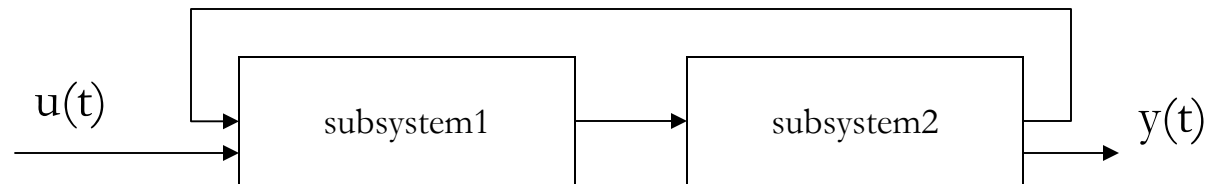
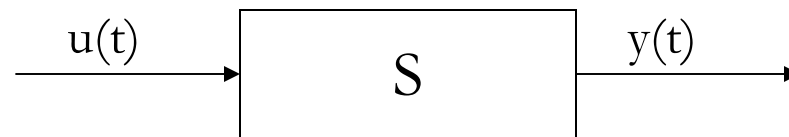


Systemimallit: sisältö

- Mallityypit ja muuttujat
- Input-output -kuvaus ja tilayhtälömalli, tila
- Linearisointi
- Jatkuva-aikaisen lineaarisen järjestelmän siirtofunktio, stabiilisuus
 - Laplace-muunnos
- Diskreettiaikaisen lineaarisen järjestelmän (pulssin)siirtofunktio, stabiilisuus
 - z-muunnos
- Diskretointi

Joitain mallityyppejä

- Matemaattinen malli: muuttujien väliset suhteet kuvattu matemaattisesti yhtälöin
- Lohkokaaviomalli: systeemin toimintojen looginen jako lohkoihin, joiden välisiä vuorovaikutuksia kuvataan nuolin



- simulaatiomalli: malli ehkä olemassa vain tietokoneohjelmana (joka on ehkä jäsennetty matemaattisesta tai lohkokaaaviomallista)

Sisäänmeno, ulostulo ja häiriöt

- Mallin vakiot:
 - systeemiparametrit
 - suunnitteluparametrit
- Mallin muuttujat:
 - ulostulot (output) $y(t)=[y_1(t), \dots, y_p(t)]^T$
 - sisäänmenot (input, ohjaus) $u(t)=[u_1(t), \dots, u_m(t)]^T$
 - voidaan valita
 - häiriöt $w(t)=[w_1(t), \dots, w_r(t)]^T$
 - ei voida valita
 - Sisäänmenoja ja häiriöitä kutsutaan ulkoisiksi muuttujiksi, muita mallin muuttujia sisäisiksi
- Dynaamisessa järjestelmässä $y(t)$ riippuu paitsi $u(t)$:stä ja $w(t)$:stä myös kaikista $u(s)$ ja $w(s)$, $s < t$

Input-output -kuvaus ja tilayhtälömalli

- Yleinen jatkuvan ajan input-output-kuvaus on muotoa

$$g(y^{(n)}(t), y^{(n-1)}(t), \dots, y(t), u^{(m)}(t), \dots, u(t)) = 0,$$

missä (a) viittaa a :nteen derivaattaan ja g on jokin epälineaarinen funktio (SISO)

- Muunnetaan 1. kertaluvun differentiaaliyhtälösystemiksi asettamalla $x_i(t) := y^{(i-1)}(t)$, $i = 1, \dots, n$

