$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}$$

En funktion som uppfyller $\Delta f = 0$
kallas för harmonisk

Bevis: 9 (Gör resten på egen hand)

$$\nabla \times \vec{F} = \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}, \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}, \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right)$$

$$\nabla \cdot (\nabla \times \vec{F}) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) = 0$$

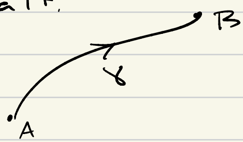
$\otimes$

Greens sats i planet $(\mathbb{R}^2)$

Detta kan ses som en högre dimensionell version av Integralkalkylens fundamentalsats

- Klassiska varianten $\displaystyle\int_a^b \frac{d}{dx} f(x)\, dx = f(b) - f(a)$

- Variant för kurvintegraler av konservativa vektorfält.



$$\int_\gamma \nabla\phi \cdot d\vec{r} = \phi(B) - \phi(A)$$

Greens sats

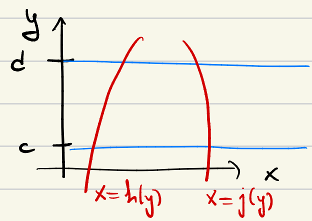
Låt R vara en reguljär, sluten, sammanhängande mängd i planet vars rand γ består av en eller flera styckvis glatta kurvor. Antag dessutom att γ är enkel och positivt orienterad med avseende på R. Om $\vec{F} = (F_1, F_2)$ är ett glatt vektorfält på R, så gäller

$$\oint_\gamma F_1\,dx + F_2\,dy = \iint_R \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right) dA$$

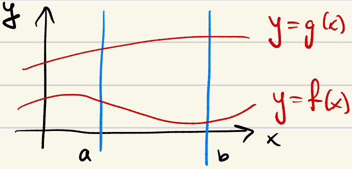
— * —

Reguljär? Man kan dela upp R i delar som är x-enkla och y-enkla

- x-enkel?

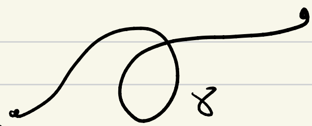


- y-enkel?



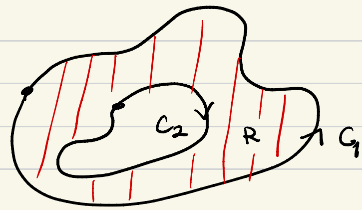
- γ enkel ?

  (inga självskärningar förutom i ändpunkter)

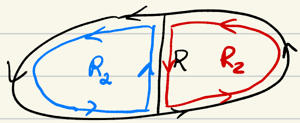


inte enkel

- Positivt orienterad ?



Bevis:



Om satsen gäller för R_1 & R_2 så gäller den för R.

Eftersom R är reguljär så räcker det att visa satsen för områden som är x-enkela och y-enkla.

Vi antar att

$$R = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b,\ f(x) \leq y \leq g(x) \} \quad \text{"y-enkel"}$$

$$= \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid c \leq y \leq d,\ h(y) \leq x \leq j(y) \} \quad \text{"x-enkel"}$$

$$\iint_R -\frac{\partial F_1}{\partial y}\, dx\,dy = -\int_a^b \left(\int_{f(x)}^{g(x)} \frac{\partial F_1}{\partial y}\, dy \right) dx =$$

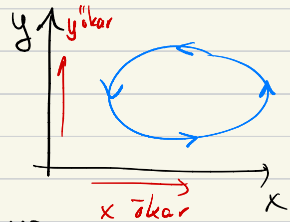
$$= \int_a^b -F_1(x, g(x)) + F_1(x, f(x))\, dx$$

Dessutom $\displaystyle\oint_{\partial R} F_1(x,y)\,dx = \int_a^b F_1(x,f(x)) - F_1(x,g(x))\,dx$

Alltså $\displaystyle\oint_{\partial R} F_1(x,y)\,dx = \iint_R -\frac{\partial F_1}{\partial y}\,dx\,dy$

På samma sätt $\displaystyle\oint_{\partial R} F_2(x,y)\,dy = \iint_R \frac{\partial F_2}{\partial x}\,dx\,dy$

Varför olika tecken?



$$\Longrightarrow \oint_\gamma F_1\,dx + F_2\,dy = \iint_R \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right) dA. \quad \otimes$$

$\gamma = \partial R$

Ex Arean begränsad av en enkel sluten kurva γ.
Försök hitta ett vektorfält (F_1,F_2) så att

$$\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} = 1$$

$$\text{Arean} = \iint_R 1\,dA = \oint_\gamma x\,dy = \oint_\gamma -y\,dx = \frac{1}{2}\oint_\gamma x\,dy - y\,dx$$

Arean av en disk med radie R.

