Ex $\quad F(x,y,z) = (xy, y^2 - z^2, yz)$

$$\operatorname{div} F = \frac{\partial}{\partial x}(xy) + \frac{\partial}{\partial y}(y^2 - z^2) + \frac{\partial}{\partial z}(yz)$$

$$= y + 2y + y = 4y$$

$$\operatorname{Curl} F = \begin{vmatrix} \vec{e_1} & \vec{e_2} & \vec{e_3} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ xy & y^2 - z^2 & yz \end{vmatrix} =$$

$$= \left(\frac{\partial}{\partial y}(yz) - \frac{\partial}{\partial z}(y^2 - z^2), \frac{\partial}{\partial z}(xy) - \frac{\partial}{\partial x}(yz), \frac{\partial}{\partial x}(y^2 - z^2) - \frac{\partial}{\partial y}(xy) \right)$$

$$= (z - (-2z), 0, -x) = (3z, 0, -x)$$

<u>Tolkning av divergens</u>

Låt $\vec{F}$ vara ett glatt vektorfält och $\vec{N}$ vara enhetsnormalfältet utåt till S_ε, sfären med radie ε och centrum P.

Då gäller

$$\operatorname{div} \vec{F}(P) = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \frac{3}{4\pi\varepsilon^3} \oiint_{S_\varepsilon} \vec{F} \cdot \vec{N} \, dS$$

$1/$volymen av S_ε

"<u>Bevis</u>": Låt $P = \vec{0}$. Då gäller $\vec{N} = \frac{1}{\varepsilon}(x,y,z)$

Vi Taylorutvecklar (F_1, F_2, F_3) kring $\vec{0}$.

$$\vec{F}(x,y,z) = \overbrace{\vec{F}(0,0,0)}^{\vec{F}_0} + \overbrace{\left(\frac{\partial F_1}{\partial x}, \frac{\partial F_2}{\partial x}, \frac{\partial F_3}{\partial x}\right)}^{\vec{F}_{x0}} x +$$

$$+ \underbrace{\left(\frac{\partial F_1}{\partial y}, \frac{\partial F_2}{\partial y}, \frac{\partial F_3}{\partial y}\right)}_{\vec{F}_{y0}} y + \underbrace{\left(\frac{\partial F_1}{\partial z}, \frac{\partial F_2}{\partial z}, \frac{\partial F_3}{\partial z}\right)}_{\vec{F}_{z0}} z + \text{termer av högre ordning.}$$

$$\begin{aligned}\vec{F}\cdot\vec{N} = \frac{1}{\varepsilon}\Big(\vec{F}_0 \cdot (x,y,z) &+ \vec{F}_{x0}\, x^2 \cdot \vec{e}_1 + \vec{F}_{x0}\, xy \cdot \vec{e}_2 + \vec{F}_{x0}\, xz \cdot \vec{e}_3 + \\ &+ \vec{F}_{y0}\, yx \cdot \vec{e}_1 + \vec{F}_{y0}\, y^2 \cdot \vec{e}_2 + \vec{F}_{y0}\, yz \cdot \vec{e}_3 + \\ &+ \vec{F}_{z0}\, zx \cdot \vec{e}_1 + \vec{F}_{z0}\, zy \cdot \vec{e}_2 + \vec{F}_{z0}\, z^2 \cdot \vec{e}_3 \\ &+ \text{termer av högre ordning}\end{aligned}$$

Integrera termvis

$$\oiint_{S_\varepsilon} x\, dS = \oiint_{S_\varepsilon} y\, dS = \oiint_{S_\varepsilon} z\, dS = 0$$

Också

$$\oiint_{S_\varepsilon} xy\, dS = \oiint_{S_\varepsilon} yz\, dS = \oiint_{S_\varepsilon} xz\, dS = 0$$

Notera

$$\oiint_{S_\varepsilon} x^2\,dS = \oiint_{S_\varepsilon} y^2\,dS = \oiint_{S_\varepsilon} z^2\,dS =$$

$$= \frac{1}{3}\oiint_{S_\varepsilon} x^2+y^2+z^2\,dS = \frac{1}{3}\varepsilon^2 \cdot 4\pi\varepsilon^2 = \frac{4\pi}{3}\varepsilon^4$$

Termer av högre ordning innehåller ε^k, $k \geq 5$.

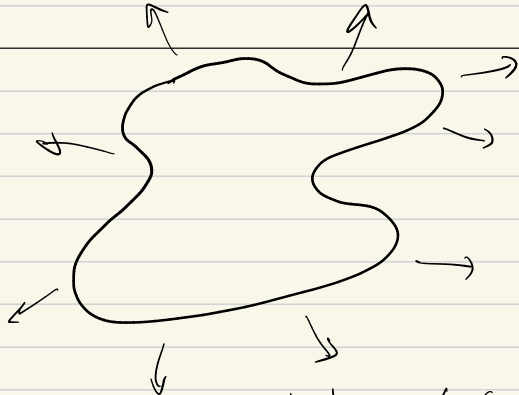
Alltså $\frac{3}{4\pi\varepsilon^3}\oiint_{S_\varepsilon} \vec{F}\cdot\vec{N}\,dS =$

$$= \frac{3}{4\pi\varepsilon^3}\,\frac{1}{\varepsilon}\left(\oiint_{S_\varepsilon} (\vec{F}_{x0}\cdot\vec{e_1})x^2 + (\vec{F}_{y0}\cdot\vec{e_2})y^2 + (\vec{F}_{z0}\cdot\vec{e_3})z^2\,dS + O(\varepsilon^5)\right)$$