- Saadaan tilayhtälömalli

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t))$$

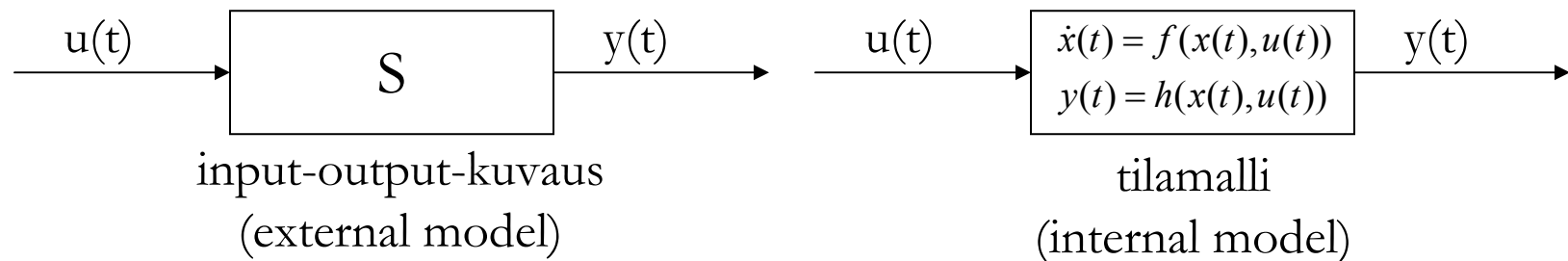
$$y(t) = h(x(t), u(t))$$

jossa $\dim x(t) = n$, $\dim u(t) = m$, $\dim y(t) = p$

- $x(t)$ on mallin tila, n on mallin kertaluku

Tila

- Aiemmin todettiin, että systeemin ulostuloon $y(t)$ vaikuttavat $u(s)$ ja $w(s)$, $s < t$
 - Olisi kovin kömpelöä tallettaa $u(s)$ ja $w(s)$ kokonaisuudessaan
- Systeemin (tai mallin) tila $x(t)$ on sellainen informaatio, jonka tunteminen yhdessä $u(t)$:n ja $w(t)$:n kanssa mahdollistaa systeemin ulostulon $y(\tau)$ laskemisen jollekin $\tau > t$
- Käytännössä tilalla on tärkeä merkitys esim. simuloinnissa: se on suoraan kullakin aika-askelella talletettava informaatio



Esitysten ero

- Input-output -kuvaus ei ota kantaa systeemin sisäiseen rakenteeseen
- Klassisen säätöteorian perusta siirtofunktiolla ilmaistun lineaarisen input-output -kuvauksen analyysi taajuustasossa
- Tilayhtälöesitys ”moderni” lähestymistapa
 - OR:n synty 1950-luvulla
 - mahdollisti mm. tilatakaisinkytkennän, optimisäädön, monimuuuttujasäädön ja epälineaaristen mallien käsittelyn sekä laajensi lineaaristen järjestelmien teoriaa merkittävästi

Tasapainotilan ratkaisut

- Valitaan $u(t)=u_0$ (vakio); mihin $x(t)$ ja $y(t)$ asettuvat?
- x_0 : $f(x_0, u_0)=0$
 - yksi, useita tai ei yhtään ratkaisua
- (x_0, u_0) on tasapainopiste (stationary point)
 - usein toivottavaa saada systeemi tasapainotilaan
- Vastaavasti tasapainotilan ulostulo on $y_0=h(x_0, u_0)$
- (Tasapainopiste on asymptoottisesti stabiili $\Leftrightarrow y(t)$ konvergoi y_0 :aan)
- Konvergenssinopeutta kuvaa aikavakio
 - usein mielenkiinnon kannalta nopeat tilat voidaan korvata staattisilla approksimaatioilla
- Staattinen vahvistus = y_0 :n herkkyys muutokselle u_0 :ssa eli $g'(u_0)$; $y_0=h(x_0(u_0), u_0)=g(u_0)$

g lineaarinen

- kun $g(\cdot)$ on $y(t)$:n ja $u(t)$:n derivaattojen painotettu summa, saadaan y u :n funktiona Laplace-muunnoksella (SISO):

$$Y(s) = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + a_{n-2} s^{n-2} + \dots + 1} U(s)$$

Osamäärää kutsutaan systeemin siirtofunktioksi $G(s)$

- Toisaalta, toimimalla kuten edellä saadaan lineaarinen tilayhtälömalli

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

tässä $\dim A = n \times n$, $\dim B = n \times m$, $\dim C = p \times n$, $\dim D = p \times m$

Lineaarisen jatkuva-aikaisen systeemin stabiilisuus

- Asymptoottinen stabiilisuus vs. stabiilisuus:
 - lokaali, globaali
- Lin. järjestelmälle stabiilisuus on systeemin ominaisuus joka ei riipu toiminta-alueesta tai tulosuureista
- Siirtofunktion $G(s)$ välittämä input-output -kuvaus on globaalisti asymptoottisesti stabiili joss nimittäjäpolynomin nollakohdat (so. siirtofunktion *navat*) sijaitsevat aidosti kompleksitason vasemmassa puoliskossa
 - kuvaus on stabiili jos jotkin navat ovat im-akselilla ja ne ovat yksinkertaisia
- Huom. Laplace-muuntamalla tilayhtälö saadaan

