\left|\frac{\partial G}{\partial z}\right|}\,dx\,dy \qquad \left(\text{om } \frac{\partial G}{\partial z} \neq 0\right)$$

Mantelarean hos en sfär med radie $R > 0$.

$$\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid G(x,y,z) = x^2+y^2+z^2-R^2 = 0\}$$

$\nabla G = (2x, 2y, 2z)$ Vi undersöker den del där $z>0$

$$dS = \frac{|\nabla G|}{|G_z|}\,dx\,dy = \frac{\sqrt{4x^2+4y^2+4z^2}}{2z}\,dx\,dy =$$

$$= \frac{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}{z}\,dx\,dy = \frac{R}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}\,dx\,dy$$

$$\text{Mantelytan} = 2\iint_S 1\,dS = 2\iint_{x^2+y^2 \leq R^2} \frac{R}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}\,dx\,dy =$$

$$= 2\int_0^{2\pi}\int_0^R \frac{R}{\sqrt{R^2-r^2}}\,r\,dr\,d\theta = 4\pi\int_0^R \frac{Rr}{\sqrt{R^2-r^2}}\,dr =$$

$$= \left[\begin{array}{ll} t = R^2-r^2 & t_R = 0 \\ dt = -2r\,dr & t_0 = R^2 \end{array}\right] = 4\pi R\int_{R^2}^{0} -\frac{1}{2}t^{-1/2}\,dt =$$

$$= 4\pi R\left[-\frac{1}{2}\,\frac{t^{1/2}}{1/2}\right]_{R^2}^{0} = 4\pi R^2.$$

Ex Beräkna $\iint_S z\,dS$ då

$$S = \{ z = \sqrt{x^2+y^2} \text{ och } 0 \le z \le 1 \}$$

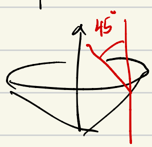
$$\vec{r}(u,v) = \left(u, v, \sqrt{u^2+v^2}\right)$$

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial u} = \left(1, 0, \frac{u}{\sqrt{u^2+v^2}}\right) \qquad \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} = \left(0, 1, \frac{v}{\sqrt{u^2+v^2}}\right)$$

$$\iint_S z\,dS = \iint_{u^2+v^2\le 1} \sqrt{u^2+v^2} \cdot \sqrt{1+\frac{u^2}{u^2+v^2}+\frac{v^2}{u^2+v^2}}\,du\,dv =$$

$$= \sqrt{2}\iint_{u^2+v^2\le 1} \sqrt{u^2+v^2}\,du\,dv \underset{\text{polära}}{=} 2\pi\sqrt{2}\int_0^1 r^2\,dr = \frac{2\pi\sqrt{2}}{3}$$

(Lägg märke till:



$$\cos 45° = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\frac{1}{\cos 45°} = \sqrt{2}$$)