Inlämningsuppgifter 3

(1) Beräkna $\oint_\gamma x\,dy$ längs ellipsen γ

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \qquad (a>0 \ \& \ b>0)$$

motsols.

Lösning: (Man kan använda Greens sats för denna men vi har inte gjort den på föreläsningen ännu)

Parametrisera $\gamma(t)=(a\cos t,\ b\sin t)$, $0\le t\le 2\pi$

$$\oint_\gamma x\,dy=\int_0^{2\pi} x(t)\frac{dy}{dt}\,dt=\int_0^{2\pi} a\cos t\cdot b\cos t\,dt$$
$$=\int_0^{2\pi} ab\cos^2 t\,dt = (*)$$

Eftersom $\cos 2t=\cos^2 t-\sin^2 t=2\cos^2 t-1$ så

$$(*) = ab\int_0^{2\pi}\frac{1+\cos 2t}{2}\,dt = ab\pi.$$

(2) Beräkna $\iint_S x\,dS$ då S är den del av

$z=x^2$ som ligger över rektangeln

$$\{(x,y,0)\in\mathbb{R}^3 \mid 0\le x\le 2,\ 0\le y\le 3\}$$

Lösning: Vi parametriserar

$$\vec{r}(u,v) = (u, v, u^2) \quad , \quad \begin{array}{l} 0 \le u \le 2 \\ 0 \le v \le 3 \end{array}$$

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial u} = (1, 0, 2u) \qquad \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} = (0,1,0)$$

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} = \begin{vmatrix} \vec{e_1} & \vec{e_2} & \vec{e_3} \\ 1 & 0 & 2u \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (-2u, 0, 1)$$

$$\left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \right| = \sqrt{1+4u^2}$$

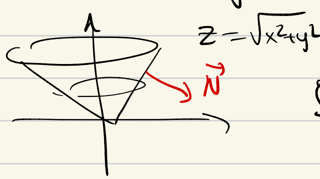
$$\iint_S x \, dS = \int_0^3 dv \int_0^2 u\sqrt{1+4u^2}\, du = 3\int_0^2 u\sqrt{1+4u^2}\, du =$$

$$= \left[\begin{array}{ll} t = 1+4u^2 & t_2 = 17 \\ dt = 8u\,du & t_0 = 1 \end{array} \right] = 3\int_1^{17} \frac{1}{8} t^{1/2}\, dt = \frac{3}{8}\left[\frac{t^{3/2}}{3/2} \right]_1^{17} =$$

$$= \frac{1}{4}\left(17\sqrt{17} - 1\right)$$

③ Beräkna flödet av $\vec{F}(x,y,z) = (xy, 0, -1)$ utåt (bort från z-axeln) genom konen $z^2 = x^2 + y^2$ då $0 \le z \le 1$.

Lösning:



$$S = \{ G(x,y,z) = x^2 + y^2 - z^2 = 0 \}$$

$$\nabla G = (2x, 2y, -2z)$$

$$\nabla G / G_z = \frac{(2x, 2y, -2z)}{-2z} = \left(-\frac{x}{z}, -\frac{y}{z}, 1\right)$$ pekar **mot** z-axeln

$$\iint_S \vec{F} \cdot \vec{N}\, dS = \iint_{x^2+y^2 \leq 1} (xy, 0, -1) \cdot \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}, -1\right) dxdy =$$

$$= \iint_{x^2+y^2 \leq 1} \frac{x^2 y}{\sqrt{x^2+y^2}} + 1 \, dxdy \overset{\text{polära}}{=} \int_0^{2\pi} \int_0^1 \left(\frac{r^3 \cos^2\theta \sin\theta}{r} + 1\right) r\, dr\, d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \left[\frac{r^4}{4} \cos^2\theta \sin\theta + \frac{r^2}{2}\right]_0^1 d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{\cos^2\theta \sin\theta}{4} + \frac{1}{2}\, d\theta =$$

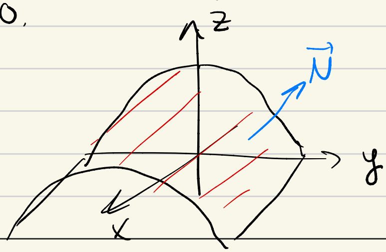
$$= \frac{1}{4} \int_0^{2\pi} \cos^2\theta \sin\theta \, d\theta + \pi = (*)$$

$$\ulcorner \int \cos^2\theta \sin\theta = \frac{\cos^3\theta}{3} + C \lrcorner$$

$$(*) = \frac{1}{4} \left[-\frac{\cos^3\theta}{3}\right]_0^{2\pi} + \pi = \pi$$

(4) Beräkna flödet av $\vec{F}(x,y,z) = (z^2, x, -3z)$ uppåt genom ytan skuren från den paraboliska cylindern $z = 4 - y^2$ av planen $x = 0$, $x = 1$ och $z = 0$.

