Hemtal 4

① Låt $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$. Visa att $\operatorname{Curl}(\nabla\phi) = \vec{0}$

Lösning: Först $\nabla\phi = \left(\frac{\partial\phi}{\partial x}, \frac{\partial\phi}{\partial y}, \frac{\partial\phi}{\partial z}\right)$.

Sedan $\operatorname{Curl}(\nabla\phi) = \begin{vmatrix} \vec{e_1} & \vec{e_2} & \vec{e_3} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ \frac{\partial\phi}{\partial x} & \frac{\partial\phi}{\partial y} & \frac{\partial\phi}{\partial z} \end{vmatrix} =$

$$= \left(\frac{\partial^2\phi}{\partial y\partial z} - \frac{\partial^2\phi}{\partial z\partial y}\right)\vec{e_1} + \left(\frac{\partial^2\phi}{\partial z\partial x} - \frac{\partial^2\phi}{\partial x\partial z}\right)\vec{e_2} + \left(\frac{\partial^2\phi}{\partial x\partial y} - \frac{\partial^2\phi}{\partial y\partial x}\right)\vec{e_3}$$

$$= \vec{0}$$

② Antag att f och g är harmoniska funktioner i $\mathbb{R}^n$.
Visa att

$$\operatorname{div}(f\nabla g - g\nabla f) = 0$$

Lösning: Vi vet att $\operatorname{div}(\phi\vec{F}) = (\nabla\phi)\cdot\vec{F} + \phi(\nabla\cdot\vec{F})$

Därför

$$\operatorname{div}(f\nabla g - g\nabla f) = \operatorname{div}(f\nabla g) - \operatorname{div}(g\nabla f)$$
$$= (\nabla f)\cdot(\nabla g) + f(\nabla\cdot\nabla g) - (\nabla g)\cdot(\nabla f) - g(\nabla\cdot\nabla f) =$$
$$= f(\Delta g) - g(\Delta f) = 0$$

eftersom $\Delta g = \Delta f = 0$ då f & g är harmoniska.

(3) Antag att $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ är en glatt funktion och låt $\vec{r} = (x, y, z)$. Skriv $r = |\vec{r}| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

Visa att

$$\operatorname{div}(f(r)\vec{r}) = r f'(r) + 3f(r)$$

Lösning: Eftersom $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ så gäller

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \frac{x}{r}, \quad \frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{r} \text{ och}$$

$$\frac{\partial r}{\partial z} = \frac{z}{r}$$

Därför

$$\operatorname{div}(f(r)\vec{r}) = \operatorname{div}((f(r)x, f(r)y, f(r)z))$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}(x f(r)) + \frac{\partial}{\partial y}(y f(r)) + \frac{\partial}{\partial z}(z f(r)) =$$

$$= f(r) + x\frac{\partial r}{\partial x} f'(r) + f(r) + y\frac{\partial r}{\partial y} f'(r) + f(r) + z\frac{\partial r}{\partial z} f'(r)$$

$$= 3f(r) + \frac{x^2}{r} f'(r) + \frac{y^2}{r} f'(r) + \frac{z^2}{r} f'(r) =$$

$$= 3f(r) + \frac{r^2}{r} f'(r) = r f'(r) + 3f(r)$$

⊗

Demoövningar 4

(1) Beräkna flödet av $\vec{F}(x,y,z) = \left(\frac{2x}{x^2+y^2}, \frac{2y}{x^2+y^2}, 1\right)$

nedåt genom ytan S som definieras av parametriseringen

$$\vec{r}(u,v) = (u\cos v, u\sin v, u^2)$$

$$0 \le u \le 1 \quad , \quad 0 \le v \le 2\pi.$$

Lösning: Vi vet

+ eller −

$$\iint_S \vec{F}\cdot\vec{N}\, dS = \int_0^{2\pi}\left(\int_0^1 F(\vec{r}(u,v)) \cdot \left(\frac{\partial\vec{r}}{\partial u}\times\frac{\partial\vec{r}}{\partial v}\right) du\right) dv$$

Vi bestämmer $\frac{\partial\vec{r}}{\partial u}\times\frac{\partial\vec{r}}{\partial v}$.

$$\frac{\partial\vec{r}}{\partial u} = (\cos v, \sin v, 2u) \quad \& \quad \frac{\partial\vec{r}}{\partial v} = (-u\sin v, u\cos v, 0)$$

$$\frac{\partial\vec{r}}{\partial u}\times\frac{\partial\vec{r}}{\partial v} = (-2u^2\cos v, -2u^2\sin v, u) \quad \text{(efter en räkning)}$$

Eftersom $u \ge 0$ så pekar denna uppåt (fel håll)

