Detta är användbart då ytan ges som en nivåyta $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid G(x,y,z) = 0\}$

Vi vet att $\vec{n} = \nabla G$

Alltså $$dS = \frac{|\nabla G|}{\left|\frac{\partial G}{\partial z}\right|}\,dxdy \qquad \left(\text{om } \frac{\partial G}{\partial z} \neq 0\right)$$

Mantelarean hos en sfär med radie $R > 0$.

$$\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid G(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0\}$$

$$\nabla G = (2x, 2y, 2z)$$ Vi undersöker den del där $z > 0$

$$dS = \frac{|\nabla G|}{|G_z|}\,dxdy = \frac{\sqrt{4x^2+4y^2+4z^2}}{2z}\,dxdy =$$

$$= \frac{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}{z}\,dxdy = \frac{R}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}\,dxdy$$

$$\text{Mantelytan} = 2\iint_S 1\,dS = 2\iint_{x^2+y^2 \le R^2} \frac{R}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}\,dxdy =$$

$$= 2\int_0^{2\pi}\int_0^R \frac{R}{\sqrt{R^2-r^2}}\,r\,dr\,d\theta = 4\pi\int_0^R \frac{Rr}{\sqrt{R^2-r^2}}\,dr =$$

$$= \left[\begin{matrix} t = R^2 - r^2 & t_R = 0 \\ dt = -2r\,dr & t_0 = R^2 \end{matrix}\right] = 4\pi R\int_{R^2}^{0} -\frac{1}{2}t^{-1/2}\,dt =$$

$$= 4\pi R\left[-\frac{1}{2}\,\frac{t^{1/2}}{1/2}\right]_{R^2}^{0} = 4\pi R^2.$$

Ex Beräkna $\iint_S z\,dS$ då

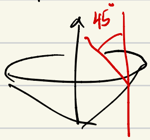
$$S = \{ z = \sqrt{x^2+y^2} \text{ och } 0 \le z \le 1 \}$$

$$\vec{r}(u,v) = (u, v, \sqrt{u^2+v^2})$$

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial u} = \left(1, 0, \frac{u}{\sqrt{u^2+v^2}}\right) \qquad \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} = \left(0, 1, \frac{v}{\sqrt{u^2+v^2}}\right)$$

$$\iint_S z\,dS = \iint_{u^2+v^2 \le 1} \sqrt{u^2+v^2} \cdot \sqrt{1 + \frac{u^2}{u^2+v^2} + \frac{v^2}{u^2+v^2}}\,du\,dv =$$

$$= \sqrt{2} \iint_{u^2+v^2 \le 1} \sqrt{u^2+v^2}\,du\,dv \underset{\text{polära}}{=} 2\pi\sqrt{2} \int_0^1 r^2\,dr = \frac{2\pi\sqrt{2}}{3}$$

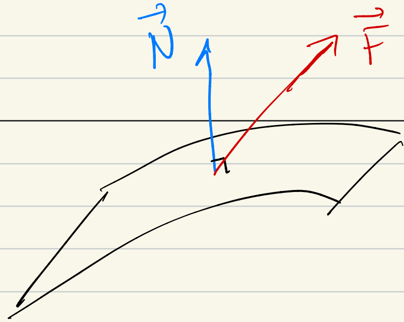
(Lägg märke till: 

$\cos 45° = \frac{1}{\sqrt{2}}$

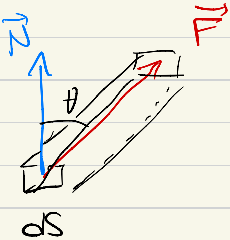
$\frac{1}{\cos 45°} = \sqrt{2}$)

Flödesintegraler

Vi tänker oss en vätska som flödar i $\mathbb{R}^3$ och vi vill beräknar hur mycket vätska som flyter genom en yta i $\mathbb{R}^3$.



$|\vec{N}| = 1$



Vi integrerar $\vec{F} \cdot \vec{N}$ över ytan.

$$\text{Flödesintegralen} = \iint_S \vec{F} \cdot \vec{N} \, dS$$

Hur hittar vi normalfältet $\vec{N}$?

