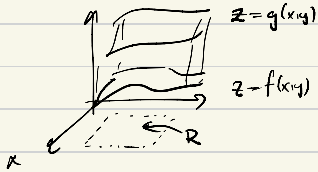
Gauss sats (Divergenssatsen i 3-d)

Låt D vara en reguljär mängd vars randyta S är en sluten orienterad yta med enhetsnormalfält $\vec{N}$ som pekar ut ur D. Om $\vec{F}$ är ett glatt vektorfält definierat på D så gäller

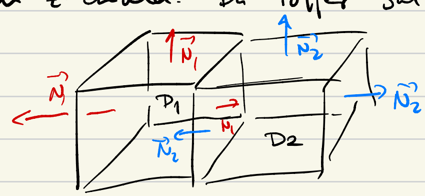
$$\iiint_D \operatorname{div} \vec{F}\, dV = \oiint_S \vec{F}\cdot\vec{N}\, dS.$$

Reguljär = x-enkel, y-enkel och z-enkel uppdelning.

z-enkel



"Bevis": Vi bevisar satsen för delar som är x-, y-, och z-enkla. Då följer satsen eftersom



$$\oiint_{S_1\cup S^*} \vec{F}\cdot\vec{N_1}\, dS + \oiint_{S_2\cup S^*} \vec{F}\cdot\vec{N_2}\, dS = \oiint_S \vec{F}\cdot\vec{N}\, dS$$

eftersom $\displaystyle\iint_{S^*} \vec{F}\cdot\vec{N_1}\, dS = -\iint_{S^*} \vec{F}\cdot\vec{N_2}\, dS$

Vi vet också $\displaystyle\iiint_{D_1} \operatorname{div}\vec{F}\, dV + \iiint_{D_2} \operatorname{div}\vec{F}\, dV = \iiint_D \operatorname{div}\vec{F}\, dV.$

Antag därför att D är x-enkel, y-enkel och z-enkel

$$z\text{-enkel} \Rightarrow D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x,y) \in R,\ f(x,y) \le z \le g(x,y)\}$$

Vi studerar en "tredjedel" av vektorfältet & divergensen.

$$\iiint_D \frac{\partial F_3}{\partial z}\, dV = \iint_R \left(\int_{f(x,y)}^{g(x,y)} \frac{\partial F_3}{\partial z}\, dz \right) dx\,dy =$$

$$= \iint_R F_3(x,y,g(x,y)) - F_3(x,y,f(x,y))\, dx\,dy$$

$$\oiint_S F_3(x,y,z)\vec{e_3} \cdot \vec{N}\, dS = \iint_{topp} + \iint_{botten} + \iint_{sidor}$$

$$\vec{e_3} \cdot \vec{N} = 0 \quad \text{på sidorna}$$

På toppen

$$\vec{N}\, dS = \left(-\frac{\partial g}{\partial x}\vec{e_1} - \frac{\partial g}{\partial y}\vec{e_2} + \vec{e_3} \right) dx\,dy$$

$$\iint_{topp} F_3\, \vec{e_3} \cdot \vec{N}\, dS = \iint_R F_3(x,y,g(x,y))\, dx\,dy$$

På botten $\vec{N}\, dS = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\vec{e_1} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{e_2} - \vec{e_3} \right) dx\,dy$

$$\iint_{botten} F_3\, \vec{e_3} \cdot N\, dS = -\iint_R F_3(x,y,f(x,y))\, dx\,dy$$

$$\longrightarrow \iiint_D \frac{\partial F_3}{\partial z}\, dV = \oiint_S F_3(x,y,z)\vec{e_3} \cdot \vec{N}\, dS$$

Upprepa och vi får

$$\iiint_D \operatorname{div} \vec{F}\, dV = \oiint_S \vec{F} \cdot \vec{N}\, dS$$

Ex $\vec{F}(x,y,z) = (bxy^2, bx^2y, (x^2+y^2)z^2)$

och låt S vara den slutna ytan som begränsar $x^2+y^2 \le a^2$ och $0 \le z \le b$. Beräkna

$$\oiint_S \vec{F} \cdot \vec{N} \, dS$$

Lösning: $D = \{ x^2+y^2 \le a^2 \ \& \ 0 \le z \le b \}$

$$\oiint_S \vec{F} \cdot \vec{N} \, dS = \iiint_D \operatorname{div} \vec{F} \, dS$$

$$= \iiint_D by^2 + bx^2 + 2z(x^2+y^2) \, dV =$$

$$= \iiint_D (2z+b)(x^2+y^2) \, dV \overset{\text{Cylindriska koord.}}{=}$$

$$= \int_0^b \int_0^{2\pi} \int_0^a (2z+b) r^2 r \, dr \, d\theta \, dz =$$

$$= \frac{2\pi a^4}{4} \int_0^b 2z+b \, dz = \frac{\pi a^4}{2} \left[z^2+bz \right]_0^b = \pi a^4 b^2.$$