Välj $-\frac{\partial r}{\partial u}\times\frac{\partial\vec{r}}{\partial v}$!

$$\iint_S \vec{F}\cdot\vec{N}\, dS = \int_0^{2\pi}\left(\int_0^1 \left(\frac{2u\cos v}{u^2}, \frac{2u\sin v}{u^2}, 1\right)\cdot(2u^2\cos v, 2u^2\sin v, -u)\, du\right)dv$$

$$= \int_0^{2\pi}\left(\int_0^1 4u\cos^2 v + 4u\sin^2 v - u\, du\right) dv =$$

$$= \int_0^{2\pi}\left(\int_0^1 3u\, du\right) dv = 2\pi\int_0^1 3u\, du = 2\pi\frac{3}{2} = 3\pi.$$

(2) Beräkna flödet av $\vec{F}(x,y,z)=(4x,4y,2)$ nedåt genom den del av $z=x^2+y^2$ där $0\le z\le 1$.

Lösning: Vi använder

$$\iint_S \vec{F}\cdot\vec{N}\,dS=\iint_{x^2+y^2\le 1}\vec{F}\cdot\overset{+\text{ eller }-}{\left(\frac{\nabla G}{\partial G/\partial z}\right)}\,dx\,dy$$

där $G(x,y,z)=x^2+y^2-z\ \ (=0)$

$$\nabla G=(2x,2y,-1) \qquad \frac{\nabla G}{\partial G/\partial z}=(-2x,-2y,1)$$

Eftersom vi vill veta flödet nedåt så använder vi $-\frac{\nabla G}{\partial G/\partial z}=(2x,2y,-1)$

$$\iint_S \vec{F}\cdot\vec{N}\,dS=\iint_{x^2+y^2\le 1}(4x,4y,2)\cdot(2x,2y,-1)\,dx\,dy=$$

$$=\iint_{x^2+y^2\le 1}8x^2+8y^2-2\,dx\,dy\overset{\text{polära}}{=}\int_0^{2\pi}\int_0^1(8r^2-2)\,r\,dr\,d\theta=$$

$$=2\pi\int_0^1 8r^3-2r\,dr=2\pi\left[\frac{8r^4}{4}-r^2\right]_0^1=2\pi(2-1)$$

$$=2\pi.$$

(3) Låt $a>0$. Beräkna flödet av vektorfältet $\vec{F}(x,y,z)=(y,-x,1)$ genom den del av sfären $x^2+y^2+z^2=a^2$ som ligger i första oktanten bort från origo.

Lösning: Återigen gäller

$$\iint_S \vec{F}\cdot\vec{N}\,dS=\iint_{\substack{x^2+y^2\le a^2\\ x\ge 0,\,y\ge 0}}\vec{F}\cdot\pm\frac{\nabla G}{\partial G/\partial z}\,dx\,dy$$

då $G(x,y,z)=x^2+y^2+z^2=a^2$

$$\nabla G = (2x, 2y, 2z) \qquad \frac{\partial G}{\partial z} = 2z$$

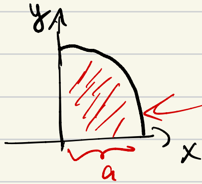
$$\frac{\nabla G}{\partial G/\partial z} = \left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}, 1\right)$$ pekar åt rätt håll.

$$\iint_S \vec{F}\cdot\vec{N}\,dS = \iint_{\substack{x^2+y^2\le a^2\\ x\ge 0,\, y\ge 0}} (y, -x, 1)\cdot\left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}, 1\right)\,dx\,dy =$$

$$= \iint_{\substack{x^2+y^2\le a^2\\ x\ge 0,\, y\ge 0}} 1\,dx\,dy = \text{Arean av } \{x^2+y^2\le a^2, x\ge 0, y\ge 0\}$$

$$= -\frac{\pi a^2}{4}$$

eftersom



Inlämningsuppgifter 4

(1) Bevisa att

$$\operatorname{Curl}(\operatorname{Curl}\vec{F}) = \operatorname{grad}(\operatorname{div}\vec{F}) - (\Delta F_1, \Delta F_2, \Delta F_3)$$

för godtyckligt glatt vektorfält $\vec{F} = (F_1, F_2, F_3)$

Lösning: Först $\operatorname{div}\vec{F} = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z}$ och

$$\operatorname{grad}(\operatorname{div}\vec{F}) = \left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z}\right), \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z}\right), \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z}\right)\right)$$

