Hemtal 5

(1) Beräkna flödet av $\vec{F}(x,y,z) = (x^2, xz, 3z)$ utåt genom sfären

$$x^2 + y^2 + z^2 = 4.$$

Lösning: Vi använder Gauss sats

$$\operatorname{div} \vec{F} = \frac{\partial}{\partial x}(x^2) + \frac{\partial}{\partial y}(xz) + \frac{\partial}{\partial z}(3z) = 2x + 3$$

$$\oiint_{x^2+y^2+z^2=4} \vec{F} \cdot \vec{N}\, dS = \iiint_{x^2+y^2+z^2 \le 4} 2x+3\, dV \underset{\substack{\uparrow \\ \iiint x\, dV = 0 \\ \text{av symmetriskäl}}}{=} \iiint_{x^2+y^2+z^2\le 4} 3\, dV = 3 \cdot \text{volymen hos en sfär med radie } 2$$

$$= 3 \cdot \frac{4\pi \cdot 2^3}{3} = 32\pi.$$

(2) Beräkna flödet av $\vec{F}(x,y,z) = (x^2, y^2, z^2)$ utåt genom randytan till kroppen

$$D = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x-2)^2 + y^2 + (z-3)^2 \le 9 \}.$$

Lösning: $$I = \iint_{\partial D} \vec{F} \cdot \vec{N}\, dS = \iiint_D \operatorname{div} \vec{F}\, dV = 2 \iiint_D x+y+z\, dV$$

Låt $\begin{cases} u = x-2 \\ v = y \\ w = z-3 \end{cases}$ Vi ser $dxdydz = dudvdw$

Därför

$$I = 2 \iiint_{u^2+v^2+w^2 \le 9} u+2+v+w+3\, dudvdw = \left[\begin{array}{l} \text{Symmetri ger} \\ \iiint u\, dV = \iiint v\, dV = \\ = \iiint w\, dV = 0 \end{array} \right] =$$

$$= 2 \iiint_{u^2+v^2+w^2 \le 9} 3\, dudvdw = 10 \cdot \frac{4\pi \cdot 3^3}{3} = 360\pi.$$

③ Antag att S är en orienterad glatt yta som är randyta till en reguljär mängd D i $\mathbb{R}^3$. Antag att $\vec{F}$ är ett glatt vektorfält definierad på $\mathbb{R}^3$. Visa att

$$\oiint_S (\text{Curl}\,\vec{F}) \cdot \vec{N}\, dS = 0$$

Lösning: Vi kan använda Gauss sats. Vi vet att $\text{div}(\text{Curl}\,\vec{F}) = 0$ för varje glatt vektorfält.

Därför

$$\oiint_S (\text{Curl}\,\vec{F}) \cdot \vec{N}\, dS = \iiint_D \text{div}(\text{Curl}\,\vec{F})\, dV = \iiint_D 0\, dV = 0.$$

Inlämningsuppgift 5

① Låt $\vec{F}(x,y,z) = (xz, yz, 1)$ och

$$D = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 \leq 25 \ , \ z \geq 3 \}$$

Beräkna flödet av $\vec{F}$ utåt över ∂D.

Lösning: Gauss sats säger

$$\iint_{\partial D} \vec{F} \cdot \vec{N} \, dS = \iiint_{D} \operatorname{div} \vec{F} \, dV.$$

Vi har $\operatorname{div} \vec{F} = \frac{\partial}{\partial x}(xz) + \frac{\partial}{\partial y}(yz) + \frac{\partial}{\partial z}(1) = 2z.$

och $\iint_{\partial D} \vec{F} \cdot \vec{N} \, dS = \iiint_{D} 2z \, dV =$ (Cylindriska koord.)

$$= \int_0^{2\pi} d\theta \iint_{r^2+z^2 \leq 25} 2z \, r \, dr dz = 2\pi \int_0^4 2r \left(\int_3^{\sqrt{25-r^2}} z \, dz \right) dr = 2\pi \int_0^4 2r \left[\frac{z^2}{2} \right]_3^{\sqrt{25-r^2}} dr =$$

$$= 2\pi \int_0^4 r \left(25 - r^2 - 9 \right) dr = 2\pi \int_0^4 16r - r^3 \, dr = 2\pi \left[8r^2 - \frac{r^4}{4} \right]_0^4 =$$

$$= 2\pi \left(8 \cdot 16 - 4 \cdot 16 \right) = 2\pi \cdot 4 \cdot 16 = 128\pi.$$

② Antag att $f(x,y,z)$ är harmonisk (alltså

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 0).$$

Antag att D är en reguljär sluten mängd i $\mathbb{R}^3$ begränsad av en glatt sluten orienterbar yta S och att $\vec{N}$ är enhetsnormalfältet till S som pekar utåt. Visa att

$$\oiint_{S} \nabla f \cdot \vec{N} \, dS = 0.$$

Lösning:
$$\oiint_S \nabla f \cdot \vec{N}\, dS = \iiint_D \operatorname{div}(\nabla f)\, dV \qquad \text{(Gauss sats)}$$

Vi har $\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right)$ och

$$\operatorname{div}(\nabla f) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 0 \quad \text{eftersom } f \text{ är harmonisk}$$

Alltså
$$\oiint_S \nabla f \cdot \vec{N}\, dS = \iiint_D \operatorname{div}(\nabla f)\, dV = \iiint_D 0\, dV = 0$$