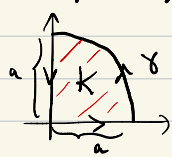
$$\gamma(t) = (R\cos t, R\sin t) \quad , 0 \le t \le 2\pi$$

$$\text{Arean} = \oint_\gamma x\, dy = \int_0^{2\pi} R\cos t \cdot R\cos t\, dt = R^2 \int_0^{2\pi} \cos^2 t\, dt =$$

$$= R^2 \int_0^{2\pi} \frac{1+\cos 2t}{2}\, dt = \pi R^2.$$

Ex

Beräkna $I = \oint_\gamma (x-y^3)\,dx + (y^3+x^3)\,dy$ då γ är den positivt orienterade randkurvan till kvartsdisken $K = \{ 0 \le x^2+y^2 \le a^2,\ x \ge 0,\ y \ge 0 \}$



$$\vec{F} = (x - y^3, y^3 + x^3)$$

$$I = \iint_K \frac{\partial}{\partial x}(y^3+x^3) - \frac{\partial}{\partial y}(x-y^3)\, dA = \iint_K 3x^2 + 3y^2\, dA =$$

$$= \int_0^{\pi/2}\int_0^a 3r^2 \cdot r\, dr\, d\theta = \frac{3\pi}{2}\int_0^a r^3\, dr = \frac{3\pi a^4}{8}$$

Ex Låt γ vara en positivt orienterad enkel sluten kurva som begränsar ett reguljärt område R i planet. Antag också att γ inte passerar origo. Visa att

$$\oint_\gamma \frac{-y\,dx + x\,dy}{x^2+y^2} = \begin{cases} 0 & \text{om } (0,0) \notin R \\ 2\pi & \text{om } (0,0) \in R \end{cases}$$

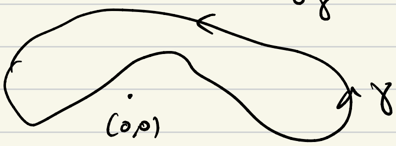
Lösning: Om $(x,y) \neq (0,0)$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{x^2+y^2}\right) = \frac{1}{x^2+y^2} - \frac{2x^2}{x^2+y^2} - \frac{2y^2}{x^2+y^2} + \frac{1}{x^2+y^2} = 0$$

Greens sats

$$\Longrightarrow \oint_\gamma \frac{-y\,dx + x\,dy}{x^2+y^2} = 0$$

om $(0,0) \notin R$

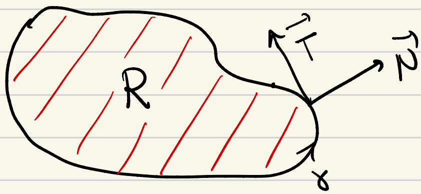


Antag att $(0,0) \in R$

Lägg en liten cirkel C_ε kring origo

$$\oint_\gamma \frac{-y\,dx + x\,dy}{x^2+y^2} = -\oint_{C_\varepsilon} \frac{-y\,dx + x\,dy}{x^2+y^2} \underset{\text{övning}}{=} -(-2\pi) = 2\pi$$

Divergenssatsen i planet ($\mathbb{R}^2$)



$\vec{T}$ = tangentialfält
$|\vec{T}|=1$

$\vec{N}$ = normalfält
$|\vec{N}|=1$

Notera att

$$\vec{T}=(T_1,T_2) \Longrightarrow \vec{N}=(T_2,-T_1)$$

Givet $\vec{F}=(F_1,F_2)$ definiera $\vec{G}=(-F_2,F_1)$

Vi ser $\vec{G}\cdot\vec{T} = -F_2T_1+F_1T_2 = \vec{F}\cdot\vec{N}$

Alltså $$\iint_R \operatorname{div}\vec{F}\,dA = \iint_R \frac{\partial F_1}{\partial x}+\frac{\partial F_2}{\partial y}\,dA =$$

$$= \iint_R \frac{\partial G_2}{\partial x}-\frac{\partial G_1}{\partial y}\,dA \underset{\text{Greens sats}}{\uparrow}{=} \oint_\gamma \vec{G}\cdot d\vec{r} =$$

$$= \oint_\gamma \vec{G}\cdot\vec{T}\,ds = \underbrace{\oint_\gamma \vec{F}\cdot\vec{N}\,dS}_{\text{"Flödet" ut ur } R.}$$