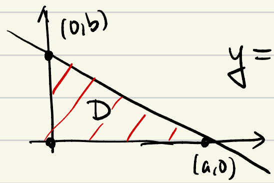
Demo-övningar 1

(1) Antag att $a>0$ och $b>0$. Beräkna

$$\iint_D x-3y \, dA$$

där $D$ är triangeln med hörn i $(0,0)$, $(a,0)$ och $(0,b)$.

Lösning:




$$y = -\frac{b}{a}x + b$$

$$\iint_D x-3y \, dA = \int_0^a \left( \int_0^{-\frac{b}{a}x+b} x-3y \, dy \right) dx = \int_0^a \left[ xy - \frac{3y^2}{2} \right]_{y=0}^{y=-\frac{b}{a}x+b} dx =$$

$$= \int_0^a x\left(-\frac{b}{a}x+b\right) - \frac{3}{2}\left(-\frac{b}{a}x+b\right)^2 dx =$$

$$= \int_0^a -\frac{3}{2}\frac{b^2}{a^2}x^2 - \frac{b}{a}x^2 + 3\frac{b^2}{a}x + bx - \frac{3}{2}b^2 \, dx =$$

$$= \left[ -\frac{3}{2}\frac{b^2}{a^2}\frac{x^3}{3} - \frac{b}{a}\frac{x^3}{3} + 3\frac{b^2}{a}\frac{x^2}{2} + b\frac{x^2}{2} - \frac{3}{2}b^2x \right]_{x=0}^{x=a} =$$

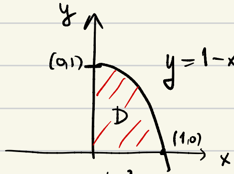
$$= -\frac{1}{2}b^2a - \frac{1}{3}ba^2 + \frac{3}{2}b^2a + \frac{1}{2}ba^2 - \frac{3}{2}b^2a =$$

$$= \left(-\frac{1}{2} + \frac{3}{2} - \frac{3}{2}\right)b^2a + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right)ba^2 =$$

$$= -\frac{1}{2}b^2a + \frac{1}{6}ba^2 = \frac{ab}{6}(a-3b)$$

(2) Beräkna $\iint_D \frac{x}{1+y}\,dA$ där $D$ är det begränsade området i den första kvadranten som begränsas av koordinataxlarna och kurvan $y=1-x^2$

<u>Lösning</u>:




$$\iint_D \frac{x}{1+y}\,dA = \int_0^1 dx \int_0^{1-x^2} \frac{x}{1+y}\,dy = \int_0^1 dx \left[ x \ln|1+y| \right]_{y=0}^{y=1-x^2} =$$

$$= \int_0^1 x \ln|2-x^2|\,dx = \int_0^1 x \ln(2-x^2)\,dx =$$

$(2-x^2 \geq 0$ då $0 \leq x \leq 1)$

$$= \left\lceil \begin{array}{ll} t = 2-x^2 & t_1 = 2-1 = 1 \\ dt = -2x\,dx & t_0 = 2 \end{array} \right\rfloor = \frac{-1}{2}\int_2^1 \ln t\,dt =$$

$$= \frac{1}{2}\int_1^2 \ln t\,dt = (*)$$

$$\left\lceil \int 1 \cdot \ln t\,dt = t\ln t - \int t \cdot \frac{1}{t}\,dt = t\ln t - t + C \right\rfloor$$

$$(*) = \frac{1}{2}\left[ t\ln t - t \right]_1^2 = \frac{1}{2}\left( 2\ln 2 - 2 - 2\ln 1 + 1 \right)$$

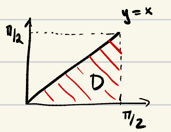
$$= (\ln 2) - \frac{1}{2}$$

③ Beräkna den itererade integralen

$$\int_0^{\pi/2} \left( \int_y^{\pi/2} \frac{\sin x}{x} \, dx \right) dy$$

och skissa integrationsområdet.