⊗

(3) Låt S vara randytan till
$$D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2 \le z^2,\ 0 \le z \le 1\}$$

och låt $\vec{N}$ vara enhetsnormalfältet till S som pekar utåt från D.
Låt $\vec{F}(x,y,z) = (x^2, y^2, z^2)$ och beräkna
$$\oiint_S \vec{F} \cdot \vec{N}\, dS$$

Lösning: Gauss sats säger
$$\oiint_S \vec{F} \cdot \vec{N}\, dS = \iiint_D \operatorname{div} \vec{F}\, dV$$
och här
$$\operatorname{div} \vec{F} = \frac{\partial}{\partial x}(x^2) + \frac{\partial}{\partial y}(y^2) + \frac{\partial}{\partial z}(z^2) =$$
$$= 2x + 2y + 2z$$

Därför
$$\oiint_S \vec{F} \cdot \vec{N}\, dS = \iiint_D 2x + 2y + 2z\, dV = (\text{cylindriska koordinater}) =$$
$$= \int_0^{2\pi} \left(\iint_{\substack{r^2 \le z^2,\\ 0 \le z \le 1}} (2r\cos\theta + 2r\sin\theta + 2z)\, r\, dr\, dz \right) d\theta = \left[\int_0^{2\pi} \cos\theta\, d\theta = 0 = \int_0^{2\pi} \sin\theta\, d\theta \right] =$$

$$= 2\pi \int_0^1 \left(\int_0^z 2zr\, dr \right) dz = 2\pi \int_0^1 z \left[r^2 \right]_{r=0}^{r=z} dz = 2\pi \int_0^1 z^3\, dz = 2\pi \left[\frac{z^4}{4} \right]_0^1 = \frac{\pi}{2}$$

④ Låt γ vara skärningskurvan till $x^2+y^2+z^2=1$ och $x+y+z=0$ orienterad motsols då man tittar ovanifrån längs z-axeln. Beräkna

$$\oint_\gamma (y+z)\,dx + (x+z)\,dy + (x+z)\,dz.$$

<u>Lösning:</u>

Stokes sats säger

$$\oint_\gamma \vec{F}\cdot d\vec{r} = \iint_S \operatorname{Curl}\vec{F}\cdot\vec{N}\,dS.$$

Här är

$$\operatorname{Curl}\vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ y+z & x+z & x+y \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial}{\partial y}(x+y) - \frac{\partial}{\partial z}(x+z)\right)\vec{e}_1 -$$

$$-\left(\frac{\partial}{\partial x}(x+y) - \frac{\partial}{\partial z}(y+z)\right)\vec{e}_2 + \left(\frac{\partial}{\partial x}(x+z) - \frac{\partial}{\partial y}(y+z)\right)\vec{e}_3 =$$

$$= (1-1)\vec{e}_1 - (1-1)\vec{e}_2 + (1-1)\vec{e}_3 = (0,0,0)$$

$$\Longrightarrow \oint (y+z)\,dx + (x+z)\,dy + (x+y)\,dz = \iint_S \vec{0}\cdot\vec{N}\,dS = 0$$

Demouppgifter 5

① Låt γ vara den positivt orienterade randkurvan till en kvadrat i planet och låt $\vec{F}(x,y) = (xy^2, x^2y + 2x)$. Visa att

$$\oint_\gamma \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

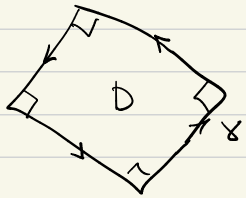
beror endast på arean av kvadraten och inte dess position.

Lösning: Vi använder Greens sats

$$\oint_\gamma \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_D \frac{\partial}{\partial x}(x^2y + 2x) - \frac{\partial}{\partial y}(xy^2)\, dxdy =$$

$$= \iint_D 2xy + 2 - 2xy \, dxdy = 2 \iint_D dxdy =$$

$$= 2 \cdot (\text{Arean av } D)$$



② Låt $\vec{F}(x,y) = (-\sin y, x\cos y)$ och låt γ vara randkurvan till $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le x \le \frac{\pi}{2}, 0 \le y \le \frac{\pi}{2}\}$ orienterad motsols. Beräkna cirkulationen av $\vec{F}$ längs γ.

Lösning: Vi använder Greens sats

$$\oint_\gamma \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_D \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \, dA =$$

$$= \iint_D \cos y - (-\cos y) \, dA = \int_0^{\pi/2} \left(\int_0^{\pi/2} 2\cos y \, dx \right) dy =$$

$$= \int_0^{\pi/2} \pi \cos y \, dy = \pi.$$

③ Antag att $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0.$ (f kallas harmonisk)

Visa att $\oint_\gamma \frac{\partial f}{\partial y} dx - \frac{\partial f}{\partial x} dy = 0$

för varje glatt sluten enkel kurva γ som begränsar en reguljär mängd i planet.

Lösning: Vi använder Greens sats

$$\oint_\gamma \frac{\partial f}{\partial y} dx - \frac{\partial f}{\partial x} dy = \iint_D \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{\partial f}{\partial x}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) dA =$$

$$= -\iint_D \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \, dA = 0$$

(Om γ är orienterad medsols så får du $-0 = 0$:))