Hemtal 2

① Låt $F(x,y) = (e^x, e^{-x})$. Bestäm integralkurvorna till vektorfältet.

Lösning: Studera $\dfrac{dx}{e^x} = \dfrac{dy}{e^{-x}} \iff \displaystyle\int \frac{dx}{e^{2x}} = \int dy$

Vi får $-\frac{1}{2}e^{-2x} + C = y$

och därför är integralkurvorna
$y = C - \frac{1}{2}e^{-2x}$ för $C \in \mathbb{R}$.

② Låt $F(x,y) = (2x-2y, 2y-2x)$. Bevisa att F är ett konservativt vektorfält genom att konstruera en potentialfunktion. Bestäm ekuipotentialkurvor samt integralkurvor för F.

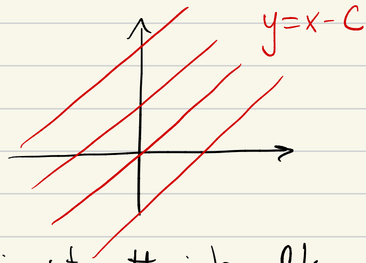
Lösning: $\dfrac{\partial\phi}{\partial x} = 2x - 2y \implies \phi(x,y) = x^2 - 2xy + \alpha(y)$

$\dfrac{\partial\phi}{\partial y} = -2x + \alpha'(y) \implies \alpha'(y) = 2y$

$\implies \alpha(y) = y^2 + C$

$\implies \phi(x,y) = x^2 - 2xy + y^2 = (x-y)^2$
är en potentialfunktion

Vi ser att ekvipotentialkurvorna är $x-y=C$ för $C \in \mathbb{R}$



Eftersom vi vet att integralkurvorna är ortogonala trajektorier till ekvipotentialkurvorna så vi gissar att $y=-x+D$ är integralkurvor. Vi noterar att $F(x,y)=(2x-2y)(1,-1)$ faktiskt är tangentiell till $y=-x+D$ (förutom då $x=y$)

③ Låt $F(x,y)=(x, 1/y)$. Var är vektorfältet definierat? Bestäm integralkurvorna till F.

Lösning: Vektorfältet är definierat då $y \neq 0$ (alltså utanför x-axeln)

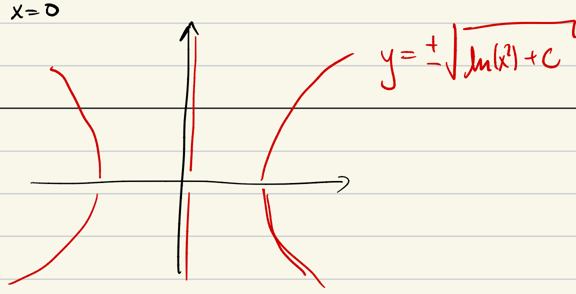
Studera $\int \frac{dx}{x} = \int y\,dy$

$$\Rightarrow \ln|x| = \frac{y^2}{2} - C$$

$$y^2 = 2\ln|x| + C = C + \ln(x^2)$$

$$y = \pm\sqrt{\ln(x^2)+C} \quad \text{då} \quad \ln(x^2)+C>0$$

Då $x=0$ så är vektorfältet $F(0,y)=(0, 1/y)$ har integralkurvor $x=0$



Inlämningsuppgift 2

① Studera vektorfältet

$$F(x,y,z) = \frac{-C}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} (x,y,z)$$

där C är en positiv konstant. Detta vektorfält är definierat då $(x,y,z) \neq (0,0,0)$ och är konservativt. Bestäm en potentialfunktion till vektorfältet.

Lösning:

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = -\frac{Cx}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \phi(x,y,z) = \frac{C}{(x^2+y^2+z^2)^{1/2}} + \alpha(y,z)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \phi}{\partial y} = -\frac{Cy}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} + \frac{\partial \alpha}{\partial y}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \alpha}{\partial y} = 0 \Rightarrow \alpha(y,z) = \beta(z)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = -\frac{Cz}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} + \beta'(z) \Rightarrow \beta'(z) = 0$$

$$\Rightarrow \beta(z) = \text{konstant}$$

$$\Rightarrow \phi(x,y,z) = \frac{C}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \text{ är en potentialfunktion}$$

② Vektorfältet

$$F(x,y,z) = \left(\frac{2x}{z}, \frac{2y}{z}, -\frac{x^2+y^2}{z^2}\right) \text{ är definierat då } z \neq 0$$

och är konservativt. Bestäm en potentialfunktion och beskriv ekvipotentialytorna.

