

1B Markov-ketjun hetkittäinen käyttäytyminen

Tämän harjoituksen tavoitteena on oppia muodostamaan Markov-malleja satunnaisilmiöille, piirtämään tiettyä siirtymämatriisia vastaava siirtymäkaavio ja laskemaan Markov-ketjujen hetkittäisiä jakaumia matriisilaskennan keinoin. Jos mahdollista, harjoitukseen kannattaa tuoda mukaan kannettava tietokone tai laskin, jolla voi laskea tehtävissä esiintyvien matriisilaskujen lukuarvot.

Tuntitehtävät

1B1 Tarkastellaan tähtimäistä verkkoa, jonka solmujoukko on $V = \{1, 2, \dots, n\}$, ja joka sisältää linkit $1 \rightarrow x$ ja $x \rightarrow 1$, $x = 2, 3, \dots, n$, mutta ei muita linkkejä.

- Piirrä verkko ja kirjoita sen naapuruusmatriisi G tapauksessa $n = 4$.
- Tarkista, että luentomonisteen PageRank-mallin yhteydessä (esimerkki 2.3) määritelty matriisi P todella on siirtymämatriisi, eli että P :n alkiot ovat ei-negatiivisia ja rivisummat ykkösiä.
- Kirjoita siirtymämatriisi P ja piirrä sen siirtymäkaavio tapauksessa $n = 4$ vaimenuskertoimen arvoille $c = 1/2$, $c = 0$ ja $c = 1$. Miten kuvailisit Markov-ketjun käyttäytymistä tapauksessa $c = 1$?
- Oletetaan, että $c \in (0, 1)$. Mikä on todennäköisyys että solmusta 1 käynnistyvä ketju löydetään yhden ajanhetken kuluttua solmusta 1?
- Entä kahden ajanhetken kuluttua?

1B2 Kalvonvääntäjät Oy on liikkeenjohdon konsulttiyhtiö, jonka työntekijät on jaoteltu kolmeen palkkaluokkaan: 1 = 'juniorit', 2 = 'seniorit' ja 3 = 'partnerit'. Viikon alussa junioriasemassa oleva työntekijä ylenee senioriksi tn:llä 0.03 ja muuten jatkaa samassa asemassa seuraavan viikon alussa. Vastaavasti seniori ylenee partneriksi tn:llä 0.01 ja muuten jatkaa samassa asemassa. Partnerin oletetaan jatkavan samassa asemassa hamaan tulevaisuuteen. Oletetaan yksinkertaisuuden vuoksi, että työntekijät eivät poistu yhtiön palveluksesta tarkasteltavalla aikajänteellä.

- Mallinna yksittäisen työntekijän palkkaluokkaa tilajoukon $S = \{1, 2, 3\}$ Markov-ketjuna, kirjoita ketjun siirtymämatriisi ja piirrä siirtymäkaavio.
- Laske juniorina aloittavan työntekijän palkkaluokan tilajakauma 10 viikon jälkeen.
- Millä todennäköisyydellä yhtiön palvelukseen palkattu juniori on ylentynyt partneriksi vuoden kuluessa?
- Millä todennäköisyydellä yhtiöön senioriksi palkattu henkilö ei ole ylentynyt partneriksi vuoden kuluttua?

Kotitehtävät

1B3 Syyskuun säätilaa pääkaupunkiseudulla mallinnetaan tila-avaruuden $S = \{1, 2, 3\}$ diskreettiaikaisella Markov-ketjulla, jossa 1 = 'sateista', 2 = 'pilvistä' ja 3 = 'aurinkoista', ja siirtymämatriisi on

$$P = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.7 & 0.1 \\ 0.2 & 0.7 & 0.1 \\ 0.1 & 0.5 & 0.4 \end{bmatrix}.$$

- Jos huomenna on pilvistä, niin millä todennäköisyydellä myös ylihuomenna on pilvistä? Entä ylihuomista seuraavana päivänä?
- Jos ensi sunnuntaina on aurinkoista, niin millä todennäköisyydellä sunnuntaita seuraa peräkkäin vähintään neljä aurinkoista päivää?
- Laske viikon 38 (19.9.2016 – 25.9.2016) lauantain ja sunnuntain säätilojen jakaumat, kun oletetaan, että kyseisen viikon maanantaina on pilvistä. Kumpana viikonlopun päivänä sataa todennäköisimmin?

1B4 Tarkastellaan seuraavaa yksinkertaista geenien periytyvyysmallia. Oletetaan, että yksilön tietyn piirteen määrää geenipari, jonka kumpikin osanen voi olla kahta mahdollista alleelia, A tai a. Mahdolliset yhdistelmät eli genotyypit ovat siis AA (dominoiva homotsygootti), Aa (heterotsygootti¹) ja aa (resessiivinen homotsygootti). Seurataan yhden dominoivaa homotsygoottia genotyyppiä AA olevan yksilön jälkeläisiä kymmenessä sukupolvessa. Oletetaan, että tämä yksilö saa jälkeläisen heterotsygootin (Aa) yksilön kanssa, tämä jälkeläinen saa edelleen jälkeläisen heterotsygootin (Aa) yksilön kanssa, ja niin edelleen kymmenenteen sukupolveen asti. Perinnöllisyydestä tiedetään seuraavaa. Genotyyppien AA ja Aa vanhempien jälkeläinen on todennäköisyydellä $\frac{1}{2}$ genotyyppiä AA, muuten Aa. Genotyyppien aa ja Aa vanhempien jälkeläinen on todennäköisyydellä $\frac{1}{2}$ genotyyppiä aa, muuten Aa. Kahden genotyyppiä Aa olevan vanhemman jälkeläinen on todennäköisyydellä $\frac{1}{4}$ genotyyppiä AA, todennäköisyydellä $\frac{1}{2}$ genotyyppiä Aa ja todennäköisyydellä $\frac{1}{4}$ genotyyppiä aa.

- Muodosta ylläolevan perusteella tilajoukon $\{AA, Aa, aa\}$ Markov-ketjun siirtymämatriisi, joka kuvaa jälkeläisten genotyyppijä sukupolvittain.
- Laske mallin esiintyvyydsmatriisi M_{10} .
- Selvitä esiintyvyydsmatriisin avulla odotusarvo sille, kuinka moni dominoivan homotsygootin (AA) yksilön jälkeläinen kymmenenteen sukupolveen asti on resessiivistä homotsygoottia tyyppiä (aa).

¹Yhdistelmä aA geneettisesti ekvivalentti yhdistelmän Aa kanssa, joten emme erottele näitä.