

Parkkipaikka

Parkkipaikalla on kaksi parkkiruutua. Pysäköimään yrittäviä autoja saapuu riippumattomin eksponenttijakautunein väliajoin, keskimäärin 10 minuutin välein. Auto pysäköi ensimmäiseen ruutuun sen ollessa vapaana, muuten toiseen ruutuun sen ollessa vapaana, ja molempien ruutujen ollessa varattuna poistuu paikalta. Autojen pysäköintiajat ovat eksponenttijakautuneita odotusarvolla 45 minuuttia, riippumattomia toisistaan ja autojen saapumisista.

Parametrit:

$$\lambda = \frac{1}{10 \text{ min}} \text{ (saapuvien autojen Poisson-intensiteetti)}$$

$$\mu = \frac{1}{45 \text{ min}} \text{ (yksittäisen auton pysäköinnin päättymisen intensiteetti)}$$

```
In[1]:= values := {λ → 1/10, μ → 1/45}
```

Numeroidaan tilat seuraavasti:

- 1 : molemmat ruudut tyhjiä
- 2 : ensimmäinen ruutu varattu, toinen tyhjä
- 3 : toinen ruutu varattu, ensimmäinen tyhjä
- 4 : molemmat ruudut varattuja

Generaattorimatriisi

```
In[2]:= Q = {{-λ, λ, 0, 0}, {μ, -λ-μ, 0, λ}, {μ, 0, -λ-μ, λ}, {0, μ, μ, -2*μ}};  
Q // MatrixForm  
(Q /. values) // MatrixForm  
(Q /. N[values]) // MatrixForm
```

Out[3]/MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} -\lambda & \lambda & 0 & 0 \\ \mu & -\lambda-\mu & 0 & \lambda \\ \mu & 0 & -\lambda-\mu & \lambda \\ 0 & \mu & \mu & -2\mu \end{pmatrix}$$

Out[4]/MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{10} & \frac{1}{10} & 0 & 0 \\ \frac{1}{45} & -\frac{11}{90} & 0 & \frac{1}{10} \\ \frac{1}{45} & 0 & -\frac{11}{90} & \frac{1}{10} \\ 0 & \frac{1}{45} & \frac{1}{45} & -\frac{2}{45} \end{pmatrix}$$

Out[5]/MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} -0.1 & 0.1 & 0 & 0 \\ 0.0222222 & -0.122222 & 0 & 0.1 \\ 0.0222222 & 0 & -0.122222 & 0.1 \\ 0 & 0.0222222 & 0.0222222 & -0.0444444 \end{pmatrix}$$

Siirtymämatriisi saadaan generaattorimatriisista matriisieksponenttina

```
In[6]:= FullSimplify [MatrixExp[t*Q] /. N[values]] // MatrixForm
```

Out[6]/MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} 0.064 + 0.211972 e^{-0.181766 t} + 0.724028 e^{-0.0849011 t} & 0.170182 - 0.567968 e^{-0.181766 t} - 0.818182 e^{-0.0849011 t} \\ 0.064 - 0.17332 e^{-0.181766 t} + 0.10932 e^{-0.0849011 t} & 0.170182 + 0.464402 e^{-0.181766 t} + 0.181818 e^{-0.0849011 t} \\ 0.064 - 0.17332 e^{-0.181766 t} + 0.10932 e^{-0.0849011 t} & 0.170182 + 0.464402 e^{-0.181766 t} - 0.818182 e^{-0.0849011 t} \\ 0.064 + 0.0560956 e^{-0.181766 t} - 0.120096 e^{-0.0849011 t} & 0.170182 - 0.150305 e^{-0.181766 t} + 0.181818 e^{-0.0849011 t} \end{pmatrix}$$

Ajanhetkellä $t = 0$ tyhjistä parkkipaikasta lähtien, hetkittäiset tilajakaumat ovat