Alltså $\operatorname{grad}(\operatorname{div}\vec{F}) - (\Delta F_1, \Delta F_2, \Delta F_3) =$

$$= \left(\frac{\partial^2 F_2}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 F_3}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 F_1}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 F_1}{\partial z^2}, \frac{\partial^2 F_1}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 F_3}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 F_2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 F_2}{\partial z^2}, \frac{\partial^2 F_1}{\partial z \partial x} + \frac{\partial^2 F_2}{\partial z \partial y} - \frac{\partial^2 F_3}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 F_3}{\partial y^2}\right)$$

Dessutom $\operatorname{Curl} F = \begin{vmatrix} \vec{e_1} & \vec{e_2} & \vec{e_3} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix} =$

$$= \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}, \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}, \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right)$$

Vidare $\operatorname{Curl}(\operatorname{Curl}\vec{F}) =$

$$= \operatorname{Curl}\left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}, \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}, \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right) =$$

$$= \left(\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}\right), \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}\right) - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right),\right.$$

$$\left., \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}\right)\right) =$$

$$= \left(\frac{\partial^2 F_2}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 F_3}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 F_1}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 F_1}{\partial z^2}, \frac{\partial^2 F_3}{\partial z \partial y} + \frac{\partial^2 F_1}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 F_2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 F_2}{\partial z^2}, \frac{\partial^2 F_1}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 F_2}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 F_3}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 F_3}{\partial y^2}\right)$$

$$\Longrightarrow \operatorname{Curl}(\operatorname{Curl}\vec{F}) = \operatorname{grad}(\operatorname{div}\vec{F}) - (\Delta F_1, \Delta F_2, \Delta F_3)$$

(En räkning man vill göra högst en gång i livet! Det är en bra anledning att komma ihåg räkneregeln!)

② Bevisa att det inte finns ett vektorfält $\vec{F}$ sådant att

$$\operatorname{Curl}\vec{F} = (x, y, z)$$

Lösning: Vi vet att

$$\operatorname{div}(\operatorname{Curl}\vec{F}) = 0$$

Eftersom

$$\operatorname{div}(x, y, z) = \frac{\partial}{\partial x}x + \frac{\partial}{\partial y}y + \frac{\partial}{\partial z}z = 1 + 1 + 1 = 3 \neq 0$$

Så kan det inte finnas ett vektorfält $\vec{F}$ som uppfyller $\operatorname{Curl}\vec{F} = (x, y, z)$.

③ Beräkna $\oint_\gamma x^2\,dy$ där γ är cirkeln $(x-1)^2+y^2=1$ orienterad motsols.

Lösning:

Greens sats ger oss

$$\oint_\gamma x^2\,dy = \iint_{(x-1)^2+y^2\le 1} \frac{\partial}{\partial x}(x^2)\,dxdy = \iint_{(x-1)^2+y^2\le 1} 2x\,dxdy$$

Sätt $u=x-1$ och $v=y$

$$\oint_\gamma x^2 dy = \iint_{u^2+v^2\le 1} 2(u+1)\,dudv \overset{\text{polära}}{=} 2\int_0^{2\pi}\int_0^1 (r\cos\theta+1)\,r\,drd\theta =$$

$$\underset{\int_0^{2\pi}\cos\theta\,d\theta=0}{=} 4\pi\int_0^1 r\,dr = 2\pi.$$

④ Kurvan parametriserad enligt $\gamma(t)=(\cos^3 t, \sin^3 t)$, $0\le t\le 2\pi$, kallas för en asteroid. Beräkna arean av det område som begränsas av asteroiden.

Lösning: Vi vet att arean kan beräknas med hjälp av

$$\oint_\gamma x\,dy = \oint_\gamma -y\,dx = \frac{1}{2}\oint_\gamma -y\,dx + x\,dy$$

Därför är arean $= \frac{1}{2}\oint_\gamma -y\,dx + x\,dy = \left[\begin{array}{ll} x=\cos^3 t & dx=-3\sin t\cos^2 t\,dt \\ y=\sin^3 t & dy = 3\cos t\sin^2 t\,dt\end{array}\right] =$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} 3\sin^4 t\cos^2 t + 3\cos^4 t\sin^2 t\,dt =$$

$$= \frac{3}{2}\int_0^{2\pi}\sin^2\cos^2 t\,dt = \frac{3}{2}\int_0^{2\pi}(\sin t\cos t)^2 dt =$$

$$= \frac{3}{2}\int_0^{2\pi}\left(\frac{\sin 2t}{2}\right)^2 dt = \frac{3}{8}\int_0^{2\pi}\sin^2 2t\,dt =$$

$$= \frac{3}{2}\int_0^{2\pi}\frac{1-\cos 4t}{2}\,dt = \frac{3}{8}\cdot\frac{2\pi}{2} = \frac{3\pi}{8}.$$