Harjoitus 4: Differentiaaliyhtälöt (Matlab)

MS-C2107 Sovelletun matematiikan tietokonetyöt

Aalto University
School of Science

Systems
Analysis Laboratory

Harjoituksen aiheita

- Matlab:n `solver` komento differentiaaliyhtöiden ratkaisemiseen
- Differentiaaliyhtälömallien käyttö ilmiöiden mallintamisessa
  - Infektion leviäminen
  - Radioaktiivinen hajoaminen
  - Ajettu värähtelijä
- Matlabin `contour` ja `surface` -komennot 3D visualisointiin

Oppimistavoitteet

- Osaat ratkaista differentiaaliyhtälön numeerisesti Matlabilla

Diff.yhtälöiden numeerinen ratkaiseminen

- DY:n yleinen muoto: $\frac{d}{dt}x(t) = F(t, x(t))$
  - $x(\cdot)$ mahdollisesti vektoriarvoinen
  - Derivaattaa $\frac{d}{dt}x(t)$ merkitään usein myös $\dot{x}(t)$
- Lineaarisia DY:tä voidaan ratkaista symbolisesti (Mathematica)

  $\rightarrow$ Tuloksena $x(t)$:n ”kaava”
- Sovelluksissa DY:t usein epälineaarisia, jolloin ne joudutaan ratkaisemaan numeerisesti (esim. Matlabilla)

  $\rightarrow$ Tuloksena arvot $x(t_0), x(t_1), ..., x(t_n)$
- Matlab:ssa useita DY-ratkaisimia (`ode45`, `ode113`, `ode23s`)
- Suhteellisen yksinkertaisissa käytännön ongelmissa ei juurikaan ole väliä mitä ratkaisinta käyttää

DY:n ratkaiseminen Matlabilla: Vaiheet

1. Muuta DY muotoon $\dot{x}(t) = F(t, x(t))$
   - Yhtäsuuruusmerkin vasemmalla puolella vain derivaatta
2. Toteuta $F(t, x(t))$ Matlab-funktiona:
   ```
   function dx = minunF(t,x,param)
   ...
   ```
3. Kutsu jotakin Matlab:n valmista DY-ratkaisinta parametrina F (`minunF`), ratkaisuväli t:lle (`tspan`), sekä x:n alkuarvot (`x0`):
   ```
   [tout,xout]=ode45(@minunF,tspan,x0,options,param)
   ```
   (Merkintä `@` kertoo Matlabille, että parametrina funktio)
4. Validoi tulos esim. piirtämällä ratkaisu:
   ```
   plot(tout,xout,'r.-')
   ```

Esim: Eksponentiaalinen vaimeneminen

- Ratkaistaan DY $\dot{y}(t) + y(t)/T_0 = 0$ välillä $t \in [0, 100]$, missä $y(0) = 1$ ja parametri $T_0 > 0$.
- **Vaihe 1:**

$$\underbrace{\dot{y}(t)}_{\dot{x}(t)} = \underbrace{-\frac{y(t)}{T_0}}_{F(t,x(t))}$$

- **Vaihe 2:** Luodaan tiedosto `ExpDecay.m` sisältäen koodin

```
function dy = ExpDecay(t, y, T0)
dy = - y/T0;
```

  - Vaikka esimerkissämme ei esiinny explisiittistä aikariippuvuutta (eli F ei riipu t:stä), täytyy `t` kuitenkin olla listattu `ExpDecay`-funktion parametriksi

Esim: Eksponentiaalinen vaimeneminen

- **Vaihe 3:** Alustetaan muut ratkaisimen parametrit...
  - Luodaan esim. 200 pisteen aikavektori aikavälille $t \in [0, 100]$:

    ```
    tspan=linspace(0,100,200);
    ```

  - Asetetaan alkuarvo ja parametri T_0: `y0=1; T0=10;`
  - `options` - muuttuja (oikeammin `structure`) mahdollistaa mm. ratkaisulta vaaditun tarkkuuden kontrolloinnin:

    ```
    options=[];
    options=odeset(options,'RelTol',1e-7,'AbsTol',1e-7);
    ```

    $\rightarrow$ suurin sallittu suhteelinen ja absoluuttinen virhe on 10^{-7}
- ... ja ratkaistaan DY:

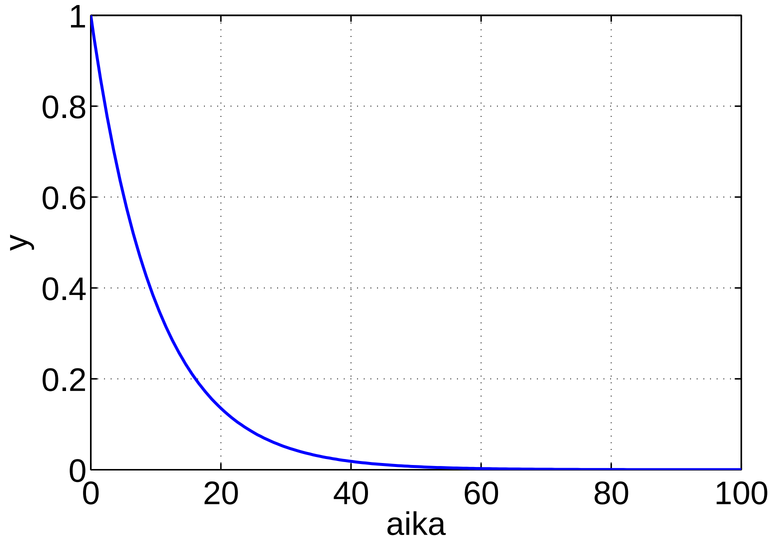
  ```
  [tout,yout]=ode45(@ExpDecay,tspan,y0,options,T0)
  ```

  (Huom! Parametrin `T0` arvo välittyy `ExpDecay` funktiolle)

Esim: Eksponentiaalinen vaimeneminen

- **Vaihe 4:** Ihmetellään ratkaisua:

```
plot(tout,yout);
xlabel('aika');
ylabel('y');
grid on
```



Korkeamman kertaluvun DY:t

- Jos DY:ssä esiintyy esim. toisia tai kolmansia derivaattoja, täytyy se muuttaa ensimmäisen kertaluvun (vektoriarvoiseksi) DY:ksi
- **Esim.** Värähtelijän DY-malli $\ddot{y}(t) + \omega_0^2 y(t) = 0$, $(\ddot{y}(t) = \frac{d^2}{dt^2} y(t))$

$\rightarrow$ Merkitään $x_1(t) = \dot{y}(t)$, $x_2(t) = y(t)$ ja saadaan DY

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix}}_{\dot{x}(t)} = \underbrace{\begin{bmatrix} -\omega_0^2 x_2(t) \\ x_1(t) \end{bmatrix}}_{F(t,x(t))},$$

$\rightarrow$ F Matlab-funktioksi:

```
function dx = Oscillator(t,x,omega0)
  dx = [-omega0^2*x(2); x(1)];
```

$\rightarrow$ Ratkaistaan: `[tout,xout]=ode45(@Oscillator,tspan,x0...)`, missä `x0` on 2-rivinen vektori ja `xout` on 2-sarakkeinen matriisi

Tehtävä A: Infektiomalli

- Tarkastellaan infektion leviämistä kuvaavaa SIR-mallia. Populaatio on kolmeen ryhmään ajanhetkellä t: alttiit $s(t)$ (**s**usceptible), infektoituneet $i(t)$ (**i**nfected) ja toipuneet $r(t)$ (**r**ecovered). Ryhmien kokojen muutoksia voidaan kuvata seuraavilla differentiaaliyhtälöillä (vrt. differenssiyhtälöt harjoituksessa 2B):

$$\begin{aligned}\dot{s}(t) &= -\alpha \cdot i(t) \cdot s(t)\\ \dot{i}(t) &= \alpha \cdot i(t) \cdot s(t) - \beta \cdot i(t)\\ \dot{r}(t) &= \beta \cdot i(t)\end{aligned}$$

missä $t \in [1, 100]$.

