Taajuus-, Fourier- ja spektraalianalyysi

- Transientti- ja korrelaatioanalyysi tähtäävät impulssivasteen (askelvasteen) mallintamiseen
  - Kuvaus aikatasossa
- Taajuus- Fourier- ja spektraalianalyysi tähtäävät systeemin taajuusominaisuuksien mallintamiseen:
  - Taajuusvaste
  - Kuvaus taajuustasossa
- Taajuusvaste = systeemin sisäänmenolle aiheuttama vahvistus ja vaihekulman muutos taajuden funktiona:
  - Siirtofunktio $G(s)$ => $s=i\omega$ => taajuusvaste (taajuusfunktio) $G(i\omega)$
- Superpositioperiaate pätee edelleen:
  - Standardisyöte $A\sin \omega t$
  - Yhdistämiskeinona Fourier-sarja

Lineaarisen systeemin taajuusvaste

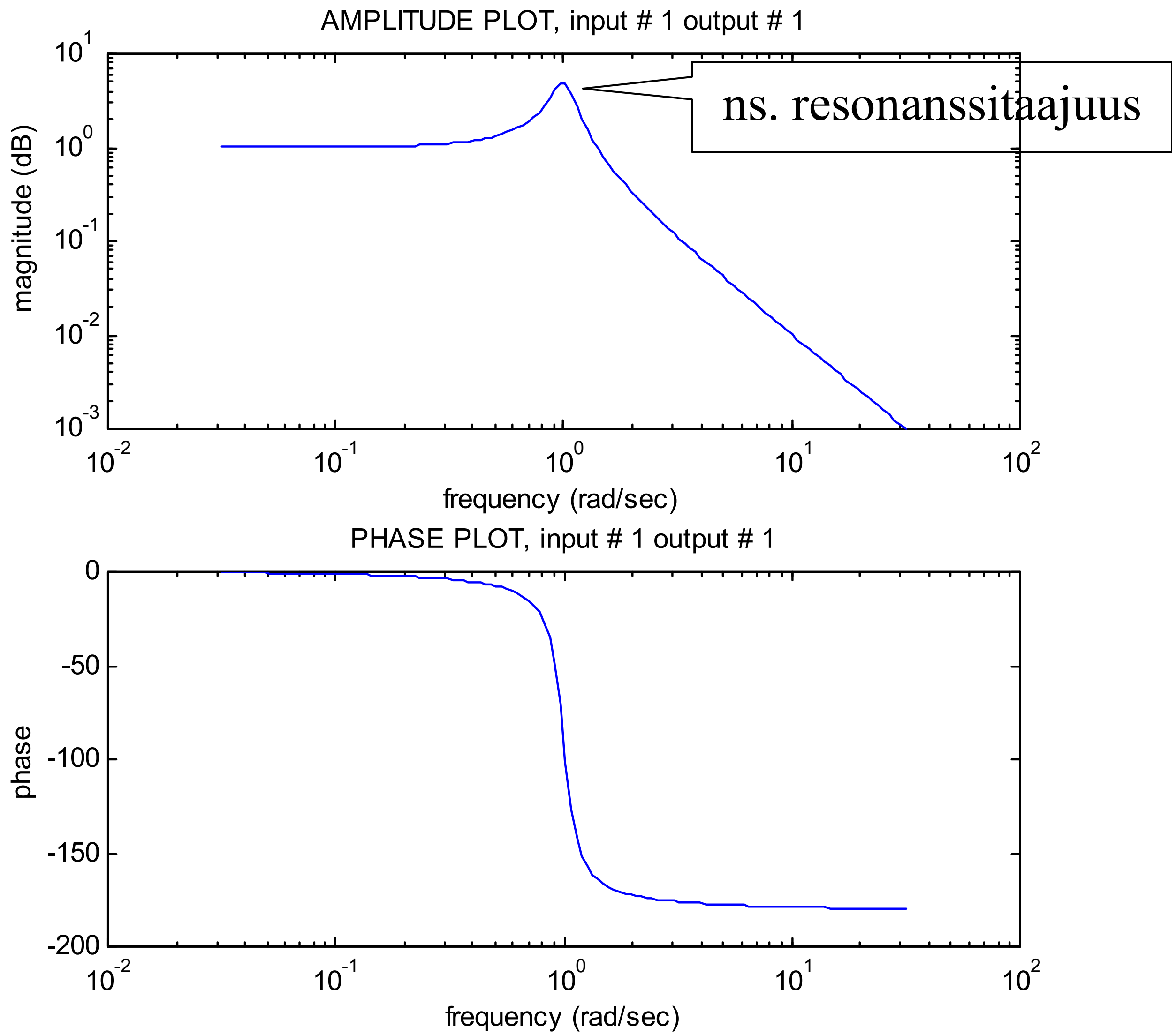
- Olkoon systeemin siirtofunktio $G(s)$, jonka navat vasemmassa puolitasossa
- Valitaan sisäänmeno $u(t)=A\sin\omega t$; mitä tulee ulos?
- Voidaan osoittaa (ks. laskarit), että kun alkutransientit ovat hävinneet, ulos tulee $B\sin(\omega t+\phi)$, jossa
  - $B=A|G(i\omega)|$
  - $\phi=\arg(G(i\omega))$
- **Taajuusanalyysi**: Mitataan B ja ϕ usealla eri ω => taajuusvaste

