

# Matemaattisesta mallintamisesta

- Mallintaminen vaatii
  - mallinnustaitoa
  - tietoa mallintamisesta
  - tietoa sovellusalueesta
  - tervettä järkeä
- Verta, hikeä, kyyneleitä, tiedettä, taidetta
- ”Tehtävä kirkkaana mielessä”
  - mallin käyttötarkoitus tärkeässä roolissa!
- Seuraavassa eräs lähestymistapa dynaamisten systeemien mallintamiseen
  - pääpaino fysikaalisella mallintamisella
  - samat periaatteet pätevät kuitenkin laajemminkin: kemia, biologia, talous,...

# Mallinnusprosessin vaiheet:

1. Ongelman strukturointi
  - rajaus, käyttötarkoitus, ositus, karkea rakenne
2. Perusyhtälöiden muotoilu
  - miten mallin muuttujat kytkeytyvät toisiinsa osamalleissa
  - miten osamallit kytkeytyvät toisiinsa
3. Tilayhtälömallin muotoilu
  - tilamuuttujien valinta, tilayhtälöt
- (4. VVA
  - verifiointi: kuvaako malli haluttua asiaa
  - validointi: kuvaako malli asian oikein
  - akkreditointi: mallin käyttöönotto
5. Simulointimallin luominen = koodaus
6. Mallin käyttö ja ylläpito; goto 1,2,3)

# 1. Ongelman strukturointi: raja

- Mikä on mallin käyttötarkoitus
- Mitä mallinnetaan, mitä ei:
  - horisontaalinen raja: mitä osakokonaisuuksia malliin sisällytetään
  - vertikaalinen raja: yksinkertaistukset
  - päätä jotain, käytännössä tähän on palattava vielä
- Piirrä kuva

# 1. Ongelman strukturointi: ositus

- Jaa systeemi mahdollisuuksien mukaan alisysteemeihin
- Etsi systeemin sisäänmenot, ulostulot ja häiriöt
- Kussakin alisysteemissä
  - valitse ”tärkeät” suureet: muuttujat, vakiot, sisäänmenot, ulostulot, häiriöt
  - hahmota suureiden syy-seuraussuhteet
- Piirrä lohkokaavio
- Huom. suurissa mallinnustehtävissä saatetaan joutua tekemään alustavia kokeita aikavakioiden ja suureiden vuorovaikutusten selvittämiseksi

## 2. Perusyhtälöiden muotoilu

- Lohkokaaviomalli matemaattiseen muotoon:
  - rakennetaan yhteys mallin muuttujien välille
- Käytetään
  - luonnonlakeja
  - kokeellisia tuloksia
  - approksimaatioita
- Systeemi- ja alariippuva vaihe

# Fysikaalis-tekniset systeemit

- Fysikaalisten suureiden yhteyksiä kuvaavat relaatiot voidaan jakaa
  1. tase- ja
  2. konstitutiivisiin yhtälöihin
- 1. **Taseyhtälöt** liittävät toisiinsa samoja yksiköitä; esim.
  1. Energiakertymä aikayksikössä = teho sisään – teho ulos
  2. Tilavuuskertymä aikayksikössä = virtaus sisään – virtaus ulos
  3. Massakertymä aikayksikössä = massavirta sisään- massavirta ulos
  4. Virtojen summa = 0 (Kirchhoff) jne.
- Taustalla **säilymislait**

## ...Fysikaalis-tekniset systeemit

2. **Konstitutiiviset yhtälöt** kuvaavat yhteyksiä erilaisten suureiden välillä, esim.
  - Ohmin laki (liittää virran ja jännitteen)
  - Venttiilin ominaiskäyrä (liittää paineen, virran ja asennon)
  - Taustalla luonnonlait & systeemin ominaisuudet
  - Eli; kullekin alisysteemille:
    - muodosta taseyhtälöt, käytä konstitutiivisia yhtälöitä
    - tarkista että yksiköt täsmäävät!

## 3. Tilayhtälömallin muotoilu

- Vaiheen 2 jäljiltä malli on usein sekava ja jäsentymätön
  - Analyysin ja simuloinnin kannalta on parempi saattaa malli standardimuotoon
1. Valitse tilamuuttujat
  2. Ilmaise niiden aikaderivaatta
    - tilamuuttujien
    - sisäänmenojen, häiriöiden
    - parametrienavulla
  3. Ilmaise ulostulot tilamuuttujien avulla
  4. (Mene kohtaan 1)



# Miten valita tilamuuttajat?

- Fysikaalisissa systeemeissä tilalla on usein tulkinta
  - Simuloinnin kannalta tila edustaa systeemin muistia
- ⇒ Kaikki muuttajat jotka edustavat jonkin kertymistä ovat potentiaalisia tilamuuttajia:
- pistemassan paikka (pot. energia) ja nopeus (kin. energia)
  - kondensaattorin jännite (sähkökentän energia)
  - säiliön pinnankorkeus (kertynyt tilavuus)
- Peukalosääntö: muuttajat joiden derivaatta esiintyy vaiheen 2 yhtälöissä, ovat sopivia tilamuuttajiksi
  - Lohkokaavioiden alimallit voidaan pitää erillään!
  - Tilamuuttajien oikea määrä?