1. Totauta Matlab koodi joka ratkaisee nämä differentiaaliyhtälöt. VINKKI: Luo `Infektio.m` ja kirjoittamalla sen ensimmäiselle riville `function dsir=Infektio(t,sir,alpha,beta)`.

Tehtävä A: Infektiomalli

2. Ratkaise DYt käyttäen samoja parametrien α ja β arvoja kuin harjoituksessa 2B.
   - Liitä vastauksiisi kuva eri ryhmien kehittymisestä ajan funktiona. Anna kuvan otsikoksi oma nimesi. Lisää kuvaan myös `legend` ja anna akseleille nimet.
   - Vertaa tuloksia Harjoituksen 2B differenssiyhtälöiden ratkaisuun, jossa ei ole kuolleiden ryhmää (eli $\gamma = 0$). Ovatko ratkaisut yhteneviä?
3. Ratkaise nyt sekä DY-malli että differenssiyhtälömalli käyttäen parametriarvoja $\alpha = 0.003$ ja $\beta = 0.03$ (ja $\gamma = 0$)
   - Pohdi miksi ratkaisut eivät ole samanlaisia, vaikka mallit ovat periaatteessa samat.

Tehtävä B: Radioaktiivinen hajoaminen

- Tarkastellaan isotoopin y hajoamista aikavakiolla T_0. Lisäksi oletetaan että ajanhetkellä t_z systeemiin tuodaan Z_0 kappaletta toista isotooppia z, joka hajoaa isotoopiksi y aikavakiolla T_1. Näinollen isotoopin z hajoaminen lisää y:n määrää, mutta samalla myös y hajoaa. Ilmiötä voidaan mallintaa DY:llä

$$\dot{y}(t) = -y(t)/T_0 + z(t)/T_1,$$

missä

$$z(t) = \begin{cases} 0 & t \in [0, t_z) \\ Z_0 e^{-(t-t_z)/T_1} & t \in [t_z, \infty) \end{cases}$$

1. Toteuta DY:n ratkaisemiseen tarvittava Matlab-funktio

   `function dy = ExpDecayTwo(t, y, T0, T1, Z0, tz).`

   Vinkki: `if-else`-rakenne

Tehtävä B: Radioaktiivinen hajoaminen

2. Ratkaistaan DY aikavälillä $t \in [0, 50]$ käyttäen vähintää 150 aikapistettä sekä arvoja $T_0 = 10$, $Z_0 = 1$, $y(0) = 1$ ja $t_z = 15$. Tutkiaksesi ratkaisun käyttäytymistä eri T_1 arvoilla, toteuta esim. seuraava Matlab-koodi, joka tallentaa kutakin T_1:n arvoa vastaavan ratkaisun matriisin `yT1` riviksi:

```
T1 = linspace(1, 200, 150);
for T1index = 1:length(T1)
        [t, y] = ode45(@ExpDecayTwo, ....
        yT1(T1index, :) = y;
end
```

- Piirrä ratkaisu $T_1 = 100$ ja tarkista että se näyttää järkevältä.

✍ Millä T_1:n arvolla isotooppia y on eniten jäljellä loppuajanhetkellä $t = 50$? (VINKKI: `max`-komento)

Tehtävä B: Radioaktiivinen hajoaminen

3. Visualisoidaan ratkaisut sekä ajan t että aikavakion T_1 funktiona.

   Liitä vastaukseesi kuva, jossa vaakaakselilla on aika, pystyakselilla T_1 ja $y(t)$:n arvo on kuvattu väriasteikolla. Anna kuvan otsikoksi oma nimesi, lisää kuvaan `colorbar` ja nimeä akselit.

   Vinkki: `surf(xscale, yscale, zmatrix)`

   Liitä vastaukseesi kuva, jossa vaakaakselilla on aika, pystyakselilla T_1 ja $y(t)$:n arvot on kuvattu tasa-arvokäyrin. Anna kuvan otsikoksi oma nimesi ja nimeä akselit.

