

Lineaaristen järjestelmien teoriaa

- Saavutettavuus, ohjattavuus
- Tarkkailtavuus, havaittavuus
- Klassisen mekaniikan stabiilisuus vs. systeemitekhninen stabiilisuus
- Tilaestimointi
- Kalman-suodin

Mielenkiintoisia kysymyksiä

- Onko systeemi rakenteeltaan sellainen, että sitä voidaan hallita? (\Rightarrow saavutettavuus/ohjattavuus)
- Tarvitseeko systeemi erityistä hallintaa? (\Rightarrow stabiilisuus)
- Miten sitä hallitaan? (\Rightarrow säätöteoria/-tekniikka)
- Miten hallitaan parhaalla mahdollisella tavalla? (\Rightarrow optimisäätö)
- Mitä systeemin sielunelämästä voidaan sanoa? (\Rightarrow tarkkailtavuus/havaittavuus)
- Miten sielunelämää havaitaan? (\Rightarrow tilahavaitseminen)
 - Kalman-suodin

Ohjattavuuden ja saavutettavuuden määritelmät

- Systeemin hallittavuuden karakterisointi

Systeemi **ohjattava**



On olemassa ohjaus, jolla systeemi saadaan mielivaltaisesta alkutilasta origoon äärellisessä ajassa

Systeemi **saavutettava**



On olemassa ohjaus, jolla systeemi saadaan mielivaltaisesta alkutilasta mihin tahansa tilaan äärellisessä ajassa

- Ohjattavuus ei takaa saavutettavuutta, mutta saavutettava järjestelmä on aina myös ohjattava

Saavutettavuuden testaaminen

- Epälineaarille systeemeille vaikeaa
- Lineaariset systeemit: Aikainvariantti lineaarinen systeemi

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

on saavutettava, jos ja vain jos $n \times n$ -matriisin

$$Q_c = [B \mid AB \mid A^2B \mid \dots \mid A^{n-1}B]$$

rangi on n ($n = \dim x$, $m = \dim u$)

- Rangi = lineaarisesti riippumattomien rivien/sarakkeiden lukumäärä
- Q_c on ns. ohjattavuusmatriisi
- Pätee myös diskreettiaikaisille systeemeille

Saavutettavuuden tulkinta

- Tarkastellaan diskreettiaikaista systeemiä

$$x(t+1) = Ax(t) + Bu(t)$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

- Oletetaan, että alkutila x_0 annettu

- Tila ajanhetkellä n (n systeemin kertaluku) on
$$x(n) = A^n x_0 + \sum_{k=0}^{n-1} A^{n-k-1} Bu(k) = A^n x_0 + Q_c \begin{bmatrix} u(n-1) \\ \vdots \\ u(0) \end{bmatrix}$$

- Jos ohjattavuusmatriisin rangi on n , niin jokainen R^n :n vektori x voidaan esittää muodossa $x = A^n x_0 + Q_c \begin{bmatrix} u(n-1) \\ \vdots \\ u(0) \end{bmatrix}$ eli sopvivalalla ohjausten valinnalla systeemi saadaan alkutilastaan x_0 haluttuun tilaan $x(n)$

- Ratkaisu ei ole yksikäsitteinen, jos ohjauksia on enemmän kuin yksi

Tarkkailtavuuden ja havaittavuuden määritelmät

- Voidaanko systeemin tila rekonstruoida ulostulosta?

Järjestelmä **tarkkailtava**



On mahdollista määrittää alkutila x_0 havaintojen
($y(t), u(t), t \in [t_0, t_1]$) perusteella

- Systeemi on **havaittava**, jos sen ei-tarkkailtavat tilat ovat stabiileja
- Tarkkailtava systeemi on myös havaittava, mutta ei toisinpäin!

Tarkkailtavuuden testaaminen

- Epälineaarille systeemeille ei yleisiä keinoja
- Lineaariset systeemit: Aikainvariantti lineaarinen systeemi

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

on tarkkailtava, jos ja vain jos $n \times n$ -matriisin

$$Q_o = [C^T \mid A^T C^T \mid (A^T)^2 C^T \mid \dots \mid (A^T)^{n-1} C^T]$$

rangi on n ($n = \dim x$, $m = \dim u$), $(\)^T$ on transponointi)

- Q_o on ns. tarkkailtavuusmatriisi
- Pätee myös diskreettiaikaisille systeemeille

Tarkkailtavuuden tulkinta

- Tarkastellaan diskreettiaikaista systeemiä

$$x(t+1) = Ax(t) + Bu(t)$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

- Oletetaan, että $u(t)=0$ ja että ulostulot $y(0), y(1), \dots, y(n-1)$ (n systeemin kertaluku) annettu
- Saadaan ulostulojen joukko $y(0)=Cx(0)$, $y(1)=Cx(1)=CAx(0)$,
 \dots , $y(n-1)=Cx(n-1)=CA^{n-1}x(0)$
- Matriisimuodossa
$$\begin{bmatrix} C \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} x_0 = \begin{bmatrix} y(0) \\ \vdots \\ y(n-1) \end{bmatrix}$$
- Jos tarkkailtavuusmatriisin rangi on n , niin yo. yhtälö määrää $x_0:n$ annetuilla C , A ja $y(t)$, eli alkutila x_0 voidaan määrittää!

