K Kytölä & A Karrila

3B Markov-ketjuja ja generoivia funktioita

Tuntitehtävät

3B1 *Sekoaako korttipakka sekoittamalla?* Olkoon S kaikkien 52 kortin korttipakan mahdollisten järjestysten joukko.

(a) Perustele, miksi joukossa S on 52! alkiota,[1] ja selitä, miten korttipakan järjestykset voidaan samaistaa joukon $K = \{1, 2, 3, \ldots, 52\}$ permutaatioiden kanssa.[2]

(b) Selitä, miksi hyvin sekoitettua korttipakkaa kuvaa joukon S todennäköisyysjakauma π, jolle $\pi(\sigma) = \frac{1}{52!}$ kaikilla $\sigma \in S$.

Lapsi sekoittaa korttipakkaa seuraavasti. Jokaisessa vaiheessa hän ottaa päällimmäisen kortin, ja työntää sen umpimähkäisesti valittuun kohtaan pakassa (eli yhtä todennäköisesti pakan alimmaiseksi, toiseksi alimmaksi, ..., tai pakan päällimmäiseksi). Hän toistaa tätä vaihetta kärsivällisesti monta kertaa.

(c) Mallinna sekoitusta joukon S Markov-ketjulla. Mitkä ovat tämän Markov-ketjun siirtymätodennäköisyydet.

(d) Tarkista, että kohdan (b) jakauma π on tasapainojakauma sekoitusta kuvaavalle Markov-ketjulle.

(e) Onko sekoittamisen Markov-ketju kääntyvä kohdan (b) jakauman π suhteen?

(f) Osoita, että mistä tahansa pakan alkuperäisestä järjestyksestä lähtien, pakan järjestysjakauma t:n sekoitusvaiheen jälkeen suppenee kun $t \to \infty$ kohti kohdan (b) hyvin sekoitetun korttipakan jakaumaa π.

3B2 *Bakteeripopulaatio.* Bakteeriviljelmässä jokainen bakteeri itsenäisesti jakaantuu sykäyksittäin 20 minuutin välein k:hon osaan todennäköisyyksillä

$$p(k) = \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^k, \quad k = 0, 1, 2 \ldots$$

Lähtötilanteessa bakteeripopulaation koko on $X_0 = 20$ ja oletetaan, että jokainen lähtötilanteen bakteeri jakautuu täsmälleen 20 min kuluttua.

(a) Mikä on bakteeripopulaation odotettu koko tunnin kuluttua?

(b) Mikä on bakteeripopulaation odotettu koko vuorokauden kuluttua?

(c) Millä todennäköisyydellä viljelmässä ei ole yhtään bakteeria tunnin kuluttua?

(d) Millä todennäköisyydellä bakteeripopulaatio aikanaan kuolee sukupuuttoon?

[1] Positiivisen kokonaisluvun n kertoma on $n! = n \cdot (n-1) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1$.
[2] Joukon K permutaatiolla tarkoitetaan bijektiivistä kuvausta $\sigma\colon K \to K$.

Kotitehtävät

3B3 *Pelipotti.* Peliporukka pelaa uhkapeliä. Kunkin kierroksen aluksi voittopottiin lisätään 1 €. Sitten pelataan pelikierros, jonka lopputulos voi olla tasapeli tai jonkun pelaajan voitto. Tasapelin sattuessa voittopotti jätetään jakamatta ja se siirtyy seuraavalle pelikierrokselle. Jonkun pelaajista voittaessa, voittaja korjaa kertyneen voittopotin kokonaisuudessaan itselleen niin, että seuraavalle pelikierrokselle mennään ilman aiemmin kertynyttä voittopottia. Oletetaan, että kullakin kierroksella tasapelin todennäköisyys on $q \in [0,1]$, ja pelitulokset eri kierroksilla ovat toisistaan riippumattomat.

(a) Merkitään X_t:llä voittopotin suuruutta euroissa t:nnellä kierroksella. Näytä, että prosessi $X = (X_t)_{t \in \mathbb{Z}_+}$ on äärettömän tilajoukon $S = \mathbb{Z}_+ = \{0, 1, 2, \ldots\}$ Markov-ketju, ja laske sen siirtymätodennäköisyydet.

(b) Millä parametrin q arvoilla voittopottiprosessilla $X = (X_t)_{t \in \mathbb{Z}_+}$ on olemassa tasapainojakauma (eli stationaarinen jakauma)? Laske tasapainojakauma.

3B4 *Satunnaiskävelyn kulkuaika origoon.* Tarkastellaan symmetristä satunnaiskävelyä $X = (X_t)_{t \in \mathbb{Z}_+}$ kokonaisluvuilla, eli äärettömän tilajoukon $S = \mathbb{Z}$ Markov-prosessia siirtymätodennäköisyyksin $p_{x,x+1} = \frac{1}{2}$, $p_{x,x-1} = \frac{1}{2}$, ja $p_{x,y} = 0$ kun $|y - x| \neq 1$. Olkoon

$$T_0 = \min \Big\{ t \geq 0 \;\Big|\; X_t = 0 \Big\}$$

satunnaiskävelyn kulkuaika origoon $0 \in \mathbb{Z}$. Tässä tehtävässä lasketaan todennäköisyydet generoivat funktiot

$$\phi_{T_0}^{(x)}(z) = \sum_{j=0}^{\infty} z^j \, \mathbb{P}\big[T_0 = j \,\big|\, X_0 = x\big]$$

kulkuajalle T_0 lähtien eri tilosta $x \in \mathbb{Z}$. Oletetaan alla, että $|z| \leq 1$, jolloin potenssisarjojen teoriasta tiedetään, että $\phi_{T_0}^{(x)}(z)$:n määrittelevä sarja suppenee.

(a) Laske aluksi generoiva funktio $\phi_{T_0}^{(0)}(z)$.

(b) Osoita ensiaskelanalyysillä, että kun $x \neq 0$, pätee kaava

$$\phi_{T_0}^{(x)}(z) = \frac{z}{2} \Big(\phi_{T_0}^{(x+1)}(z) + \phi_{T_0}^{(x-1)}(z) \Big).$$

(c) Etsi kaikki sellaiset luvut $\alpha \in \mathbb{R}$, joille kaavan $f(x) = \alpha^x$ määrittelemä funktio $f \colon \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ toteuttaa yhtälön $f(x) = \frac{z}{2}\big(f(x+1) + f(x-1)\big)$.

(d) Käytä (c)-kohdan tulosta ratkaistaksesi (b)-kohdan yhtälö (a)-kohdan alkuehdolla, ja löydä siten kaava generoivalle funktiolle $\phi_{T_0}^{(x)}$.
Vihje: Kaikista mahdollisista (b)-kohdan yhtälöiden ratkaisuista vain harvoilla on samanlainen käyttäytyminen kun $x \to \pm\infty$ kuin etsityllä generoivalla funktiolla.