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$$

eli navat yhtyvät A :n ominaisarvoihin

Linearisointi

- Tarkastellaan epälineaarista järjestelmää tasapainopisteessä (x_0, u_0) sekä poikkeamia $\Delta x(t) = x(t) - x_0$, $\Delta y(t) = y(t) - y_0$ ja $\Delta u(t) = u(t) - u_0$

- pätee:

$$\frac{d}{dt} \Delta x(t) \approx A' \Delta x(t) + B' \Delta u(t)$$

$$\Delta y(t) \approx C' \Delta x(t) + D' \Delta u(t)$$

missä

$$A' = \frac{\partial f}{\partial x}, B' = \frac{\partial f}{\partial u}, C' = \frac{\partial h}{\partial x}, D' = \frac{\partial h}{\partial u}$$

laskettuna (x_0, u_0) :ssa

- Lisätietoa app. B kirjassa

Diskreettiaikainen lineaarinen järjestelmä

- Input-output -kuvauksen siirtofunktioesitys

$$Y(z) = \frac{b_m z^m + b_{m-1} z^{m-1} + \dots + b_0}{a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + a_{n-2} z^{n-2} + \dots + 1} U(z)$$

- Tilayhtälöesitys: otetaan tiloiksi viivästetyt y :n ja u :n arvot

$$x(t_{k+1}) = Ax(t_k) + Bu(t_k)$$

$$y(t_k) = Cx(t_k) + Du(t_k)$$

- Asymptoottinen stabiilisuus: siirtofunktion navat (A :n ominaisarvot) yksikköympyrän sisäpuolella
 - stabiilisuus: napoja yksikköympyrällä

Diskretointi

- Olkoon annettuna jatkuva-aikainen malli

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t))$$

$$y(t) = h(x(t), u(t))$$

- ja tarkastellaan diskreettiaikaista mallia

$$x(t_{k+1}) = F(x(t_k), u(t_k))$$

$$y(t_k) = H(x(t_k), u(t_k))$$

- Miten F ja H tulisi valita, jotta diskreettiaikainen malli kuvaisi diskretointipisteissä jatkuva-aikaista mallia mahdollisimman hyvin?
- Euler, Runge-Kutta –menetelmät, yms...

Lineaarisen mallin diskretointi

- Oletetaan ohjaus aika-askelella vakioksi/lineaariseksi ja ratkaistaan tilayhtälö \Rightarrow diskreetin mallin systeemi- ja ohjausmatriisit
 - joudutaan laskemaan matriisieksponentti ja sen integraali
- Lue kpl 3.9 ja app. A
- Harjoitustyö 1
 - tässä puhutun hands on -sovellus

Sananen p:stä, s:stä, z:sta, q:sta ja q^{-1} :stä

- s on Laplace-tason muuttuja - p on derivointioperaattori aikatasossa
 - $sF(s)=L\{f'(t)\}$, $pf(t)=f'(t)$
- $G(s)$ on Laplace-tason olio - $G(p)$ on operaattoripolynomi
 - $G(s)$ operoi $U(s)$:ään, $G(p)$ $u(t)$:hen
- z on z-tason muuttuja – q on eteenpäinsiirto-operaattori – q^{-1} on taaksepäinsiirto-operaattori aikatasossa
 - $z^{-1}Y(z)=Z\{y(t_{k-1})\}$, $qy(t)=y(t_{k+1})$, $q^{-1}y(t)=y(t_{k-1})$
 - $G(z)$ on z-tason olio joka operoi $U(z)$:aan – $G(q)$ ja $G(q^{-1})$ ovat aikataason operaattoripolynomeja jotka operoivat $u(t)$:hen
- Huomaa erityisesti, että diskreettiaikaisen järjestelmän stabiilisuustulos koskee z:n (tai q:n) polynomeja
 - usein käytetään myös merkintää $G^*(z^{-1})$ tai $G^*(q^{-1})$!