Aalto-universitetet
Björn Ivarsson

Inlämningsuppgift 5
Differential- och integralkalkyl 3, MS-A0309.
Inlämnas senast **torsdag 11.4.2024 23.59** via MyCourses.

(1) Låt $F = (xz, yz, 1)$ och
$$D = \left\{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 25, z \geq 3\right\}.$$
Beräkna flödet av F utåt över ∂D. (6p)

(2) Antag att $f(x, y, z)$ är harmonisk (alltså att
$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 0).$$
Antag att D är en reguljär sluten mängd $\mathbb{R}^3$ begränsad av en glatt sluten orienterbar yta $\mathcal{S}$ och att $\vec{N}$ är enhetsnormalfältet till $\mathcal{S}$ som pekar utåt. Visa att
$$\oiint_{\mathcal{S}} \nabla f \cdot \vec{N}\, dS = 0.$$
(6p)

(3) Låt $\mathcal{S}$ vara randytan till
$$D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq z^2, 0 \leq z \leq 1\}$$
och låt $\vec{N}$ vara enhetsnormalfältet till $\mathcal{S}$ som pekar utåt från D. Låt $F(x, y, z) = (x^2, y^2, z^2)$ och beräkna
$$\oiint_{\mathcal{S}} F \cdot \vec{N}\, dS.$$
(6p)

(4) Låt γ vara skärningskurvan till $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ och $x + y + z = 0$ orienterad motsols då man tittar ovanifrån längs z-axeln. Beräkna
$$\oint_{\gamma} (y + z)\, dx + (x + z)\, dy + (x + y)\, dz.$$
(6p)