**Lösning:**




$$\int_0^{\pi/2} \left( \int_y^{\pi/2} \frac{\sin x}{x} \, dx \right) dy = \iint_D \frac{\sin x}{x} \, dA =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left( \int_0^x \frac{\sin x}{x} \, dy \right) dx = \int_0^{\pi/2} \left[ \frac{\sin x}{x} y \right]_{y=0}^{y=x} dx =$$

$$= \int_0^{\pi/2} \sin x \, dx = \Big[ -\cos x \Big]_0^{\pi/2} = 1$$

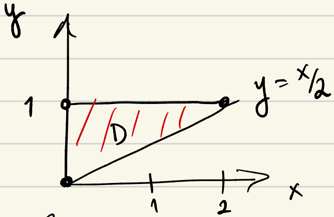
Inlämningsuppgift 1

(1) Beräkna

$$\iint_D x \, dA$$

där $D$ är triangeln med hörn i $(0,0)$, $(2,1)$ och $(0,1)$.

Lösning:

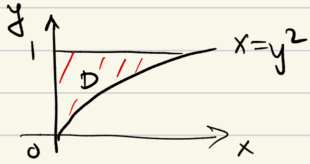



$$\iint_D x \, dA = \int_0^2 dx \int_{x/2}^{1} x \, dy = \int_0^2 \Big[ xy \Big]_{y=x/2}^{y=1} dx =$$

$$= \int_0^2 x - \frac{x^2}{2} \, dx = \left[ \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} \right]_0^2 = 2 - \frac{8}{6} = \frac{2}{3}$$

(2) Beräkna volymen hos kroppen som ligger under $z = 1 - x^2 + y$ och över området i planet som ges av olikheterna $0 \leq y \leq 1$ och $0 \leq x \leq y^2$.

Lösning:




Lägg märke till att $1 - x^2 + y \geq 0$ då $(x,y) \in D$.

Volymen $= \iint_D 1-x^2+y \, dA = \int_0^1 dy \int_0^{y^2} 1-x^2+y \, dx =$

$= \int_0^1 \left[ x - \frac{x^3}{3} + yx \right]_{x=0}^{x=y^2} dy = \int_0^1 y^2 - \frac{y^6}{3} + y^3 \, dy =$

$= \left[ \frac{y^3}{3} - \frac{y^7}{21} + \frac{y^4}{4} \right]_0^1 = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{21} =$

$= \frac{28}{84} + \frac{21}{84} - \frac{4}{84} = \frac{45}{84}$

Svar: Volymen är $\frac{45}{84}$ volymsenheter.

3 Låt $a>0$. Beräkna

$$\iint_D x^2+y^2 \, dA$$

där D är disken $x^2+y^2 \leq 2xa$.

Lösning: $x^2+y^2 \leq 2xa \iff x^2-2xa+y^2 \leq 0 \iff$

$\iff (x-a)^2+y^2-a^2 \leq 0 \iff (x-a)^2+y^2 \leq a^2$

Alltså D är disken med centrum $(a,0)$ och radie $a$.

Sätt $\begin{cases} u = x-a \\ v = y \end{cases}$. Vi ser att $\boxed{dudv = dxdy}$

I dessa variabler är D $u^2+v^2 \leq a^2$

$u = x-a$ ; $v = y$

Vi får $\iint_D x^2+y^2\,dxdy = \iint_D (u+a)^2+v^2\,dudv =$

$= \iint_D u^2+v^2+2au+a^2\,dudv = (*)$

Introducera polär koordinater $\begin{cases} u = r\cos\theta \\ v = r\sin\theta \end{cases}$

$$(*) = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^a \left(r^2+2ar\cos\theta+a^2\right) r\,dr =$$

$$= \int_0^{2\pi} \left[\frac{r^4}{4} + \frac{2ar^3}{3}\cos\theta + \frac{a^2r^2}{2}\right]_0^a d\theta =$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{a^4}{4} + \frac{2a^4}{3}\cos\theta + \frac{a^4}{2}\,d\theta = 2\pi a^4\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\right) = \frac{3\pi a^4}{2}.$$

(4) Låt $a>0, b>0$ och

$$D = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \le 1 \right\}$$

Beräkna $\displaystyle\iint_D \sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}\,dA.$

Lösning: Introducera $u = \frac{x}{a}$ och $v = \frac{y}{b}$.