Därför gäller

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} \frac{3}{4\pi\varepsilon^3}\oiint_{S_\varepsilon} \vec{F}\cdot\vec{N}\,dS = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z} = \operatorname{div}\vec{F}.$$

Med andra ord, man kan tänka på div F som "hur mycket vätska som skapas/förstörs i varje punkt"



Flödet $\overset{?}{=}$ "Summan av divergensen inuti kroppen"

Tolkning av rotation / Curl

Ex Studera vektorfältet

$$\vec{v} = (-\omega y, \omega x, 0)$$

Låt oss beräkna cirkulationen motsols längs cirkeln C_ε med radie ε i (x,y)-planet och centrum $(x_0, y_0, 0)$

$$C_\varepsilon(t) = (x_0 + \varepsilon\cos t, y_0 + \varepsilon \sin t, 0)$$

$$0 \le t \le 2\pi$$

$$\oint_{C_\varepsilon} \vec{v} \cdot d\vec{r} = \int_0^{2\pi} -\omega(y_0 + \varepsilon\sin t)(-\varepsilon \sin t) + \omega(x_0 + \varepsilon\cos t)(\varepsilon\cos t)\, dt$$

$$= \int_0^{2\pi} \omega\varepsilon(y_0 \sin t + x_0 \cos t) + \omega\varepsilon^2 dt = 2\pi\omega\varepsilon^2$$

Dessutom $\quad \operatorname{Curl} \vec{v} = \nabla \times \vec{v} = \left(\frac{\partial}{\partial x}(\omega x) - \frac{\partial}{\partial y}(-\omega y) \right) \vec{e_3} =$

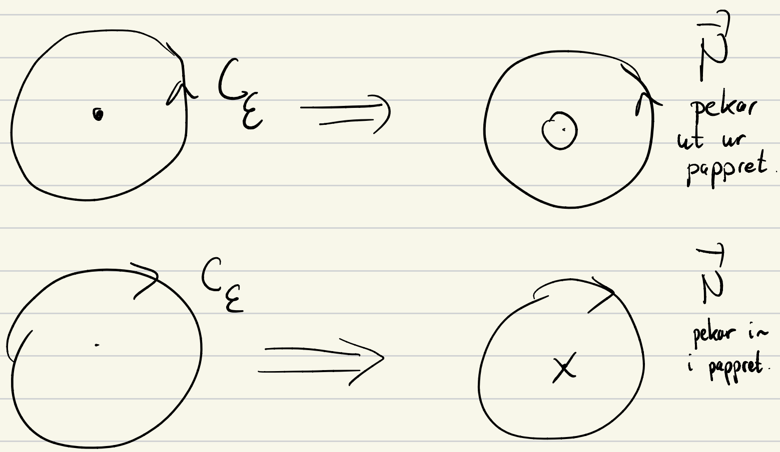
$= 2\omega \vec{e_3}$

Notera att $\displaystyle \oint_{C_\varepsilon} \vec{v} \cdot d\vec{r} = \text{Arean}(C_\varepsilon) \cdot \left(\operatorname{Curl} \vec{v} \cdot \vec{e_3} \right)$

<u>Sats</u>: Om $\vec{F}$ är ett glatt vektorfält i $\mathbb{R}^3$ och C_ε är en cirkel med ε och centrum P som begränsar en disk D_ε med enhetsnormal $\vec{N}$ (orienteringen induceras av C_ε) då gäller

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \frac{1}{\pi \varepsilon^2} \oint_{C_\varepsilon} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \vec{N} \cdot \operatorname{Curl} \vec{F}(P)$$

Inducerad orientering ?



Identiteter som involverar div, grad & Curl

ϕ, ψ funktioner, $\vec{F}, \vec{G}$ vektorfält

(a) $\nabla(\phi\psi) = \phi\nabla\psi + \psi\nabla\phi$

(b) $\operatorname{div}(\phi\vec{F}) = \nabla\cdot(\phi\vec{F}) = (\nabla\phi)\cdot\vec{F} + \phi(\nabla\cdot\vec{F})$

(c) $\nabla\times(\phi\vec{F}) = (\nabla\phi)\times\vec{F} + \phi(\nabla\times\vec{F})$

(d) $\nabla\cdot(\vec{F}\times\vec{G}) = (\nabla\times\vec{F})\cdot\vec{G} - \vec{F}\cdot(\nabla\times\vec{G})$

(e) $\nabla\times(\vec{F}\times\vec{G}) = (\nabla\cdot\vec{G})\vec{F} + (\vec{G}\cdot\nabla)\vec{F} - (\nabla\cdot\vec{F})\vec{G} - (\vec{F}\cdot\nabla)\vec{G}$

(f) $\nabla\cdot(\vec{F}\cdot\vec{G}) = \vec{F}\times(\nabla\times\vec{G}) + \vec{G}\times(\nabla\times\vec{F}) + (\vec{F}\cdot\nabla)\vec{G} + (\vec{G}\cdot\nabla)\vec{F}$

(g) $\nabla\cdot(\nabla\times\vec{F}) = 0$ "div Curl = 0"

(h) $\nabla\times(\nabla\phi) = 0$ "Curl grad = 0"

(i) $\nabla\times(\nabla\times\vec{F}) = \nabla(\nabla\cdot\vec{F}) - (\nabla\cdot\nabla)\vec{F}$

"∇^2" $= \Delta =$ Laplaceoperatorn

"Curl Curl = grad div − Laplace"