Stabiilisuudesta edelleen

- Klassisen mekaniikan stabiilisuuskäsitys; tasapainosta häirityn systeemin käyttäytyminen
 - systeemimatriisin ominaisarvot / siirtofunktion navat vasemmassa puolitasossa / yksikköympyrän sisäpuolella => asympotoottisesti stabiili systeemi
 - ominaisarvoja / siirtofunktion napoja imaginaariakselilla (ei useampikertaisia) / yksikköympyrällä (ei useampikertaisia) => stabiili systeemi
- Systemitekninen stabiilisuus:
 - rajoitetut sisäänmenot saavat aikaan rajoitettuja ulostuloja
 - pienet muutokset sisäänmenoissa saavat aikaan pieniä muutoksia ulostuloissa
 - = sisäänmeno-ulostulo –stabiilisuus
 - = BIBO-stabiilisuus (Bounded Input, Bounded Output)

Yhteys stabiilisuuksien välillä

- Systemi asympotoottisesti stabiili

=>

Systemi sisäänmeno-ulostulo –stabiili

- Systemi sisäänmeno-ulostulo –stabiili sekä saavutettava ja tarkkailtava

=>

Systemi asympotoottisesti stabiili

Tilaestimointi ja tilatarkkailu

- Ongelma: määritä systeemin (sisäinen) tila ulostulon ja/tai systeemin mallin avulla
- Tilan mittaaminen kallista, mahdotonta \Rightarrow konstruoidaan tilatarkkailija \Rightarrow estimaatti tilalle
 - käyttö esim. tilatakaisinkytkennässä
- Ongelmana prosessi- ja mittauskohina \Rightarrow Kalman-suodin
 - keino yhdistää optimaalisesti malli ja mittaus

Tilaestimoinnin vaihtoehdot

1. Datan perusteella
2. Mallin perusteella
3. Datan ja mallin perusteella

Esimerkki:

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -5 & -2 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$
$$y(t) = [1 \quad 0]x(t)$$

Mekaaninen järjestelmä, x_1 =paikka, x_2 =nopeus, ulostulona paikka. Miten voidaan laskea nopeus?

1. Derivoi paikkadata (kohina!)
2. Syötä x_0 ja u järjestelmän malliin, katso miten x_2 kehittyy (tuntemattomat häiriöt virhelähteenä)
3. Ennusta tila mallilla, korjaa ennustetta paikkadatalalla

Tilaestimaattori

- Tarkastellaan lineaarista (kohinatonta) systeemiä

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

- Systeemi

$$\dot{v}(t) = Fv(t) + Gy(t) + Hu(t)$$

$$z(t) = Mv(t) + Ny(t) + Pu(t)$$

on yo. järjestelmän **tilaestimaattori** tai **tarkkailija**, jos mielivaltaisella alkutilalla $x(t_0)$ on olemassa alkutila v_0 s.e. jos $v(t_0) = v_0$ niin $z(t) = x(t)$ kaikilla $t > t_0$ ja kaikilla u

- tavallisesti pyritään muodostamaan niin, että itse v on tilan estimaatti

Täyden kertaluvun tarkkailija

- Systemi

$$\dot{\hat{x}}(t) = F\hat{x}(t) + Gy(t) + Hu(t), \hat{x} \in R^n$$

on ed. järjestelmän **täyden kertaluvun tarkkailija**,

jos ehdosta $\hat{x}(t_0) = x(t_0)$ seuraa $\hat{x}(t) = x(t)$ kaikilla $t > t_0$ ja kaikilla u

- Jos dimensio on pienempi, puhutaan **reduoidun kertaluvun tarkkailijoista**
- Yo. tarkkailija on em. systeemin tarkkailija joss $F=A-LC$, $G=L$, $H=B-LD$
 - L mielivaltainen matriisi

..tarkkailija

- Tällöin tarkkailija on

$$\dot{\hat{x}}(t) = A\hat{x}(t) + Bu(t) + L(y(t) - C\hat{x}(t) - Du(t))$$

- Viimeistä sulkulauseketta kutsutaan **innovaatioksi**
 - mittauksen ja mallin ulostulon erotus
- Tarkkailijan suunnitteluongelma: Valitse L
 - eli valitse miten innovaatio huomioidaan
- Tilahavaintsijan systeemimatriisi on A-LC
 - valitsemalla L sopivasti saadaan tilahavaintsijalle mielivaltainen dynamiikka edellyttäen että systeemi on tarkkailtava

Esimerkki

- Tark. mekaanista järjestelmää

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -5 & -2 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = [1 \quad 0]x(t)$$