Då gäller $D = \{ (u,v) \in \mathbb{R}^2 \mid u^2+v^2 \le 1 \}$ och

$dx\,dy = ab\,du\,dv.$

Därför

$$\iint_D \sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}\,dxdy = ab\iint_D \sqrt{1-u^2-v^2}\,dudv = (*)$$

Inför polära koordinater $u = r\cos\theta$ ; $v = r\sin\theta$.

$$(*) = ab\int_0^{2\pi}\int_0^1 r\sqrt{1-r^2}\,dr\,d\theta = 2\pi ab\int_0^1 r\sqrt{1-r^2}\,dr$$

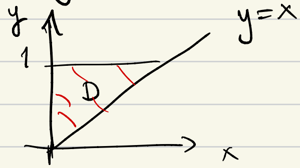
$$= \left[\begin{array}{ll} t = 1-r^2 & t_1 = 1-1^2 = 0 \\ dt = -2r\,dr & t_0 = 1-0^2 = 1 \end{array}\right] = -\pi ab\int_1^0 t^{1/2}\,dt =$$

$$= \pi ab\int_0^1 t^{1/2}\,dt = \pi ab\left[\frac{t^{3/2}}{3/2}\right]_0^1 = \frac{2\pi ab}{3}.$$

# Hemtal 1

① Beräkna volymen av kroppen som ligger under $z = 1 - x^2$ och över det område i planet som definieras av olikheterna $0 \le y \le 1$ och $0 \le x \le y$.

Lösning:




Notera att $z = 1 - x^2 \ge 0$ då $(x,y) \in D$

$$\text{Volymen} = \iint_D 1 - x^2 \, dA = \int_0^1 dy \int_0^y 1 - x^2 \, dx =$$

$$= \int_0^1 \left[ x - \frac{x^3}{3} \right]_{x=0}^{x=y} dy = \int_0^1 y - \frac{y^3}{3} \, dy =$$

$$= \left[ \frac{y^2}{2} - \frac{y^4}{12} \right]_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{12} = \frac{5}{12}$$

Svar: Volymen är $\frac{5}{12}$ volymsenheter.

② Beräkna $\int_3^4 \int_1^2 \frac{1}{(x+y)^2} \, dy \, dx$.

Lösning:

$$\int_3^4 dx \int_1^2 \frac{1}{(x+y)^2} \, dy = \int_3^4 \left[ -(x+y)^{-1} \right]_{y=1}^{y=2} dx =$$

$$= \int_3^4 \frac{1}{1+x} - \frac{1}{2+x} \, dx = \left[ \ln|1+x| - \ln|2+x| \right]_3^4 =$$

$$= \ln 5 - \ln 6 - (\ln 4 - \ln 5) =$$

$$= \ln 25 - \ln 24 = \ln \frac{25}{24}.$$

③ Ange ekvationerna för de kurvor som begränsar integrationsområdet för

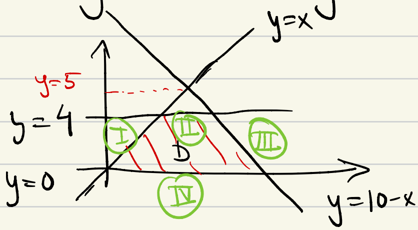
$$\int_0^4 \int_y^{10-y} f(x,y)\, dx\, dy .$$

Skissa integrationsområdet.

<u>Lösning</u>: Vi ser att integrationsområdet är definierat av olikheterna

$0 \leq y \leq 4$ och $y \leq x \leq 10-y$

Alltså




Det är 4 kurvor som begränsar D nämligen

Ⅰ $y=x$, Ⅱ $y=4$, Ⅲ $y=10-x$ och

Ⅳ $y=0$.