ELEC-C1230 Säätötekniikka
11. laskuharjoitus
Vastaukset

1. ***a.***

Tehdään lukujonon muunnos suoraan perustuen määritelmään. Z-muunnoksen määritelmä on

$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f(kh) z^{-k} .$$

sama idea kuin Laplace-muunnoksen määritelmässä.

Tällöin saadaan lukujonon

$$y(kh) = 1, k = 0,1,2,3,..$$

muunnos.

$$Y(z) = \sum_{k=0}^{\infty} y(kh) z^{-k} = 1 + z^{-1} + z^{-2} + z^{-3} + \ldots$$

Nyt kun käytetään geometrisen summan kaavaa

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q}, \text{ jos } 0 < q < 1$$

Nyt saadaan

$$Y(z) = \sum_{k=0}^{\infty} y(kh) z^{-k} = 1 + z^{-1} + z^{-2} + z^{-3} + \ldots$$

$$= \frac{1}{1-\frac{1}{z}} = \frac{z}{z-1}$$

b)

Sijoitetaan lukujono suoraan Z-muunnoksen kaavaan. Tällöin saadaan

$$Y(z) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-ak} z^{-k} = 1 + e^{-a} z^{-1} + e^{-2a} z^{-2} + e^{-3a} z^{-3} + \ldots$$

$$= 1 + (e^a z)^{-1} + (e^a z)^{-2} + (e^a z)^{-3} + \ldots = \frac{1}{1 - e^{-a} z^{-1}} = \frac{z}{z - e^{-a}}$$

2.

Loppuarvoteoreema sanoo:

$\lim_{k \to \infty} y(kh) = \lim_{z \to 1} (1 - z^{-1}) Y(z)$, **jos** $(1 - z^{-1}) Y(z)$:lla ei ole yhtään napaa yksikköympyrällä tai sen ulkopuolella.

stabiilisuuskriteerit

vrt. loppuarvoteoreemaan jatkuva-aikaisessa systeemissä

$$\left(1-z^{-1}\right)Y\left(z\right)=\left(1-z^{-1}\right)\frac{0,792z^2}{\left(z-1\right)\left(z^2-0,416z+0,208\right)}$$

$$=\frac{0,792z}{\left(z^2-0,416z+0,208\right)}$$

Ja katsotaan navat:

$$z^2-0,416z+0,208=0$$

$$z=0,208\pm 0,406i$$

Tämä kompleksinen napapari on noin 0,46 yksikön etäisyydellä origosta

⇨ se on yksikköympyrän sisäpuolella, joten loppuarvoteoreemaa voidaan käyttää.

$$\lim_{k\to\infty} y\left(kh\right)=\lim_{z\to 1}\left(1-z^{-1}\right)Y\left(z\right)=\lim_{z\to 1}\frac{0,792z}{\left(z^2-0,416z+0,208\right)}=\frac{0,792}{1-0,416+0,208}=\frac{0,792}{0,792}=1$$

Huom. $1-z^{-1}=\dfrac{z-1}{z}$. Koska raja-arvossa z lähenee ykköstä, voidaan teoreeman lauseke ekvivalentisti asettaa myös muotoon

$$\lim_{k\to\infty} y\left(kh\right)=\lim_{z\to 1}\left[\left(z-1\right)Y\left(z\right)\right]$$

3.

Kun katsotaan Z-muunnostaulukoita, huomataan että kaikissa muunnoksissa on osoittajassa z. Jaetaan tämän takia puolittain z:lla

$$\frac{Y(z)}{z}=\frac{\left(1-e^{-ah}\right)}{(z-1)\left(z-e^{-ah}\right)}=\frac{A}{z-1}+\frac{B}{z-e^{-ah}}$$

Lasketaan A:n ja B:n arvot Heavisiden menetelmällä (myös perinteinen menettely *A*:n ja *B*:n määräämiseksi kertomalla nimittäjät samannimisiksi ja asettamalla osoittajat identtisiksi käy tietenkin).

$$A=\lim_{z-1}(z-1)\frac{\left(1-e^{-ah}\right)}{(z-1)\left(z-e^{-ah}\right)}=1$$

$$B=\lim_{z-e^{-ah}}\left(z-e^{-ah}\right)\frac{\left(1-e^{-ah}\right)}{(z-1)\left(z-e^{-ah}\right)}=-1$$

Tällöin

$$\frac{Y(z)}{z}=\frac{1}{z-1}-\frac{1}{z-e^{-ah}}$$

$$\Rightarrow Y(z)=\frac{z}{z-1}-\frac{z}{z-e^{-ah}}$$

Nyt tämä voidaan käänteismuuntaa suoraan taulukoiden avulla.

$$y(kh) = 1 - e^{-akh}$$

4.*

Yhtälö (*u* on yksikköaskel):

$$y(k + 2) - 1.5y(k + 1) + 0.5y(k) = u(k + 1),\ y(0) = 0.5 \text{ ja } y(-1) = 1.$$

z-muunnetaan yllä oleva yhtälö:

$$z^2Y(z) - z^2y(0) - zy(1) - 1.5[zY(z) - zy(0)] + 0.5Y(z) = zU(z) - zu(0).$$

Aikatason alkuarvot tiedetään lukuunottamatta $y(1)$:tä, ratkaistaan se differessiyhtälöstä:

$$y(1)=1.5y(0)-0.5y(-1)+u(0)=0.75-0.5+1=1.25.$$

Sijoitetaan alkuarvotiedot *z*-muunnettuun muotoon:

$$\Rightarrow [z^2 - 1.5z + 0.5]Y(z) = 0.5z^2 + 1.25z - 0.75z + z\frac{z}{z-1} - z$$

$$\Rightarrow [(z - 1)(z - 0.5)]Y(z) = 0.5z^2 + 0.5z + \frac{z}{z-1}.$$

Ratkaistaan $Y(z)$:

$$Y(z) = \frac{0.5z^2 + 0.5z + \frac{z}{z-1}}{(z-1)(z-0.5)} = \frac{(z-1)(0.5z^2+0.5z)+z}{(z-1)^2(z-0.5)} =$$

$$= \frac{0.5z^3+0.5z^2-0.5z^2-0.5z+z}{(z-1)^2(z-0.5)} = \frac{0.5z(z^2+1)}{(z-1)^2(z-0.5)}$$

Jaetaan osamurtohajotelmalla tekijöihin:

$$\frac{0.5z(z^2+1)}{(z-1)^2(z-0.5)} = z\left[\frac{A}{z-0.5} + \frac{B}{(z-1)^2} + \frac{C}{z-1}\right]$$

$$\Rightarrow A = 2.5,\ B = 2 \text{ ja } C = -2.$$

$$\Rightarrow Y(z) = \frac{2.5z}{z-0.5} + \frac{2z}{(z-1)^2} - \frac{2z}{z-1}.$$

Käänteismuunnetaan:

$$y(k) = 2.5 \cdot 0.5^k + 2k - 2 = 2(k - 1) + 2.5 \cdot 0.5^k.$$

Verifioi harjoituksen vuoksi, että alkuarvot täsmäävät ja että ratkaisu toteuttaa alkuperäisen differenssiyhtälön!