   Vinkki: `[c,h]=contour(xscale, yscale, zmatrix,Ncontour)`

   Vinkki: `clabel(c, h);`

   - Tarkista että kuvat tukevat 2.-kohdan vastaustasi

Kotitehtävä: Ajettu värähtelijä

- Tarkastellaan harmonista värähtelijää, jonka värähtelyitä y ajaa sinimuotoinen voima ($F\cos(\omega t)$). Lisäksi liikettä vaimentaa esim. väliaineen kitka vaimennusvakiolla T_0. Tilannetta kuvaa yhtälöä

$$\ddot{y}(t) + \dot{y}(t)/T_0 + \omega_0^2 y(t) = \frac{F}{M}\cos(\omega t), \tag{1}$$

missä parametri ω_0 on värähtelija resonanssitaajuus, M värähtelijän massa, F ajavan voiman amplitudi ja ω sen taajuus.

1. Muuta tämä 2. kertaluvun DY 1. kertaluvun differentiaaliyhtälöksi $\dot{x}(t) = F(t, x(t))$, missä $x(t) = [x_1(t), x_2(t)]$. Toteuta F Matlab-funktiona siten, että voi myöhemmin asettaa parametreille T_0, ω_0, M, F ja ω.

   Vinkki: `function dx=DrivenOsc(t,x,T0,omega,M,F,omega0)`

Kotitehtävä: Ajettu värähtelijä

2. Kirjoita Matlab-koodi, joka ratkaisee yhtälön (**??**) mielivaltaisilla parametreilla ja alkuarvoilla aika välillä $t \in [0, \infty)$. Ääretöntä aikaa ei numeriikassa voida saavuttaa, mutta lopppuajanhetkellä $t_\infty \simeq 10 \cdot T_0$ päästänee tarpeeksi lähelle ääretöntä.
   - Ratkaise yhtälö parametriarvoilla $T_0 = 10$, $\omega_0 = 1$, $M = 1$, $F = 1$ ja $\omega = 1$ kun värähtelijä on alkuhetkellä $t = 0$ levossa, eli $y(0) = \dot{y}(0) = 0$. (Vinkki: `ode45`).
   - Visualisoi ratkaisu ja varmista että mallisi tulokset näyttävät järkeviltä: Kun voima alkaa vaikuttaa, värähtelijä lähtee liikkeelle pikku hiljaa, ja lähestyy asymptoottisesti steady-state tilannetta, jossa värähtely on sinimuotoista.

Kotitehtävä: Ajettu värähtelijä

3. Tutkitaan, miltä ”asymptoottinen” ratkaisu näyttää, jos ajotaajuus ω on alle, yli, tai yhtäsuuri kuin resonanssitaajuus ω_0. Ratkaise yhtalö (**??**) kolmella arvolla $\omega \in \{0.1, 1.0, 1.1\}$. Pidä muut parametriarvot ennallaan (ks. kohta 2)

   - Liitä vastaukseesi kuva, jossa nämä kolme ratkaisua sekä ajava voima (vaakaakselilla aika, pystyakselilla $y(t)$:n arvo) Anna kuvan otsikoksi oma nimesi, lisää kuvaan `legend` ja nimeä akselit.
   - Miten värähtelyn amplitudi ja sen vaihe (suhteessa ajavan voiman vaiheeseen) käyttäytyvät kvalitatiivisesti eri tapauksissa?

Kotitehtävä: Ajettu värähtelijä

4. Muuta vaimennusvakion T_0 arvoja, ja yritä päätellä, mikä yksinkertainen yhtälö sitoo toisiinsa vaimennusvakion ja asymptoottisen värähtelyn amplitudin. Käytä muuten samoja parametriarvoja kuin edellä ($\omega_0 = 1$, $M = 1$, $F = 1$ ja $\omega = 1$).

   ✍ Kerro minkä yhtälön löysit?

   Liitä koko kotitehtävän lähdekoodi vastauksiisi