

1A Satunnaisluvut, satunnaisvektorit ja niiden jakaumat

Ensimmäisen harjoituksen tavoitteena on kerrata todennäköisyyden peruskäsitteitä, jotka ovat välttämättömiä stokastisten prosessien käsittelyssä. Kertaamisen apuna voi käyttää esim. luentomonisteita [Koi09, Les13] tai vapaasti verkosta ladattavaa kirjaa [GS97].

Tuntitehtävät

1A1 HIFK ja Tappara mittelevät jääkiekon SM-liigan mestaruudesta pelaamalla sarjan otteluita paras kolmesta -järjestelmällä, jolloin kaksi voittoa ottanut joukkue voittaa mestaruuden. Oletetaan, että otteluiden tulokset ovat toisistaan riippumattomia ja Tappara voittaa kunkin ottelun todennäköisyydellä $p = 0.55$.

- (a) Millä todennäköisyydellä Tappara vie mestaruuden?
- (b) Mikä on todennäköisyys, että mestaruus ratkeaa vasta kolmannessa pelissä?
- (c) Mikä on ratkaisuun tarvittavien pelien lukumäärän odotusarvo?

Pohditaan mahdollista SM-liigan sääntömuutosta. Analysoi seuraavaksi ottelusarjaa, jossa käytetään paras seitsemästä -järjestelmää, jolloin neljä voittoa ottanut joukkue voittaa mestaruuden:

- (d) Millä todennäköisyydellä Tappara nyt vie mestaruuden?
- (e) Mikä on todennäköisyys, että mestaruus ratkeaa vasta seitsemännessä pelissä?

1A2 Tero Pitkämäki heittää yleisurheilukilpailussa keihästä kuusi kertaa. Oletetaan, että heittojen pituudet metreinä (Z_1, \dots, Z_6) ovat riippumattomia jatkuvan välin $(80, 92)$ tasajakaumaa noudattavia satunnaislukuja.

- (a) Laske Teron ensimmäisen heittotuloksen odotusarvo ja varianssi.
- (b) Selvitä satunnaisluvun $Y = \max(Z_1, \dots, Z_6)$ kertymäfunktio F_Y ja tiheysfunktio f_Y sekä laske todennäköisyys, että Teron pisin heitto kantaa vähintään 91 metriä.
- (c) Selvitä satunnaisvektorin (Z_1, Z_6) (yhteis)tiheysfunktio f_{Z_1, Z_6} .
- (d) Selvitä satunnaisvektorin (Z_1, Y) (yhteis)tiheysfunktio $f_{Z_1, Y}$.
- (e) Selvitä satunnaisluvun $X = \min(Z_1, \dots, Z_6)$ kertymäfunktio F_X ja laske todennäköisyys, että vähintään yksi Teron heitoista jää alle 85 metrin.
- (f) Ovatko X ja Y riippuvat vai riippumattomat? Perustele vastauksesi.

Kotitehtävät

1A3 Olkoon X satunnaisluku, joka noudattaa joukon $\mathbb{Z}_+ = \{0, 1, 2, \dots\}$ geometrista jakaumaa onnistumistodennäköisyydellä $p \in (0, 1)$, jolloin X :llä on pistemassafunktio

$$\pi_X(k) = (1 - p)^k p, \quad \text{kun } k = 0, 1, 2, \dots$$

- (a) Määritä ehdollinen todennäköisyys $\mathbb{P}[X \geq t + h \mid X \geq t]$ kokonaisluville $t, h \geq 0$.
- (b) Laske X :n odotusarvo ja varianssi.

Olkoon Y satunnaisluku, joka noudattaa eksponenttijakaumaa vauhtiparametrilla $\lambda > 0$, jolloin Y :llä on tiheysfunktio

$$f_Y(x) = \lambda e^{-\lambda x} 1_{(0, \infty)}(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & \text{kun } x > 0, \\ 0, & \text{muuten.} \end{cases}$$

- (c) Määritä ehdollinen todennäköisyys $\mathbb{P}[Y > t + h \mid Y > t]$ reaali- t ja $h > 0$.
- (d) Laske Y :n odotusarvo ja varianssi.

1A4 Olkoon $X = (X_1, X_2, X_3)$ tilajoukossa $S = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1), (1, 1, 1)\}$ tasajakautunut satunnaisvektori. Tällöin (X_1, X_2, X_3) :n jakauma voidaan esittää käyttäen pistemassafunktiota¹ (pmf)

$$\pi_X(x_1, x_2, x_3) = \begin{cases} \frac{1}{4}, & \text{jos } (x_1, x_2, x_3) \in S, \\ 0, & \text{muutoin.} \end{cases}$$

- (a) Määritä satunnaisluvun X_i pmf $\pi_{X_i}(x_i)$ kullekin i .
- (b) Määritä satunnaisvektorin (X_i, X_j) pmf $\pi_{(X_i, X_j)}(x_i, x_j)$ kaikille $i < j$.
- (c) Ovatko satunnaisvektorin (X_i, X_j) komponentit riippumattomat, kun $i < j$?
- (d) Ovatko X_1, X_2, X_3 riippumattomat?

Viitteet

[GS97] Charles M. Grinstead and J. Laurie Snell. *Introduction to Probability*. American Mathematical Society, http://www.dartmouth.edu/~chance/teaching_aids/books_articles/probability_book/book.html, 1997.

[Koi09] Petri Koistinen. Todennäköisyyslaskennan kurssin luentomoniste. <http://www.rni.helsinki.fi/~pek/papers/tn09.pdf>, 2009.

¹Satunnaisvektorin X pistemassafunktio (engl. probability mass function) on kuvaus $x \mapsto \mathbb{P}[X = x]$. Tätä funktiota kutsutaan myös termeillä todennäköisyysfunktio, pistetodennäköisyysfunktio tai tiheysfunktio.