Boden diagrammi

- Vakiintunut tapa esittää taajuusvaste
- Piirretään amplitudisuhde $\log|G(i\omega)|$ (desibeleinä) ja vaihe-ero (asteina) $\arg(G(i\omega))$ (asteina) taajuuden (logaritminen asteikko) funktiona
- Vastaa näppärästi kysymykseen mitä tapahtuu mielenkiintoisilla taajuuksilla.
- Approksimatiivinen piirto helppoa:
  - esim. sarjaankytkettyjen systeemien diagrammit voidaan laskea yhteen
  - $\log|G_1(i\omega)|\,|G_2(i\omega)| = \log|G_1(i\omega)| + \log|G_2(i\omega)|$
- Muita taajuusvasteen esitystapoja:
  - Nyquistin diagrammi
    - piirretään $G(i\omega)$ kompleksitasoon, kun $-\infty \leq \omega \leq \infty$
  - Nicholsin kartta
    - piirretään amplitudisuhde vaihe-eron funktiona

Esimerkki

- Systeemin G(S)= 1/(s^2+0.2s+1) Boden diagrammi



•Matlab: `bodeplot(th2ff(poly2th([1 0.2 1],1,[],[],[],[],-1)))`

Taajuusanalyysin etuja & haittoja

- Helppo käyttää, ei tarvita erityisiä laskentavirityksiä
- Ei vaadita muita oletuksia systeemistä kuin lineaarisuus
- Kiinnostavat taajuusalueet helppo tutkia tarkemmin
- Tuloksena taulukko tai mittauspisteiden kautta kulkeva interpolaatio:
  - Ei sovellu simulointiin sellaisenaan
  - Siirtofunktion estimointi taajusvasteen avulla?
- Reaalimaailman systeemeillä ei usein voida kokeilla täysin vapaasti
- Vaatii pitkiä mittausaikoja:
  - Alkutransientti
  - Useita mitattavia taajuuksia
  - Mikäli kiinnostavat taajuudet matalia

Fourier-analyysi

- Taajusvaste sisäänmenon ja ulostulon Fourier-muunnosten avulla
- Perusajatus: Y(ω)=G(iω)U(ω) (Fourier-muunnos)
  => G(iω)=Y(ω)/U(ω)
- y(t) ja u(t) tunnetaan vain äärellisellä välillä [0,S]
- Muodostetaan Fourier-muunnoksista Y(ω) ja U(ω) arviot määritelmän perusteella:

$$Y_S(\omega) = \int_0^S y(t)e^{-i\omega t}dt, \quad U_S(\omega) = \int_0^S u(t)e^{-i\omega t}dt$$

⇒ Empiirinen siirtofunktioestimaatti (empirical transfer function estimate, ETFE):

- G^(iω)=Y_S(ω)/U_S(ω)

- perustuu vain mittauksiin ja lineaarisuusoletukseen

Fourier-analyysi käytännössä

- $u(t)=u_0\cos\omega_* t$ ja $S=k\pi/\omega_*$, $k=1,2,\ldots$ => $U_S(\omega_*)=u_0S/2$, muuten $U_S(\omega)=0$
- Tällöin ETFE on

$$\hat{G}_S(i\omega_*)=\frac{2}{u_0S}\left(\int_0^S y(t)\cos(w_*t)dt-i\int_0^S y(t)\sin(w_*t)dt\right.$$