# Yksinkertaistukset

- Mallin on aina yksinkertaistus
- Mikä on ”sopiva” yksinkertaistuksen taso?
  - käyttötarkoitus
  - ymmärrys: mallintajan on käsitettävä mallinsa
  - käsiteltävyys: simulointiajat, tulosten tulkinta
  - lisäpiirteiden lisäarvo?
- Käsitellään kolmea eri yksinkertaistussuuntaa
  1. Pienten vaikutusten huomiotta jättäminen
  2. Aikavakioiden separointi
  3. Tilojen yhdistäminen

# 1. Pienten vaikutusten huomiotta jättö

- Tyypillisiä esimerkkejä: oletetaan
  - jäykkä kappale
  - kokoonpuristumaton neste
  - ideaalinen kaasu
  - laminaarinen virtaus jne.
- Mihin vedetään raja?
  - esim. hydraulikkaöljyn kokoonpuristuvuus tyypillisesti 10 %  
=> värähtelyjä systeemissä!
- Lisämallintaminen vaatii lisätyötä, joka voi olla huomattavaa

## 2. Aikavakioiden separointi

- Samassa systeemissä useita aikaskaaloja, ollaan kiinnostuneita vain jostakin
  - usean aikaskaalan diff.yhtälöt hitaita simuloida (kankeus)
- ⇒ Keskitetään mallin konstruointi niihin aikavakioihin, jotka ovat tärkeitä
- ⇒ Nopeiden osasysteemien dynamiikka korvataan algebrallisella yhteydellä
- ⇒ Hitaiden osasysteemien dynamiikka korvataan vakioilla
- Mallin kertaluku pienenee, kankeus häviää
- Mikäli useat aikaskaalat kiinnostavia  $\Rightarrow$  useita malleja

### 3. Tilojen yhdistäminen

- Yhdistetään useita samantyyppisiä tilamuuttujia yhdeksi tilamuuttujaksi
- Yhdistetty tila edustaa keski- tai kokonaisarvoa
  - alkuperäinen tulkinta saatetaan menettää
- Usein käytetty keino jakautuneiden parametrien järjestelmien mallintamiseen
  - diskretoidaan jokin alue, jossa ilmiötä kuvaa ODY
  - kirjoitetaan DY jokaisessa hilakopissa
  - vastaa ODY:n spatiaalista diskretointia

# Fysikaaliset analogiat

- Edellä sivuttiin joitakin samankaltaisuuksia fysiikan eri osa-alueiden välillä
  - taseet, konstitutiiviset yhtälöt, kertyminen
- Vallitsisiko tällainen laajemminkin? Kyllä!
  - fysikaaliset analogiat =>
    - analyttinen systeemidynamiikka
    - bond-graafit
    - matemaattisena mallina differentiaalis-algebralliset yhtälösystemit
- Tarjoaa loistavan abstraktiomallin esim. multifysiikan olio-orientoituneeseen simulointiin
  - mallioliot + tapa kytkeä niitä toisiinsa + numeerinen ratkaisumenetelmä = simulointiohjelmisto
- Tarkastellaan seuraavassa neljän fysiikan osa-alueen analogioita:
  - 1. sähköpiirit 2. mekaniikka 3. virtaukset 4. lämpösystemit

# 1. Sähköpiirit

- Perussuureet jännite  $u$  (*intensiteettimuuttuja*) ja virta  $i$  (*virtamuuttuja*)
- Ideaalinen kela (*intensiteetin kerääjä*):  $u(t) = L \frac{d}{dt} i(t)$ 
  - kääntäen  $i(t) = \frac{1}{L} \int_0^t u(s) ds$
  - energia(kertymä)  $W(t) = 1/2 Li^2(t)$
- Ideaalinen kondensaattori (*virran kerääjä*):  $i(t) = C \frac{d}{dt} u(t)$ 
  - kääntäen  $u(t) = \frac{1}{C} \int_0^t i(s) ds$
  - energia(kertymä)  $W(t) = 1/2 Cu^2(t)$
- Vastus (*staattinen yhteys*):  $u(t) = h_1 i(t)$  (tai  $i(t) = h_2(u(t))$ )
- Teho (*teho*):  $P(t) = u(t)i(t)$
- Muuntaja (*muuntaja*):  $u_1 i_1 = u_2 i_2$ ,  $u_1 = \alpha u_2$ ,  $i_1 = 1/\alpha i_2$
- Kytkenät (Kirchoff) :  $\sum i_k(t) = 0$  (*virtausmuuttujien summa=0*),  
 $\sum u_k(t) = 0$  (*intensiteettimuuttujien summa=0*)