- ja tilatarkkailijaa

$$\dot{\hat{x}}(t) = A\hat{x}(t) + Bu(t) + L(y(t) - C\hat{x}(t) - Du(t))$$

- Valitaan $L = [l_1 \quad l_2]'$ vaikka siten että systeemimatriisin (A-LC) ominaisarvot ovat vaikka -5:ssä... $\Rightarrow [l_1 \quad l_2]' = [8 \quad 4]'$

$$\dot{\hat{x}}(t) = \begin{bmatrix} -8 & 1 \\ -9 & -2 \end{bmatrix} \hat{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) + \begin{bmatrix} 8 \\ 4 \end{bmatrix} y(t)$$

Kalman-suodin 1/2

- Edellä on oletettu, että systeemit ja mittaukset ovat kohinattomia
- Miten tila olisi estimoitava, kun systeemi on stokastinen?
- Tarkastellaan lineaarista diskreettiaikaista systeemiä

$$x(t+1) = Ax(t) + Bu(t) + v(t)$$

$$y(t) = Cx(t) + e(t)$$

missä

$\text{Cov}(v(t)) = R_1$, $\text{Cov}(e(t)) = R_2$, $v(t)$ ja $e(t)$ valkoista, keskenään riippumatonta kohinaa

- $v(t)$ prosessikohina, $e(t)$ mittauskohina
- Nyt myös tila ymmärretään satunnaismuuttujaksi

Kalman-suodin 2/2

- Merkitään $\hat{x}(t|t-1)$ a-priori-estimaatti ja $\hat{x}(t|t)$ a-posteriori-estimaatti tilalle hetkellä t

- Ongelma:

Konstruoi mittausten $(u(s), y(s))$, $t \geq s \geq \tau$ ja mallin avulla estimaatti $\hat{x}(t|t)$ s.e. estimointivirheen kovarianssimatriisin jälki

$$E[(x(t) - \hat{x}(t|t))^T (x(t) - \hat{x}(t|t))]$$

minimoituu

- Käytännössä
 - 1) A-priori-estimaatti tilayhtälöstä
 - 2) A-priori-estimaatin päivittäminen a-posteriori-estimaatiksi a-priori-estimaatin ja havaitun ulostulon (mittauksen) avulla

Tilaestimaatin ennustaminen ja päivittäminen

- Tilan a-priori-estimaatti (ennustus):
$$\hat{x}(t | t-1) = A\hat{x}(t-1 | t-1) + Bu(t-1)$$
- Todellisen ja estimoidun mittauksen ero: $y(t) - C\hat{x}(t | t-1)$
- Tilan a-posteriori-estimaatti (päivitys):
$$\hat{x}(t | t) = \hat{x}(t | t-1) + K(t)(y(t) - C\hat{x}(t | t-1))$$
- Estimoitu ulostulo $\hat{y}(t) = C\hat{x}(t | t)$
- Ns. Kalman-vahvistus $K(t)$ määrittää, kuinka paljon painotetaan mittausta ja kuinka paljon estimaattia
 - riippuu mittauksen ja estimaatin luotettavuudesta
 - Kalman-vahvistus lasketaan tilan estimointivirheen kovarianssimatriisin P avulla
 - P :n laskennassa myös ennustus- ja päivitysvaiheet

Kalman-suotimen kaavat

- Tilan ennakointi $\hat{x}(t|t-1) = A\hat{x}(t-1|t-1) + Bu(t-1)$
 - tarvitaan alkuarvo $x(0|0) = x_0$
- Tilan estimointivirheen kovarianssimatriisin ennakointi $P(t|t-1) = AP(t-1|t-1)A^T + R_1$
 - tarvitaan alkuarvo $P(0|0) = P_0$

- Kalman-vahvistus

$$K(t) = P(t|t-1)C^T[CP(t|t-1)C^T + R_2]^{-1}$$

- Tilaestimaatin päivitys $\hat{x}(t|t) = \hat{x}(t|t-1) + K(t)(y(t) - C\hat{x}(t|t-1))$
- Tilan estimointivirheen kovarianssimatriisin päivitys $P(t|t) = P(t|t-1) - K(t)CP(t|t-1)$

- Näin toimimalla virheen kovarianssimatriisin jälki minimoituu!!!!

Tulkinta, käytäntö

- Rekursiivinen algoritmi
 - viimeisin mittaus riittää
 - kovarianssimatriisi säilyttää laskennan kannalta tärkeän informaation
- Kalman-suodin yhdistää mittausdatan ja mallin antaman informaation niiden luotettavuuden suhteessa
 - luotettavuuden mittareita kohinoiden kovarianssit (skaalattuna prosessi- ja ulostulodynamiikoilla)
 - ”suuri” $R_2 \Rightarrow$ ”pieni” vahvistus
- Käytännössä tarvitaan prosessi- ja mittauskohinan kovariansseille estimaatit
 - järkeily
 - mittaukset