- Helppo laskea: korreloidaan y(t) sinin ja kosinin kanssa
- Käytännössä integraaleja approksimoidaan (diskreetti Foureir-muunnos):

$$Y_S(\omega)=T\sum_{k=1}^{N}y(kT)e^{-i\omega kT},U_S(\omega)=T\sum_{k=1}^{N}u(kT)e^{-i\omega kT}$$

  - T= näytteenottoväli ja S=NT
  - Jakso 2π => riittää laskea välille $0\le\omega\le 2\pi$, valitaan $\omega=r2\pi/N$, $r=0,\ldots,N-1$
- Nopea Fourier-muunnos (FFT, Fast Fourier Transform)
  - diskreetti Fourier-muuntaminen vaatii N^2 laskutoimitusta
  - FFR vaatii $N\log_2 N << N^2$ laskutoimitusta

ETFE:n tarkkuus

- ETFE:n ja todellisen taajuusvasteen ero (kirja 8.23 ja Appendix 8.8) riippuu
  - käytetystä ohjauksesta ja sen taajuussisällöstä
  - systeemin ominaisuuksista (impulssivaste)
  - signaali-kohinasuhteesta
- Jos u(t):ssä on sinikomponentti tietyllä taajuudella ja häiriössä ei, virhe ko. taajudella pienenee S:n kasvaessa
- Muuten määräävä tekijä on signaali-kohinasuhde
- Fourier-analyysi tuottaa hyviä taajusvasteen estimaatteja, jos sisäänmenossa sinikomponenttejä
  - muuten estimaatit saattavat olla epätarkkoja

Spektraalianalyysi

- Taajuusvaste sisäänmenon ja ulostulon spektrien avulla
- Aiemmin todettu, että systeemille y(t)=G(p)u(t)+v(t) pätee
  - $\Phi_{yu}(\omega)=G(i\omega)\Phi_u(\omega)$ (1)
  - $\Phi_y(\omega)=|G(i\omega)|^2\Phi_u(\omega)+\Phi_v(\omega)$ (2)
- Näinollen (1):stä saadaan (vrt. ETFE)

$$\hat{G}_N(i\omega)=\hat{\Phi}_{yu}^N(\omega)/\hat{\Phi}_u^N(\omega)$$

- (2):sta voidaan estimoida häiriön v(t) spektri:

$$\hat{\Phi}_v^N(\omega)=\hat{\Phi}_y^N(\omega)-|\hat{\Phi}_{yu}^N(\omega)|^2/\hat{\Phi}_u^N(\omega)$$

- Yllä on käytetty sopivia spektrin estimaatteja N:n mittauksen pohjalta
- Spektreille tarvitaan estimaatit!

Spektrin estimointi

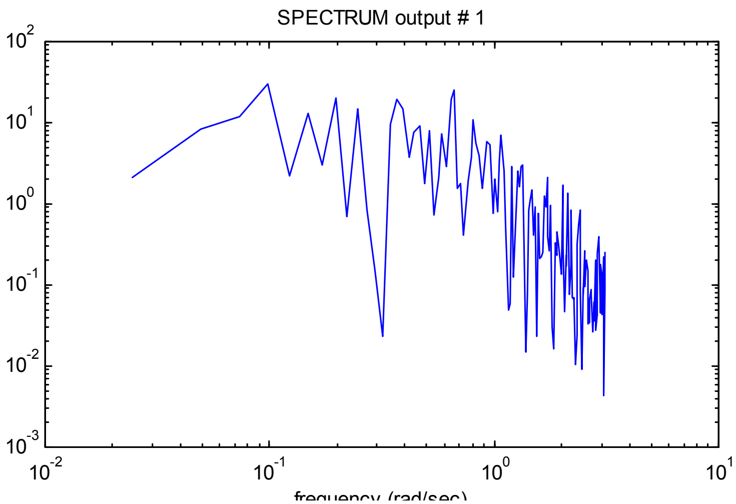
- Signaalin u(t) spektri $\Phi_u(\omega)$:
  - Kertoo u(t):n keskitaajuussisällön / energian taajuusjakauman
  - u(t):n Fourier-muunnoksen itseisarvon neliö (deterministinen signaali)
- Ol. että u(t):tä on havaittu T:n välein
  - Datasta saadaan vain näytteistetyn signaalin spektri
  - Jos T pieni verrattuna u(t):n taajuussisältöön, ero on pieni
  - Oletetaan seuraavassa että **T=1**
- Suoraan määritelmästä saadaan **periodogrammi**:

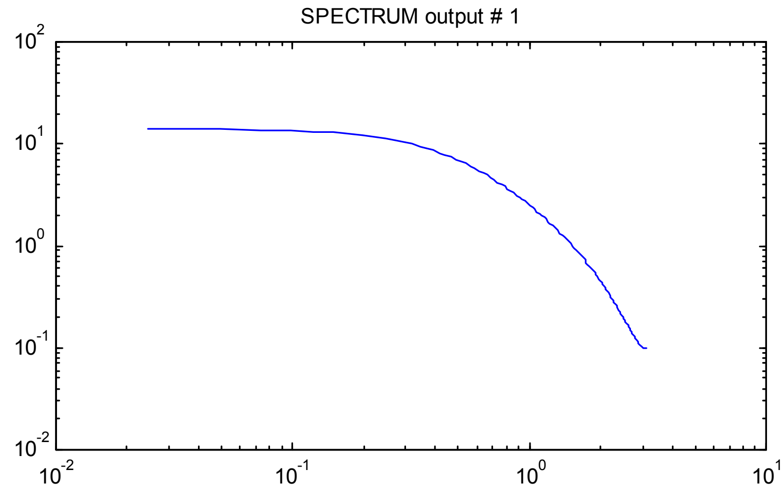
$$\hat{\hat{\Phi}}_N(\omega) = \frac{1}{N} | U_N(\omega) |^2, \quad U_N(\omega) = \sum_{k=1}^{N} u(k) e^{-i\omega k}$$

- Huom! Näytteenottoväli T => näytteenotto(kulma)taajuus $2\pi/T$ => Nyquist-taajuus π/T => periodogrammi toimii, kun $-\pi/T \leq \omega \leq \pi/T$

Esimerkki

- ARMA-prosessin y(t)=0.6*y(t-1)+0.5e(t-1)+e(t) realisaation periodogrammi (N=10000) ja todellinen spektritiheys





Periodogrammin ominaisuuksia

- Tyypillisiä ominaisuuksia:
  - Periodogammi on hyvin epätasainen
  - Puhtaat sinikomponentit näkyvät piikkeinä
- Antaa kohtuullisen kuvan signaalin taajuusisällöstä
- Jos u(t) on stokastinen prosessi, periodogrammi on satunnaismuuttuja:
  - Odotusarvo yhtyy todellisen spektrin odotusarvoon (8.26)
  - Varianssi EI lähesty nollaa N:n kasvaessa (8.27) => epätasaisuus!
  - eri taajuuksien estimaatit eivät korreloi (8.28)
- Taajuusresoluutio: mitkä taajuudet eroavat toisistaan?
  - Periodogrammin resoluutio on $2\pi/N$

Keinoja pienentää varianssia

- Periodogrammin varianssi usein turhan suuri
- Spektriestimaatin toivottu ominaisuus sileys
  - trade-off: tasoittaminen huonontaa taajuusresoluutiota

1. Usean riippumattoman estimaatin keskiarvottaminen (Welchin menetelmä)
2. Keskiarvotetaan läheisten (korreloimattomien by 8.28) lähitaajuksien kanssa => ikkunointi (Blackman-Tukeyn menetelmä)

1. Tasoittaminen keskiarvottamalla

- Jaetaan signaali R:ään (mahdollisesti osin päällekkäiseen) segmenttiin
- Periodogrammi kullekin segmentille
  - sopivin valinnoin tehokas laskenta FFT:llä
- Spektriestimaatti saadaan näiden periodogrammien keskiarvona (8.29)
- Jos ei päällekkäisyyttä, niin
  - spektriestimaatin varianssi pienenee R:ään verrannollisesti
  - taajuusresoluutio huononee R:ään verrannollisesti
- Ristispketrin estimointi samassa hengessä

2. Tasoittaminen ikkunoimalla

- Muodostetaan estimaatti taajuudella ω laskemalla painotettu keskiarvo periodogrammista:

$$\hat{\Phi}_N(\omega) = \int_{-\pi}^{\pi} W_\gamma(\omega - \xi)\hat{\hat{\Phi}}_N(\xi)d\xi, \quad \int_{-\pi}^{\pi} W_\gamma(\omega)d\omega = 1$$