## 2. Mekaniikka

- Perussuureet voima  $F$  ja nopeus  $v$
- Massa:  $F(t) = m \frac{d}{dt} v(t)$ 
  - kääntäen  $v(t) = \frac{1}{m} \int_0^t F(s) ds$
  - energia(kertymä)  $T(t) = 1/2 m v^2(t)$
- Elastiset kappaleet:  $F(t) = H \left( \int_0^t v(s) ds \right)$ 
  - energia esim. lineaariselle jouselle  $T(t) = 1/(2k) F^2(t)$
- Kitka, vastusvoima:  $F(t) = h(v(t))$
- Teho:  $P(t) = F(t)v(t)$
- Vipu, vintturi ja väkipyörä:  $F_1 v_1 = F_2 v_2$ ,  $F_1 = \alpha F_2$ ,  $v_1 = 1/\alpha v_2$
- Tasaisesti liikkuvaan kappaleeseen vaikuttavien voimien summa = 0
- Rotaatiot:  $F \rightarrow M$ ,  $v \rightarrow \omega$ ,  $m \rightarrow J$



### 3. Virtaukset

- Perussuureet paine  $p$  ja virta  $Q$
- Tilavuusvirta putkessa:  $p(t) = a \, d/dt \, Q(t)$ 
  - kääntäen  $Q(t) = \frac{1}{L_f} \int_0^t p(s) ds$
  - energia(kertymä)  $T(t) = 1/2 L_f Q^2(t)$
- Tilavuusvirta tankkiin:  $p(t) = H \left( \int_0^t Q(s) ds \right)$ 
  - energia:  $T(t) = 1/2 C_f p^2(t)$
- Virtausvastus:  $p(t) = h_1(Q(t))$  (kuristin)
- Teho:  $P(t) = p(t)Q(t)$
- tilavuustase  $\Rightarrow$  virtausten summa risteyksissä = 0
- paineiden summa = 0
- ”Hydraulimuuntaja”

## 4. Lämpösystemit

- Perussuureet lämpötila  $T$  ja lämpövirta  $q$
- Kappale lämpenee:  $q(t) = C \frac{d}{dt} T(t)$ 
  - kääntäen  $T(t) = \frac{1}{C} \int_0^t q(s) ds$
- Lämpövirta lämpötilaerolla  $T(t)$ :  $q(t) = WT(t)$  (lämpösilta)
- Energiatase  $\Rightarrow$  lämpövirtojen summa risteyksissä  $= 0$

# Yhteenveto

	Intensiteetti- muuttuja	virtamuut- tuja	Intensiteeti- nin kerääjä	virran kerääjä	staattinen yhteys
engl/määr.	effort $e$	flow $f$	$f = \text{inv}(a) \text{int}(e)$	$e = \text{inv}(b) \text{int}(f)$	$e = h(f)$
sähkö	jännite $u$	virta $i$	kela	kondensaattori	vastus
translaatio	voima $F$	nopeus $v$	kappale	jousi	kitka
rotaatio	momentti $M$	kulmanopeus $\omega$	akseli	vääntäjousi	kitka
nestevirta	paine $p$	virtaus $Q$	putki	säiliö	kuristin
lämpösystemit	lämpötila $T$	lämpövirta $q$	-	lämpenevä kappale	lämpösilta

# Mitä iloa analogioista? Esim. Bond-graafit

- Fysikaalista dynaamista systeemiä kuvaava suunnattu graafi
  - Tehon ja informaation (kausaliteetti) virrat
  - Intensiteetti- ja virtamuuttujat, niitä keräävät komponentit, niiden lähteet
  - Resisttiiviset elementit (muuttujien staattinen yhteys)
  - Solmupisteet: intensiteettien summa = 0, virtausten summa = 0
  - Muuntajat, gyraattorit (esim. eri sovellusaloihin liittyvien systeemien yhdistäminen)
- Keino varmistua mallin oikeellisuudesta
- Tarjoaa erään lähestymistavan tilayhtälöiden automatisoituun muodostamiseen