Lösning:



$$\iint_S \vec{F} \cdot \vec{N} \, dS = ?$$

$$S = \{ G(x,y,z) = z + y^2 - 4 = 0 \ ; \ 0 \le x \le 1, -2 \le y \le 2 \}$$

$$\nabla G = (0, 2y, 1) \qquad \partial G / \partial z = 1$$

$$\iint_S \vec{F} \cdot \vec{N} \, dS = \int_0^1 \left(\int_{-2}^2 (z^2, x, -3z) \cdot (0, 2y, 1) \, dy \right) dx =$$

$$= \int_0^1 \left(\int_{-2}^2 2xy - 3z \, dy \right) dx \overset{z = 4 - y^2}{=}$$

$$= \int_0^1 \left(\int_{-2}^2 2xy - 3(4 - y^2) \, dy \right) dx =$$

$$= \int_0^1 \left[xy^2 - 12y + y^3 \right]_{-2}^{y=2} dx =$$

$$= \int_0^1 0 \cdot x - 48 + 16 \, dx = \int_0^1 -32 \, dx = -32.$$

Hemtal 3

(1) Beräkna $\int_\gamma x^2\,ds$ då γ är den räta linjen från origo till $(3,1,-2)$

Lösning: Vi parametriserar γ som $\gamma(t) = (3t, t, -2t)$, $0 \le t \le 1$.

$$\int_\gamma x^2\,ds = \int_0^1 x(t)^2 \left|\frac{d\gamma}{dt}\right| dt$$

Vi har $\frac{d\gamma}{dt} = (3,1,-2)$ och $\left|\frac{d\gamma}{dt}\right| = \sqrt{9+1+4} = \sqrt{14}$

$$\int_\gamma x^2\,ds = \int_0^1 9t^2 \cdot \sqrt{14}\,dt = \left[\,3t^3 \cdot \sqrt{14}\,\right]_0^1 = 3\sqrt{14}$$

(2) Låt $\vec{F}(x,y,z) = (y^2\cos x + z^3,\ 2y\sin x - 4,\ 3xz^2 + 2)$

Beräkna $\int_\gamma \vec{F}\cdot d\vec{r}$ när $\gamma(t) = (\arcsin t,\ 1-2t,\ 3t-1)$, $0 \le t \le 1$.

Lösning: Vi kollar om $\vec{F}$ är konservativt.

Om ϕ är så att $\nabla\phi = \vec{F}$ då

$$\frac{\partial\phi}{\partial x} = y^2\cos x + z^3 \implies \phi(x,y,z) = y^2\sin x + xz^3 + \alpha(y,z)$$

$$\implies \frac{\partial\phi}{\partial y} = 2y\sin x + \frac{\partial\alpha}{\partial y} \implies \frac{\partial\alpha}{\partial y} = -4 \implies \alpha(y,z) = -4y + \beta(z)$$

$$\rightarrow \phi(x,y,z) = y^2\sin x + xz^3 - 4y + \beta(z) \implies \frac{\partial\phi}{\partial z} = 3xz^2 + \beta'(z)$$

$$\implies \beta'(z) = 2 \implies \beta(z) = 2z + C$$

$$\implies \phi(x,y,z) = y^2\sin x + xz^3 - 4y + 2z + C$$

Notera att $\gamma(0) = (\arcsin 0,\ 1-2\cdot 0,\ 3\cdot 0-1) = (0,1,-1)$ och

$\gamma(1) = (\arcsin 1,\ 1-2\cdot 1,\ 3\cdot 1-1) = (\frac{\pi}{2}, -1, 2)$ och

därför
$$\int_\gamma \vec{F}\cdot d\vec{r} = \phi\left(\frac{\pi}{2},-1,2\right) - \phi(0,1,-1) = (-1)^2 \sin\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\cdot 2^3 - 4(-1) + 2\cdot 2$$
$$- \left(1^2\cdot \sin 0 + 0\cdot(-1)^3 - 4\cdot 1 + 2\cdot(-1)\right)$$
$$= 1 + 4\pi + 4 + 4 - (-4-2) = 15 + 4\pi$$