<u>Lösning</u>: $\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{2x}{z} \Rightarrow \phi(x,y,z) = \frac{x^2}{z} + \alpha(y,z)$

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{\partial \alpha}{\partial y} \Rightarrow \frac{\partial \alpha}{\partial y} = \frac{2y}{z} \Rightarrow \alpha(y,z) = \frac{y^2}{z} + \beta(z)$$

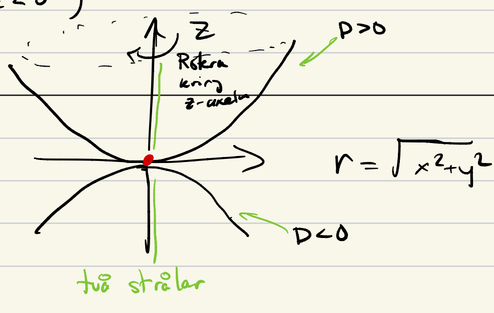
$$\Rightarrow \phi(x,y,z) = \frac{x^2+y^2}{z} + \beta(z)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \phi}{\partial z} = -\frac{x^2+y^2}{z^2} + \beta'(z) \Rightarrow \beta'(z) = 0$$

$$\Rightarrow \phi(x,y,z) = \frac{x^2+y^2}{z} + C \text{ är potentialfunktioner}$$

Ekvipotentialytor $\frac{x^2+y^2}{z} = D$

Då $D \neq 0$ så får vi $z = \frac{1}{D}(x^2+y^2)$ vilket är paraboloider. Då $D = 0$ så är $x^2+y^2 = 0$ (eftersom $z \neq 0$). Alltså $x = 0 = y$ och z valfri. I detta fall degenererar ytan till två strålar ($(0,0,z)$, $z > 0$ och $(0,0,z)$; $z < 0$)



③ Låt $a>0$ och

$$\gamma(t) = (a(t-\sin t), a(1-\cos t)), \quad 0 \le t \le 2\pi$$

Beräkna $\displaystyle\int_\gamma (2a-y)\,dx + x\,dy$

Lösning:

$$\int_\gamma (2a-y)\,dx + x\,dy = \left[\begin{array}{l} dx = a(1-\cos t)\,dt \\ dy = a\sin t\,dt \end{array}\right] =$$

$$= \int_0^{2\pi} (2a - a(1-\cos t))\,a(1-\cos t) + a(t-\sin t)\,a\sin t\,dt =$$

$$= a^2\int_0^{2\pi} (1+\cos t)(1-\cos t) + t\sin t - \sin^2 t\,dt =$$

$$= a^2\int_0^{2\pi} 1-\cos^2 t - \sin^2 t + t\sin t\,dt =$$

$$= a^2\int_0^{2\pi} t\sin t\,dt = a^2\left\{\left[-t\cos t\right]_0^{2\pi} + \int_0^{2\pi}\cos t\,dt\right\}$$

$$= a^2(-2\pi)\cos 2\pi = -2\pi a^2.$$

④

Beräkna $\displaystyle\int_\gamma \frac{y\,dx - x\,dy}{y^2}$

då γ är den del av $xy=2$ som börjar i $(1,2)$ och slutar i $(2,1)$.

Lösning:

Vi försöker konstruera en potentialfunktion för $F(x,y) = \left(\frac{1}{y}, -\frac{x}{y^2}\right)$

$$\frac{\partial\phi}{\partial x} = \frac{1}{y} \Rightarrow \phi(x,y) = \frac{x}{y} + \alpha(y)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = -\frac{x}{y^2} + \alpha'(y) \Longrightarrow \alpha'(y) = 0$$

$\Longrightarrow \alpha(y) = K \Longrightarrow \phi(x,y) = \frac{x}{y}$ är

en potentialfunktion för $F(x,y) = \left(\frac{1}{y}, -\frac{x}{y^2}\right)$

Alltså, $\displaystyle\int_\gamma \frac{y\,dx - x\,dy}{y^2} = \phi(2,1) - \phi(1,2) = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$.