Givet en parametrisering så har vi en kandidat

$$\hat{N} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}$$

$$\implies \vec{N} = \frac{\hat{N}}{|\hat{N}|}$$

$$\iint_S \vec{F} \cdot \vec{N} \, dS = \iint_S \vec{F} \cdot \frac{\hat{N}}{|\hat{N}|} |\hat{N}| \, du \, dv$$

$$= \iint_S \vec{F} \cdot \hat{N} \, du \, dv$$

Vi kan använda $S = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid G(x,y,z) = 0 \}$

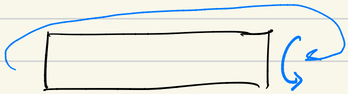
om vi känner till $G(x,y,z)$.

$$dS = \frac{|\nabla G|}{|G_z|}\, dx\,dy$$

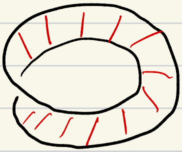
$$\vec{N} = \frac{\nabla G}{|\nabla G|} \quad \left(\text{eller} \quad -\frac{\nabla G}{|\nabla G|} \right)$$

$$\Longrightarrow \quad \vec{N}\, dS = \pm \frac{\nabla G}{G_z}\, dx\,dy$$

Tecknet beror på vilken av dessa normaler som pekar åt rätt håll. Notera att vissa ytor är "ensidiga". Det finns ytor som inte är orienterbara. Ett exempel är Möbiusbandet



Klistra efter en vridning



Ex Beräkna flödet av $F(x,y,z) = (z, 0, x^2)$ uppåt genom

$z = x^2 + y^2$ över $-1 \leq x \leq 1$ och $-1 \leq y \leq 1$.

Metod 1 $\quad \vec{r}(u,v) = (u, v, u^2+v^2)$

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial u} = (1, 0, 2u) \qquad \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} = (0, 1, 2v)$$

$$\vec{N} = \begin{vmatrix} \vec{e_1} & \vec{e_2} & \vec{e_3} \\ 1 & 0 & 2u \\ 0 & 1 & 2v \end{vmatrix} = (-2u, -2v, 1)$$

(pekar åt rätt håll)

$$\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} (z, 0, x^2) \cdot \vec{N} \, du\,dv =$$

$$= \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} (u^2+v^2, 0, u^2) \cdot (-2u, -2v, 1) \, du\,dv =$$

$$= \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} -2u(u^2+v^2) + u^2 \, du\,dv =$$

$$= \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} -2u^3 - 2uv^2 + u^2 \, du\,dv =$$

$$= \int_{-1}^{1} \left[-\frac{2u^4}{4} - u^2v^2 + \frac{u^3}{3} \right]_{u=-1}^{u=1} dv =$$

$$= \int_{-1}^{1} \frac{2}{3} \, dv = \frac{4}{3}.$$

Metod 2

$$G(x,y,z) = x^2 + y^2 - z$$

$$\nabla G = (2x, 2y, -1) \qquad \frac{\nabla G}{G_z} = (-2x, -2y, 1)$$

pekar åt rätt håll.

$$\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} F \cdot \frac{\nabla G}{G_z}\, dxdy = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} -2x(x^2+y^2)+x^2\, dxdy$$

$$= \dots = 4/3.$$

Gradient, divergens och rotation.

Vi vet att gradient till $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ är

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\right)$$

Gradienten ger den riktning i vilken funktionen växer snabbast.

Vi introducerar nu en formell vektorvärd differentialoperator.

Nablaoperatorn $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right)$

Definition: $F: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ vektorfält

(en funktion) 1) $\operatorname{div} F = \nabla \cdot F = \frac{\partial F_1}{\partial x_1} + \frac{\partial F_2}{\partial x_2} + \dots + \frac{\partial F_n}{\partial x_n}$

(ett vektorfält) 2) $\boxed{n=3}$ $= \operatorname{Curl} F = \nabla \times F$

$$= \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix}$$

Funkar också i $\mathbb{R}^2$ på ett särskilt sätt och då en funktion

Ex $F(x,y,z) = (xy, y^2 - z^2, yz)$

$$\operatorname{div} F = \frac{\partial}{\partial x}(xy) + \frac{\partial}{\partial y}(y^2 - z^2) + \frac{\partial}{\partial z}(yz)$$

$$= y + 2y + y = 4y$$

$$\operatorname{Curl} F = \begin{vmatrix} \vec{e_1} & \vec{e_2} & \vec{e_3} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ xy & y^2 - z^2 & yz \end{vmatrix} =$$

$$= \left(\frac{\partial}{\partial y}(yz) - \frac{\partial}{\partial z}(y^2 - z^2), \frac{\partial}{\partial z}(xy) - \frac{\partial}{\partial x}(yz), \frac{\partial}{\partial x}(y^2 - z^2) - \frac{\partial}{\partial y}(xy) \right)$$

$$= (z - (-2z), 0, -x)$$