Aalto-universitetet
Björn Ivarsson

Demonstrationsuppgifter 5
Differential- och integralkalkyl 3, MS-A0309.
Räknas vid övningen fredag 5.4. Lösningarna gås igenom av assistenten.

(1) Låt γ vara den positivt orienterade randkurvan (alltså motsols) till en kvadrat i planet och låt $F(x, y) = (xy^2, x^2y + 2x)$. Visa att
$$\oint_\gamma F \cdot d\vec{r}$$
beror endast på arean av kvadraten och inte dess position.

(2) Låt $F(x, y) = (-\sin y, x \cos y)$ och låt γ vara randkurvan till $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq \pi/2, 0 \leq y \leq \pi/2\}$ orienterad motsols. Beräkna cirkulationen av F längs γ.

(3) Antag att
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0.$$
(Alltså f är harmonisk.) Visa att
$$\oint_\gamma \frac{\partial f}{\partial y}\, dx - \frac{\partial f}{\partial x}\, dy = 0$$
för varje glatt sluten enkel kurva γ som begränsar en reguljär sluten mängd i planet.