

Aalto-universitetet

Björn Ivarsson

Inlämningsuppgift 6

Differential- och integralkalkyl 3, MS-A0309.

Inlämnas senast **måndag 15.4.2024 23.59** via MyCourses.

(1) Låt

$$F(x, y) = (-y + x\sqrt{x^2 + y^2}, x + y\sqrt{x^2 + y^2}).$$

(a) Skriv vektorfältet i polära koordinater, med andra ord bestäm

$$F_R \text{ och } F_\theta \text{ i } F = F_R \hat{R} + F_\theta \hat{\theta}. \quad (1p)$$

(b) Beräkna $\operatorname{div} F$ uttryckt i polära koordinater. (3p)

(2) Definiera kroklinjära koordinater i xy -planet via

$$\vec{r}(u, v) = (x(u, v), y(u, v)) = (u^2 - v^2, 2uv).$$

(a) Visa att detta kroklinjära koordinatsystem är ortogonalt då $(x, y) \neq (0, 0)$. (2p)

(b) Beräkna koordinatsystemets skalfaktorer. (2p)

(3) Låt

$$F(R, \theta, z) = R^2 \hat{R} + R \hat{\theta} + z \hat{z}$$

vara ett vektorfält skrivet i cylindriska koordinater.

(a) Beräkna $\operatorname{div} F$. (2p)

(b) Beräkna $\operatorname{Curl} F$. (2p)

(4) Låt $f(R, \phi, \theta)$ vara en funktion given i sfäriska koordinater i \mathbb{R}^3 .
Härled en formel för

$$\Delta f = \operatorname{div}(\nabla f)$$

i sfäriska koordinater. (4p)