2A Markov-ketjut pitkällä aikavälillä

Tämän harjoituksen tavoitteena on oppia lukemaan siirtymämatriisista tai siirtymäkaaviosta, milloin Markov-ketju on yhtenäinen ja jaksoton; oppia tunnistamaan, milloin ketjun tilajakauma suppenee pitkällä aikavälillä; ja oppia laskemaan annetun siirtymämatriisin tasapainojakauma. Jos mahdollista, harjoituksiin kannattaa tuoda mukaan kannettava tietokone tai laskin, jolla voi laskea tehtävissä esiintyvien laskujen lukuarvoja.

Tuntitehtävät

2A1 *Korkean ja matalan tuloasteen solmun PageRank.* Tarkastellaan suunnattua verkkoa, jonka solmujoukko on $V = \{1, 2, \dots, n\}$, ja joka sisältää linkit $1 \to 2$, $2 \to 1$ sekä $x \to 2$, kun $x = 3, 4, \dots, n$. Olkoon $(X_0, X_1, \dots)$ luentomonisteen PageRank-algoritmin (Esimerkki 2.3) mukainen tätä verkkoa vastaava Markov-ketju.

(a) Luonnostele paperille ketjun siirtymäkaavio ja selvitä, millä vaimennuskertoimen c arvoilla Markov-ketju on yhtenäinen.

(b) Laske verkon solmujen PageRank-arvot ratkaisemalla Markov-ketjun tasapainoyhtälöt.

(c) Miten PageRank-arvot käyttäytyvät, kun $c = 0$ ja $c = 1$?

(d) Miten PageRank-arvot käyttäytyvät, kun $n \to \infty$?

2A2 *Yhtenäisen ketjun jaksollisuus.* Perustele, miksi seuraavat tulokset ovat totta yleiselle äärellisen tilajoukon S Markov-ketjulle ja sen siirtymämatriisille $P = (p_{x,y})_{x,y \in S}$.

(a) Jos $p_{x,x} > 0$, niin tällöin myös $(P^t)_{x,x} > 0$ kaikilla $t = 1, 2, \dots$.

(b) Jos $p_{x,x} > 0$, niin tilan x jakso on 1.

(c) Jos $p_{x,x} > 0$ ja $x \leftrightsquigarrow y$ (ks. luentomoniste, Luku 3.2), niin $(P^t)_{y,y} > 0$ kaikilla $t = s, s+1, s+2, \dots$ jostain positiivisesta kokonaisluvusta s lähtien.

(d) Yhtenäinen ketju on jaksoton, jos $p_{x,x} > 0$ pätee jollekin tilalle x.

Kotitehtävät

2A3 Selvitä seuraavien Markov-ketjujen pitkän aikavälin käyttäytyminen.

(a) Työmatkapyöräilijän pyörä on kunakin työpäivänä joko `kunnossa` tai `rikki`. Kun pyörä on jonakin työpäivänä ollut `kunnossa`, se on seuraavanakin `kunnossa` todennäköisyydellä 95%, muuten `rikki` ja kun se on ollut rikki, se on seuraavana työpäivänä `kunnossa` todennäköisyydellä 33%, muuten edelleen `rikki` — riippumatta aiemmista tiloista. Kuinka suuren osuuden työpäivistä pyörä on pitkällä aikavälillä `rikki`?

(b) Tarkastellaan harjoitustehtävän **1B4** Markov-ketjua tilajoukolla $\{\mathtt{AA}, \mathtt{Aa}, \mathtt{aa}\}$. Laske eri genotyyppien osuudet tässä jälkeläisten ketjussa pitkällä aikavälillä.

2A4 *Stokastikon shakkilauta.* Tyhjälle shakkilaudalle asetetaan valkea kuningas, jota siirrellään niin, että jokaisella ajanhetkellä valitaan umpimähkään yksi sallituista siirroista. Tarkastele Markov-ketjua $(X_0, X_1, \dots)$, jossa X_t on kuninkaan sijanti shakkilaudalla t:n siirron jälkeen.

(a) Onko ketju yhtenäinen? Entä jaksoton? Onko ketjulla tasapainojakaumaa? Entä rajajakaumaa?

(b) Vastaa samoihin kysymyksiin, kun kuningas korvataan lähetillä.

(c) Vastaa samoihin kysymyksiin, kun lähetti korvataan ratsulla.