Alternativ lösning:

Vi kan parametrisera γ som $\gamma(t) = \left(t, \frac{2}{t}\right)$ $1 \le t \le 2$. Då gäller $dx = dt$ och $dy = -\frac{2}{t^2}\,dt$

Alltså, $\displaystyle\int_\gamma \frac{y\,dx - x\,dy}{y^2} = \int_1^2 \frac{\frac{2}{t}\,dt - t\left(-\frac{2}{t^2}\right)dt}{(2/t)^2} =$

$\displaystyle = \int_1^2 t\,dt = \left[\frac{t^2}{2}\right]_1^2 = 2 - \frac{1}{2} = 3/2.$

Demoövningar 2

① Bestäm integralkurvorna till $F(x,y) = (y,x)$

Lösning: För integralkurvor gäller

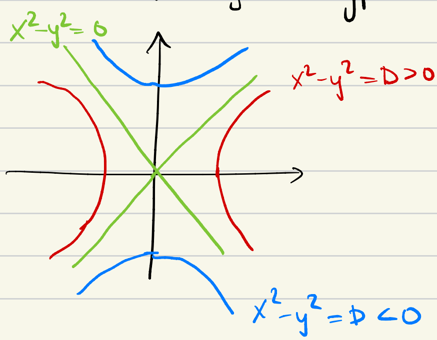
$$\frac{dx}{y} = \frac{dy}{x}$$

vilket ger $\int x\,dx = \int y\,dy$

Alltså $\frac{x^2}{2} = \frac{y^2}{2} + C$

$$\Rightarrow x^2 - y^2 = D \; (= 2C)$$

Detta är en familj av hyperbler



(2) Avgör om $F(x,y,z) = (y, x, z^2)$ är konservativt eller ej genom att konstruera en potentialfunktion eller att bevisa att en sådan inte kan existera.

Lösning:

Om F är konservativ så finns ϕ så att $\nabla\phi = F$
Vi försöker konstruera ϕ.

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = y \Rightarrow \phi(x,y,z) = xy + \alpha(y,z)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = x + \frac{\partial \alpha}{\partial y} \Longrightarrow \frac{\partial \alpha}{\partial y} = 0$$

$$\Longrightarrow \alpha(y,z) = \beta(z) \Rightarrow \phi(x,y,z) = xy + \beta(z)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \phi}{\partial z} = \beta'(z) \Rightarrow \beta'(z) = z^2 \Rightarrow \beta(z) = \frac{z^3}{3} + C$$

Alltså $\phi(x,y,z) = xy + \frac{z^3}{3} + C$ är potentialfunktioner för F och därför är F ett konservativt vektorfält.

(3) Definiera

$$F(x,y) = \left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{-y}{x^2+y^2} \right)$$

då $(x,y) \neq (0,0)$. Avgör om detta vektorfält är konservativt eller ej genom att konstruera en potentialfunktion eller visa att en sådan inte kan existera.

Lösning: Vi försöker hitta $\phi(x,y)$ sådan att $\nabla\phi = F$ då $(x,y) \neq (0,0)$

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{x}{x^2+y^2} \implies \phi(x,y) = \frac{1}{2}\ln(x^2+y^2) + \alpha(y)$$

Därför $\dfrac{\partial \phi}{\partial y} = \dfrac{y}{x^2+y^2} + \alpha'(y)$

Detta ger att $\alpha'(y) + \dfrac{y}{x^2+y^2} = -\dfrac{y}{x^2+y^2}$

Alltså krävs att $\alpha'(y) = -\dfrac{2y}{x^2+y^2}$ vilket

ger en motsägelse eftersom detta är en

funktion av x & y och inte bara y!

$F(x,y) = \left(\dfrac{x}{x^2+y^2}, \dfrac{-y}{x^2+y^2}\right)$ är inte konservativt.