Ex Beräkna $\oiint_S x^2+y^2 \, dS$ där S är sfären $x^2+y^2+z^2=a^2$

Lösning: Vi kan använda Gauss sats

$\vec{N} = \frac{1}{a}(x,y,z)$. Försök hitta $\vec{F}$ så att

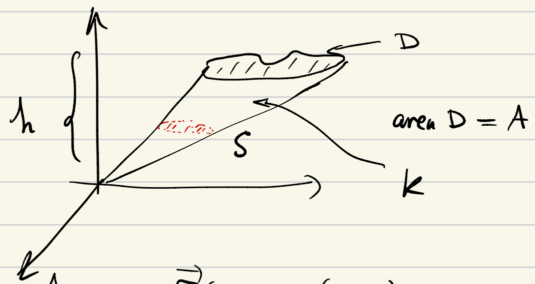
$$\vec{F} \cdot \vec{N} = x^2+y^2.$$

Välj $\vec{F} = (ax, ay, 0)$

$$\oiint_S x^2+y^2 \, dS = \oiint_S \vec{F}\cdot\vec{N} \, dS = \iiint_{x^2+y^2+z^2\le a^2} \operatorname{div}\vec{F} \, dV =$$

$$= 2a \iiint_{x^2+y^2+z^2\le a^2} 1 \, dV = 2a \frac{4\pi a^3}{3} = \frac{8\pi a^4}{3}.$$

Ex Beräkna volymen av konen K med basarea A och höjd h.



Lösning: Använd $\vec{F}(x,y,z) = (x,y,z)$

$$\operatorname{div}\vec{F} = 1+1+1 = 3$$

$\vec{F}\cdot\vec{N} = 0$ på S $\qquad$ $\vec{F}\cdot\vec{N} = \underset{h}{\overset{\parallel}{z}}$ på D

$$3V = \iiint_C \operatorname{div}\vec{F} \, dV = \iint_D \vec{F}\cdot\vec{N} \, dS$$

$$= h \iint_D 1 \, dA = hA$$

$$\Longrightarrow V = \frac{hA}{3}.$$

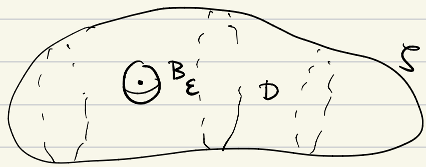
Ex Låt S vara randytan för godtycklig reguljär mängd D i $\mathbb{R}^3$ som har origo i sitt inre. Beräkna

$$\oiint \vec{F} \cdot \vec{N} \, dS \quad \text{då}$$

$\vec{r} = (x, y, z)$, $\vec{F}(\vec{r}) = \dfrac{m\vec{r}}{|\vec{r}|^3}$ och $\vec{N}$ är

enhetsnormalfältet som pekar utåt från S.

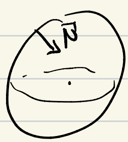
Lösning:



$B_\varepsilon = \{ |x| < \varepsilon \}$

Verifiera själva att $\operatorname{div} \vec{F} = 0$ i $D_\varepsilon = D \setminus B_\varepsilon$

$$\oiint_S \vec{F} \cdot \vec{N} \, dS = \iiint_{D_\varepsilon} \operatorname{div} \vec{F} \, dV - \oiint_{S_\varepsilon} \vec{F} \cdot \vec{N} \, dS$$



$$\oiint_{S_\varepsilon} \frac{m\vec{r}}{|\vec{r}|^3} \cdot \left(-\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|} \right) dS = \oiint_{S_\varepsilon} \frac{m}{|\vec{r}|^2} \, dS =$$

$$= -\frac{m}{\varepsilon^2} \oiint_{S_\varepsilon} 1 \, dS = -\frac{m}{\varepsilon^2} \cdot 4\pi\varepsilon^2$$

$$= -4\pi m$$

$$\longrightarrow \oiint_S \vec{F} \cdot \vec{N} \, dS = 4\pi m.$$