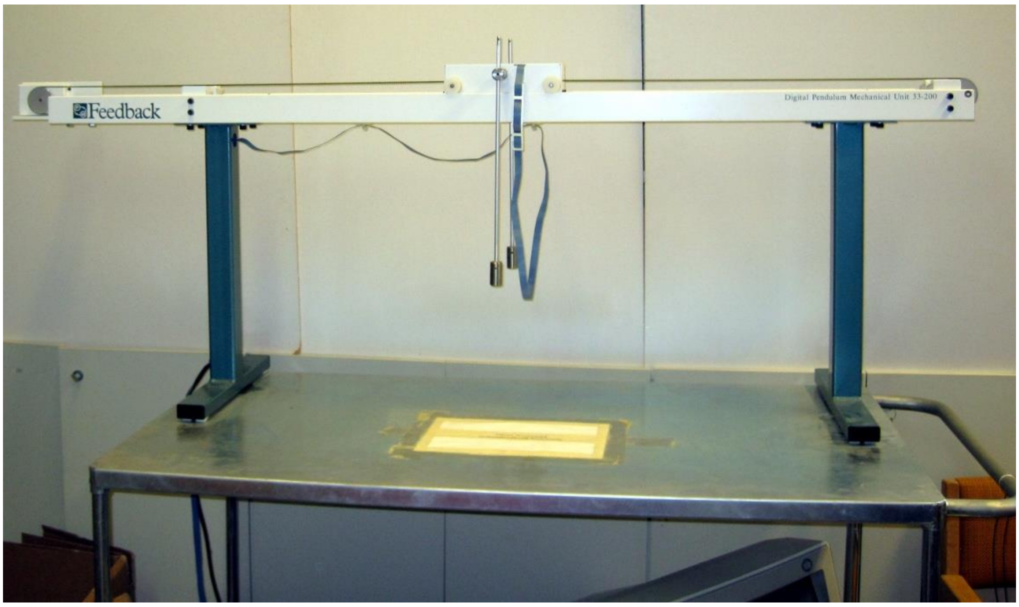
Aalto-yliopisto
Perustieteiden korkeakoulu
Matematiikan ja systeemianalyysin laitos

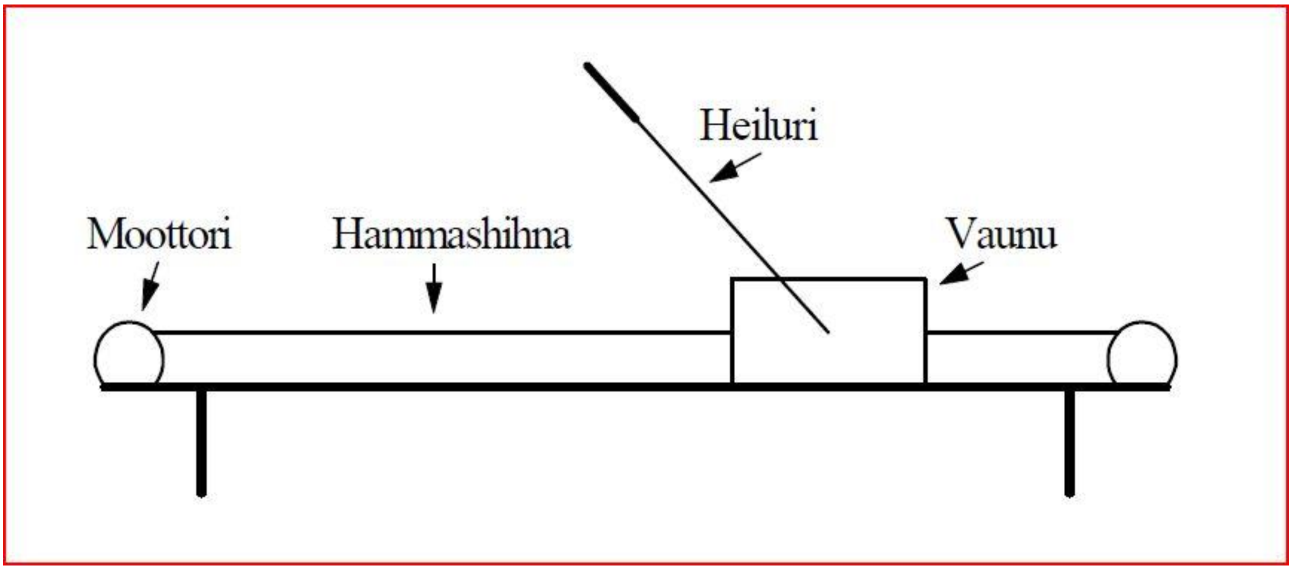
MS-E2129 Systeemien identifiointi
3. Harjoitustyö – Heiluri-vaunusysteemin parametrien estimointi

