

2B Markov-kustannusmallit ja kulkuajat

Tämän harjoituksen tavoitteena on oppia laskemaan Markov-kustannusmallien kustannuskertymiä ja -vauhteja, ketjujen odotettuja kulkuajoja sekä todennäköisyyksiä osua johonkin tilaan ennen käymistä jossain valitussa tilajoukossa. Harjoitukseen kannattaa tuoda mukaan kannettava tietokone tai laskin, jolla voi laskea tehtävissä esiintyvien laskujen lukuarvoja.

Tuntitehtävät

2B1 Tarkastellaan tilajoukon $S = \{1, 2, \dots, 6\}$ Markov-ketjua, jonka siirtymämatriisi on

$$P = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.2 & 0.1 & 0.2 & 0.2 & 0.1 \\ 0.4 & 0 & 0.6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.6 & 0 & 0 & 0 & 0.4 \\ 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Piirrä ketjun siirtymäkaavio ja vastaa seuraaviin kysymyksiin.

- Millä todennäköisyydellä tilasta 1 käynnistyvä ketju lopulta päättyy tilaan 5? Entäpä tilaan 6?
- Mikä on todennäköisyys, että tilasta 1 käynnistyvä ketju ei koskaan käy tilassa 3?
- Kauanko odotusarvoisesti kestää, ennen kuin tilasta 1 käynnistyvä ketju osuu tilajoukkoon $\{5, 6\}$?

2B2 Olkoon (X_0, X_1, \dots) äärellisen tilajoukon S Markov-ketju, joka aina käydessään tilassa x aiheuttaa deterministisen kustannuksen $c(x)$. Olkoon $g(x)$ tilasta x käynnistyvän Markov-ketjun aiheuttama odotettu kokonaiskustannus ennen ketjun osumista tilajoukkoon A .

- (a) Johda funktiolle $g : S \rightarrow \mathbb{R}$ seuraavat yhtälöt:

$$\begin{aligned} g(x) &= 0, & x &\in A \\ g(x) &= c(x) + \sum_{y \in S} p_{x,y} g(y), & x &\notin A. \end{aligned}$$

- (b) Selvitä a)-kohdan tulosta soveltamalla kuinka monta kertaa tehtävän 2B1 tilasta 1 käynnistyvä ketju odotusarvoisesti käy tilassa 3 ennen absorboitumistaan tilajoukkoon $\{5, 6\}$.

Kotitehtävät

2B3 Analysoi Katiskakauppa.com Oyj:n liiketoiminnan odotettua voittoa käyttäen luentomonisteen (esimerkit 2.2. ja 4.2) stokastista kustannusmallia.

- (a) Laske varaston kokoa kuvaavan ketjun tasapainojakauma.
- (b) Laske myymälän pitkän aikavälin odotettu kustannus/tuottovauhti (EUR/viikko).
- (c) Vertaa b)-kohdan tulosta esimerkissä 4.2 laskettuihin kymmenen viikon kustannuskertymiin.

2B4 Taka-Pajulan kaupunki aikoo järjestää jouluvalaistuksen. Kaupunki kilpailuttaa kaksi lamppuvalmistajaa: A ja B , joilta saadut tarjoukset ovat joko sattumalta tai kartellin johdosta lamppujen yksikköhinnalta samat. Valmistajien lamput eroavat kuitenkin laadultaan: valmistajan A lamppujen käyttöiät ovat eksponenttijakautuneita parametrilla λ_A ja valmistajan B parametrilla λ_B , ja kaikkien lamppujen käyttöiät ovat toisistaan riippumattomia. Parametreja λ_A, λ_B ei tunneta, joten kaupungin etevät virkamiehet keksivät käyttää tilastotieteen osaamistaan tilauspäätöksen tekemiseksi. Molemmilta valmistajilta tilataan lamppu testikäyttöön ja vertaillaan, kumpi lampuista kestää pidempään. Testi toistetaan, kunnes toinen valmistajista on saavuttanut viisi testivoittoa enemmän kuin toinen. Lamput tilataan tältä valmistajalta.

- (a) Laske todennäköisyys, että valmistajan A lamppu kestää yksittäisessä testissä pidempään.

Oletetaan parametreille arvot $\lambda_A = 0.04$ ja $\lambda_B = 0.06$ (yksikköinä 1/vrk).

- (b) Millä todennäköisyydellä tilaus päädytään lopulta tekemään valmistajalta A ?
- (c) Kuinka monta testiä odotusarvoisesti tarvitaan?