- $W_\gamma(\omega)$ on painofunktio (ikkunafunktio):
  - Parametri γ kuvaa ikkunan leveyttä
  - leveä ikkuna => tasainen spektri vs. kapea ikkuna => hyvä taajuusresoluutio

Implementointi aikatasossa

- Taajuustasossa implementointi tehotonta
- Em. integraali aikatasossa ilmaistuna on (Appendix 8.8):

$$\hat{\Phi}_N(\omega) = \sum_{k=-\gamma}^{\gamma} w_\gamma(k)\hat{R}_u^N(k)e^{-i\omega k}; w_\gamma(k) = \int_{-\pi}^{\pi} W_\gamma(\xi)e^{i\xi k}d\xi$$

- $R\hat{}^N{}_u(k)$ on u:n autokovarianssin estimaatti viiveellä k
- Aikaikkuna $w_\gamma(k)$ oletettu nollaksi kun $|k|>\gamma$
  - rajaa mahdolliset ikkunafunktiot
- Paljon käytetty on Hamming-ikkuna:
  - γ kasvaa => tasoitetun periodogrammin taajuusresoluutio pienenee (hyvä asia) ja varianssi kasvaa (ei niin hyvä asia)

Blackman-Tukey -spektriestimaatti

1. Valitse aikaikkuna $w_\gamma(k)$ (Hamming ok)
2. Valitse ikkunanleveysparametri γ (tämä jää analyytikon vastuulle, muuten voi pitää silmät kiinni!!)
3. Laske u:n autokovarianssin (symmterinen) esitimaatit 0:sta γ:aan
4. Laske $\Phi\hat{}_N(\omega)$ edellä kuvatun mukaisesti

- Huom. 1) edellä oletettu että T=1. Jos näin ei ole, on spekriestimaatti skaalattava:

$$\hat{\Phi}_N^0(\xi) = T\hat{\Phi}_N(\xi T), -\pi / T \leq \xi \leq \pi / T$$

- Huom. 2) Myös ristispektri voidaan estimoida samaan tapaan korvaamalla autokovarianssi ristikovarianssilla (8.42, 8.43)

Taajuusvasteen estimointi (Spectral Analysis, SPA)

1. Kerää data y(k), u(k), k=1,...,N; keskiarvota
2. Muodosta spektriestimaatit
   - joko tasoittaminen keskiarvottamalla
   - tai tasoittaminen ikkunoimalla
3. Laske systeemin taajuusvaste kaavasta

$$\hat{G}_N(i\omega) = \hat{\Phi}_{yu}^N(\omega) / \hat{\Phi}_u^N(\omega)$$

5. Tarvittaessa laske (malli häiriölle, vrt. luento nro 3) häiriön spektri kaavasta

$$\hat{\Phi}_v^N(\omega) = \hat{\Phi}_y^N(\omega) - |\hat{\Phi}_{yu}^N(\omega)|^2 / \hat{\Phi}_u^N(\omega)$$

Yhteenveto spektraalianalyysistä

- Paljon käytetty identifiointimenetelmä
- Yleispätevä menetelmä
  - vaatii ainostaan lineaarisuusoletuksen
  - ei vaadi erityisiä herätteitä
- Sopivalla γ:n valinnalla saadaan hyvä kuva systeemin taajuusominaisuuksista
- Tulos ei kelpaa suoraan simulointiin
  - siirtofunktion estimointi/päättely estimoidun taajuusvasteen avulla
- Spektraalianalyysi ei toimi takaisinkytketyissä systeemeissä
  - u ja v korreloituneita, perusyhtälöt (1) ja (2) (kirja, 8.45 ja 8.46) eivät päde

Yhteenveto - epäparametriset identifiointimenetelmät

- Käsitelty
  - Transientti- ja korrelaatioanalyysi => impulssi- ja askelvaste
  - Taajuus-, Fourier- ja spektraalianalyysi => taajuusvaste
- Tulokset kvalitatiivisluontoisia:
  - Yleiskuva systeemistä
  - Eivät sovellu suoraan simulointiin
  - Ohjaavat jatkotutkimuksia ja koesuunnittelua:
    esim. kiinnostavat taajuudet
  - Voidaan käyttää hyväksi siirtofunktion estimoinnissa