Yleistä

Systeemianalyysin laboratoriossa on opetus- ja demonstraatiokäyttöön tarkoitettu heilurirata, jolla voi tutkia mm. erilaisia ohjausalgoritmeja. Heilurirata koostuu vaakasuoraan pyörillä liikkuvasta vaunusta ja tähän kiinnitetystä vapaasti heiluvasta heilurista. Vaunu on kytketty hammashihnalla tasavirtamoottoriin, jolla siihen voidaan kohdistaa halutun suuruinen vaunun liikkeen suuntainen ohjausvoima. Heiluriradan päässä on pulssianturi, joka mittaa vaunun paikkaa. Vaunussa on vastaavanlainen anturi, joka mittaa heilurin asentoa. Molemmat anturit ovat inkrementaalisia eli ne mittaavat itse asiassa paikan ja kulman muutoksia, jotka välitetään I/O-kortin avulla tietokoneelle, jossa vaunun ja heilurin hetkelliset paikat ja nopeudet voidaan laskea. Heilurirata on esitetty Kuvassa 1, ja sen periaatepiirros on esitetty Kuvassa 2.



Kuva 1: Systeemianalyysin laboratoriosta löytyvä heilurirata.



Kuva 2: Periaatepiirros heiluriradasta.

Systeemille voidaan johtaa fysiikan lakien avulla epälineaarinen differentiaaliyhtälömalli, joka sisältää parametreina heilurin varren pituuden, vaunun ja heilurin massat, sekä vaunun liikettä ja heilurin pyörimistä vastustavat kitkatermit. Tämän harjoitustyön tarkoituksena on estimoida tuntemattomat kitkaparametrit datan avulla, joka on kerätty todellisesta heilurisysteemistä päästämällä systeemi jostain alkutilasta vapaasti heilumaan (ohjaus $u = 0$). Työssä siis systeemin malli on johdettu fysikaalisilla perusteilla, eikä sopivaa mallirakennetta tarvitse identifioida (katso esim. Söderström-Stoica, sivu 4-5, kappale ”Mathematical modelling and system identification”).

Usein epälineaariset mallit kirjoitetaan suljetussa muodossa systeemin dynamiikkaa kuvaavien differentiaaliyhtälöiden ratkaisuna. Tässä työssä differentiaaliyhtälöitä ei kuitenkaan voida analyyttisesti ratkaista, ja näin ollen parametrit täytyy estimoida sovittamalla differentiaaliyhtälöistä numeerisesti laskettu ratkaisu todelliseen havintoaineistoon.

Heilurin fysikaalinen malli

Systeemin tila voidaan kuvata neljällä tilamuuttujalla:

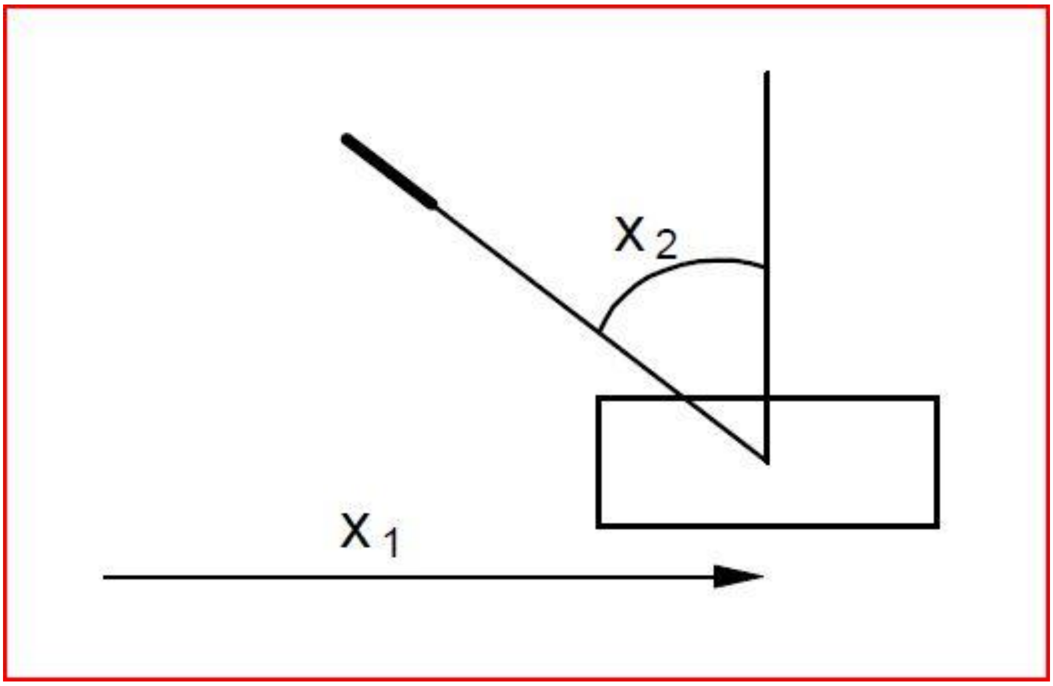
x_1 = vaunun paikka

x_2 = heilurin kulma

x_3 = vaunun nopeus

x_4 = heilurin kulmanopeus

Näistä muuttujat x_1 ja x_2 on esitetty Kuvassa 3.



Kuva 3: Tilamuuttujat x_1 ja x_2.

Mallissa tarvitaan seuraavia parametreja:

m_c = vaunun massa

m_p = heilurin massa

l = heilurin varren pituus

u = vaunun liikeradan suuntainen ulkoinen voima (ohjaus)

f_c = vaunun liikkeen kitkaparametri

f_p = heilurin pyörimisen kitkaparametri

Tehdään oletus, että vaunun ja heilurin massat ovat pistemäisiä ja heilurin varren massa on nolla. Oletetaan lisäksi, että vaunun liikkeen kitkavoima on suoraan verrannollinen vaunun nopeuteen ja heilurin pyörimisen kitkamomentti on suoraan verrannollinen pyörimisnopeuteen. Laskujen helpottamiseksi sisällytetään heilurin varren pituus (joka on vakio) kertoimeen, jolloin kitkat vaikuttavat seuraavalla tavalla:

$$F_c = -f_c x_3$$

$$F_p = \frac{M_p}{l} = \frac{-f_p l x_4}{l} = -f_p x_4$$

missä F_c on vaunuun kohdistuva sen liikkeeseen nähden vastakkaissuuntainen voima ja F_p on heiluriin kohdistuva pyörimisliikettä vastustava voima. Systeemille johtaa seuraavanlaiset tilayhtälöt (1):

$$\frac{dx_1}{dt} = x_3$$
$$\frac{dx_2}{dt} = x_4$$
$$\frac{dx_3}{dt} = \frac{m_p g \cos x_2 \sin x_2 - f_p x_4 \cos x_2 - l m_p x_4^2 \sin x_2 - f_c x_3 + u}{m_p \sin^2 x_2 + m_c}$$
$$\frac{dx_4}{dt} = \frac{(m_p + m_c) g \sin x_2 - m_p l x_4^2 \sin x_2 \cos x_2 - f_c x_3 \cos x_2 - f_p x_4 \frac{m_c + m_p}{m_p} + \cos x_2 \, u}{l(m_p \sin^2 x_2 + m_c)}$$

Systeemin parametrien estimointi

Työssä halutaan siis estimoida epälineaarisen differentiaaliyhtälösysteemin (2)

$$\frac{dx}{dt} = f(x(t), c, t), x(0) = x_0$$

parametrivektori $c = [f_c \quad f_p]$ siten, että ratkaisu $x(t)$ sopii mahdollisimman hyvin todellisesta systeemistä mitattuun dataan.

Olkoon systeemin tila mitattu tiettyinä ajanhetkinä $t = 1, \ldots, n$. Sovituksen hyvyyden mittariksi voidaan valita neliövirhe (3):

$$V(c) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \left[\left(x(t_i; c) - x_{ref}(t_i) \right)^T R \left(x(t_i; c) - x_{ref}(t_i) \right) \right]$$

missä:

$x_{ref}(t_i)$ = todellisen systeemin mitattu tila hetkellä t_i.

$x(t_i; c)$ = yhtälön (2) antama ratkaisu hetkellä t_i, parametreilla c, alkuarvolla $x_0 = x_{ref}(t_0)$.

R = symmetrinen positiividefiniitti painomatriisi.