In[7]:= **(jak = {{1, 0, 0, 0}}. (MatrixExp[t*Q] /. N[values]))**

Out[7]= $\left\{ \left\{ 0.064 + 0.211972 e^{-0.181766 t} + 0.724028 e^{-0.0849011 t}, \right. \right.$
 $0.170182 - 0.567968 e^{-0.181766 t} - 0.818182 e^{-0.122222 t} + 1.21597 e^{-0.0849011 t},$
 $0.117818 - 0.211972 e^{-0.181766 t} + 0.818182 e^{-0.122222 t} - 0.724028 e^{-0.0849011 t},$
 $\left. 0.648 + 0.567968 e^{-0.181766 t} - 1.21597 e^{-0.0849011 t} \right\} \}$

Varttitunnin kuluttua

In[8]:= **jak /. t -> 15**

Out[8]= $\{ \{ 0.280489, 0.342482, 0.0321394, 0.344889 \} \}$

Puolen tunnin kuluttua

In[9]:= **jak /. t -> 30**

Out[9]= $\{ \{ 0.121609, 0.242062, 0.0811229, 0.555206 \} \}$

Kolmen vartin kuluttua

In[10]:= **jak /. t -> 45**

Out[10]= $\{ \{ 0.079927, 0.193328, 0.105235, 0.62151 \} \}$

Tunnin kuluttua

In[11]:= **jak /. t -> 60**

Out[11]= $\{ \{ 0.0684444, 0.177094, 0.113908, 0.640553 \} \}$

Pitkässä juoksussa

In[12]:= **Limit [jak, t -> Infinity]**

Out[12]= $\{ \{ 0.064, 0.170182, 0.117818, 0.648 \} \}$

Pitkässä juoksussa saavutetaan tasapainojakauma. Ratkaistaan tasapainojakauma myös suoraan määrittelevistä yhtälöistä $\pi Q = 0$

In[13]:= **Solve [({{ $\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4$ }}. (Q /. values)) == {{0, 0, 0, 0}}, { $\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4$ }] // Quiet**

Out[13]= $\left\{ \left\{ \pi_2 \rightarrow \frac{117 \pi_1}{44}, \pi_3 \rightarrow \frac{81 \pi_1}{44}, \pi_4 \rightarrow \frac{81 \pi_1}{8} \right\} \right\}$

Normalisaatio $\sum_{x \in S} \pi_x = 1$

In[14]:= **($\pi_1 + \pi_2 + \pi_3 + \pi_4$) /. { $\pi_2 \rightarrow \frac{117 \pi_1}{44}, \pi_3 \rightarrow \frac{81 \pi_1}{44}, \pi_4 \rightarrow \frac{81 \pi_1}{8}$ }**

Out[14]= $\frac{125 \pi_1}{8}$

In[15]:= **Solve [$\frac{125 \pi_1}{8} == 1, \pi_1$]**

Out[15]= $\left\{ \left\{ \pi_1 \rightarrow \frac{8}{125} \right\} \right\}$

```
In[16]:= Simplify [ ({{π1, π2, π3, π4}} /. {π2 →  $\frac{117 \pi 1}{44}$ , π3 →  $\frac{81 \pi 1}{44}$ , π4 →  $\frac{81 \pi 1}{8}$ }) /. {π1 →  $\frac{8}{125}$ }]
N[%]
```

```
Out[16]:= { {  $\frac{8}{125}$ ,  $\frac{234}{1375}$ ,  $\frac{162}{1375}$ ,  $\frac{81}{125}$  } }
```

```
Out[17]:= { { 0.064, 0.170182, 0.117818, 0.648 } }
```

Ratkaistu tasapainojakauma on sama kuin pitkän ajan raja hetkittäisistä tilajakaumista.

Hetkittäisten tilajakaumien riippuvuus ajasta

```
In[18]:= Apply [ Show, Table [ Plot [ Legended [ jak [ [1, j] ], j ], {t, 0, 90},
PlotRange → {{0, 90}, {0, 1}}, PlotStyle → {Black, Blue, Green, Red} [ [j] ],
PlotLabel → Style [ "Hetkittäiset tilojen todennäköisyydet", Large ],
AxesLabel → {"t", "μx(t)"} ], {j, 1, 4} ] ]
```

Hetkittäiset tilojen todennäköisyydet