③ Beräkna mantelarean av den del av sfären som ges av

$$S = \{ (x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 = 2,\ x^2+y^2\le 1 \text{ och } z\ge 0 \}$$

Lösning: Mantelarean $= \iint_S 1\, dS = \iint_{x^2+y^2\le 1} \frac{|\nabla G|}{|\partial G/\partial z|}\, dx\,dy$ då $G(x,y,z) = x^2+y^2+z^2 = 2$

$$\nabla G = (2x, 2y, 2z) \qquad |\nabla G| = 2\sqrt{x^2+y^2+z^2} = 2\sqrt{2}$$

$|\partial G/\partial z| = 2z$ då $z \ge 0$

$$\text{Mantelarean} = \iint_{x^2+y^2\le 1} \frac{2\sqrt{2}}{2z}\, dx\,dy \overset{z=\sqrt{2-x^2-y^2}}{=}$$

$$= \iint_{x^2+y^2\le 1} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2-x^2-y^2}}\, dx\,dy = \sqrt{2}\int_0^{2\pi}\int_0^1 \frac{r}{\sqrt{2-r^2}}\, dr\,d\theta = \sqrt{2}\cdot 2\pi \int_0^1 \frac{r}{\sqrt{2-r^2}}\, dr =$$

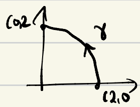
$$= \left[\begin{array}{ll} t = 2-r^2 & t_1 = 2-1^2 = 1 \\ dt = -2r\,dr & t_0 = 2-0^2 = 2 \end{array}\right] = \sqrt{2}\cdot 2\pi \left(-\frac{1}{2}\right)\int_2^1 t^{-1/2}\, dt =$$

$$= \pi\sqrt{2}\int_1^2 t^{-1/2}\, dt = \pi\sqrt{2}\left[\frac{t^{1/2}}{1/2}\right]_1^2 = 2\pi\sqrt{2}\,(\sqrt{2}-1) = 2\pi(2-\sqrt{2})$$

Demouppgifter 3

(1) Beräkna $\int_\gamma x+y\,ds$ då γ är den del av cirkeln $x^2+y^2=4$ som ligger i den första kvadranten från $(2,0)$ till $(0,2)$.

<u>Lösning</u>: Parametrisera γ



$$\gamma(t) = (2\cos t, 2\sin t)$$
$$0 \le t \le \pi/2$$

Vi får $\int_\gamma x+y\,ds = \int_0^{\pi/2} (x(t)+y(t)) \left|\frac{d\gamma}{dt}\right| dt$

Eftersom $\frac{d\gamma}{dt} = (-2\sin t, 2\cos t)$ och $\left|\frac{d\gamma}{dt}\right| = \sqrt{4\sin^2 t + 4\cos^2 t} = 2$

Så får vi

$$\int_\gamma x+y\,ds = \int_0^{\pi/2} (2\cos t + 2\sin t)\, 2\, dt = 4\left(\int_0^{\pi/2} \cos t\,dt + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t\,dt\right)$$
$$= 4(1+1) = 8.$$

(2) Beräkna $\int_\gamma y\,dx + z\,dy - x\,dz$ då γ är den räta linjen från $(0,0,0)$ till $(1,1,1)$

<u>Lösning</u>: Parametrisera γ

$$\gamma(t) = (t,t,t) \quad , \quad 0 \le t \le 1.$$

$$\int_\gamma y\,dx + z\,dy - x\,dz = \int_0^1 \left(y(t)\frac{dx}{dt} + z(t)\frac{dy}{dt} - x(t)\frac{dz}{dt}\right) dt =$$
$$= \int_0^1 (t+t-t)\,dt = \int_0^1 t\,dt = \left[\frac{t^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{2}.$$

(3) Beräkna cirkulationen av vektorfältet $F(x,y) = (x-y, x)$ längs enhetscirkeln $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$, $0 \le t \le 2\pi$.

<u>Lösning</u>: Vi räknar

$$\oint_\gamma \vec{F}\cdot\hat{T}\,ds = \int_\gamma (x-y)\,dx + x\,dy = \int_0^{2\pi}\left((\cos t - \sin t)\frac{dx}{dt} + \cos t\,\frac{dy}{dt}\right)dt =$$
$$= \int_0^{2\pi} (\cos t - \sin t)(-\sin t) + \cos t(\cos t)\,dt = \int_0^{2\pi} 1 - \cos t \sin t\,dt =$$
$$= 2\pi - \int_0^{2\pi} \frac{\sin 2t}{2}\,dt = 2\pi.$$