Pyrkimyksenä on siis löytää estimaattivektori

$\tilde{c} = \mathrm{argmin}_c \, V(c)$

Tiedostot

Harjoitustyötä varten on annettu valmiiksi seuraavat tiedostot. Tutustu niihin huolellisesti.

- estim.m – Toimii (erittäin) vanhoissa MATLABin versioissa
- estim2.m – Toimii uudemmissa MATLABin versioissa
- pendobj.m
- pendode.m
- optpar.m
- virhepinta.m
- data1.mat, data2.mat, data3.mat, data4.mat

Tehtävät

1. Lausu systeemin tila hetkellä t_i tilayhtälön avulla (Siis kuinka $x(t_i)$ saadaan laskettua differentiaaliyhtälösysteemistä (2), kun alkutila on $x(t_0)$? Periaatteen esittäminen riittää).

2. Osoita, että mikäli ohjaus $u = 0$ ja massoja m_c ja m_p ei tunneta, ei parametrien arvoja voida yksikäsitteisesti estimoida. Toisin sanoen, jos mallin tuntemattomana parametrivektorina on $c = [m_c \quad m_p \quad f_c \quad f_p]$ ei seuraava implikaatio päde:

   $$f(x, c^*, t) = f(x, c, t)\ \forall x, \forall t\ \rightarrow c^* = c$$

   Osoita, että jos massat tunnetaan ja $c = [f_c \quad f_p]$, implikaatio kuitenkin pätee.

3. Matlab-ajotiedosto `virhepinta.m` piirtää annetulla testidatalla kriteerifunktion (3) arvojen muodostaman pinnan eri kitkaparametrin arvoilla. Tiedostoissa `data1.mat`, ..., `datan.mat` on valmiiksi kerättyä dataa todellisen heilurin käyttäytymisestä erilaisilla koesuunnitelmilla. Ohjaus $u = 0$ kaikissa aineistoissa. Data on annettu matlab-muuttujatiedostoina, joissa muuttujan nimi on tiedoston nimi (esim. `load data3.mat` lataa muuttujan `data3`).

   Testidata tulee määritellä matriisissa `x_ref`, jossa jokainen sarake on yksi trajektorin piste, ja data on riveittäin seuraavasti:

   1. rivi: vaunun paikka
   2. rivi: heilurin kulma
   3. rivi: vaunun nopeus
   4. rivi: heilurin kulmanopeus
   5. rivi: aika

   Mieti miten painomatriisi R kannattaa valita (helpointa on tietysti käyttää diagonaalimatriisia, jossa diagonaalialkiot painottavat sopivasti eri tilamuuttujien virheitä).

   Tutki virhepinnan muotoa erilaisilla datoilla. Miten estimointiaineisto vaikuttaa virhepinnan muotoon (vertaa esim. aineistoa, jossa heiluri heiluu pienellä amplitudilla ja aineistoa, jossa heiluri pyörii vauhdilla akselinsa ympäri)? Voit ottaa datasta lyhyempiä pätkiä tai harventaa aikapisteitä (esim. `x_ref=data3(:,101:200)` ottaa datan keskeltä 100 aikapistettä). Mitä voit virhepinnan muodon perusteella päätellä estimoinnin tarkkuudesta? Minkälainen data kannattaa mielestäsi valita estimointiin? (Ohjelman ajaminen kestää tuskastuttavan kauan, tämän helpottamiseksi voit harventaa aikapisteitä ja pisteistöä, jossa virhefunktio lasketaan)

   Parametriestimoinnissa pyritään löytämään virhepinnan minimi. Matlab-ajotiedostossa `estim.m` tai `estim2.m` on ohjelmapohja, joka minimoi funktion (3) kitkaparametrien suhteen. Algoritmi ei käytä analyyttisesti laskettuja kohdefunktion gradientteja, vaan laskee ne numeerisesti differenssiaproksimaatiolla. Datapisteiden määrä ei ole rajoitettu, mutta pisteiden lukumäärän kasvattaminen hidastaa luonnollisesti optimointia.

Estimoi kitkaparametrit muokkaamalla ohjelmatiedostoa haluamallasi tavalla ja käyttämällä erilaisia estimointidatoja. Löytääkö estimointialgoritmi virhefunktion minimin (vrt. virhepinnan tarkastelu)? Vaihtelevatko estimaattejen arvot paljon eri datoilla?

4. Valitse estimaatit ja mieti miten voisit validoida mallin käyttämällä eri dataa kuin estimoinnissa. Jos et saa tyydyttävää tulosta, pohdi mahdollisia syitä.