

4A Martingaalit ja informaatioprosessit

Tämän harjoituksen tavoitteena on tutustua satunnaisvektorin informaation suhteen lasketun ehdollisen odotusarvon käsitteeseen sekä oppia tunnistamaan, milloin annettu satunnaisprosessi on martingaali.

Tuntitehtävät

4A1 *Markov-ketjut ja martingaalit.* Etsi tai googlaa esimerkki satunnaisprosessista (M_0, M_1, \dots) , joka (ks. luentomoniste, luku 6.5)

- (a) on Markov-ketju ja martingaali,
- (b) on Markov-ketju mutta ei martingaali,
- (c) on martingaali mutta ei Markov-ketju,
- (d) ei ole martingaali eikä Markov-ketju.

4A2 *Ennustusmartingaali.* Olkoon U reaaliakselin yksikköväliä $[0, 1]$ tasajakautunut satunnaisluku ja määritellään

$$X_t = \frac{\lfloor 2^t U \rfloor}{2^t}, \quad t = 0, 1, 2, \dots,$$

missä $\lfloor u \rfloor$ tarkoittaa luvun u alaspäin pyöristämistä lähimpään kokonaislukuun. Olkoon $M_t = \mathbb{E}[U \mid X_0, \dots, X_t]$ satunnaisluvun U ennustusmartingaali informaatioprosessin (X_0, X_1, \dots) suhteen (ks. luentomoniste, esimerkki 6.8).

- (a) Piirrä funktion $u \mapsto \frac{\lfloor 2^t u \rfloor}{2^t}$ kuvaaja ja perustelee sen jälkeen, miksi $X_s \in \sigma(X_t)$ kaikilla $s \leq t$.
- (b) Perustelee, miksi $\mathbb{E}[U \mid X_0, \dots, X_t] = \mathbb{E}[U \mid X_t]$ kaikilla $t \geq 0$.
- (c) Kirjoita eksplisiittinen lauseke M_t :lle satunnaisvektorin (X_0, \dots, X_t) funktiona.
- (d) Suppeneeko jono $(M_t)_{t \in \mathbb{Z}_+}$, kun $t \rightarrow \infty$? Jos suppenee, niin mihin ja millä todennäköisyydellä?

Kotitehtävät

4A3 *Keskitetty satunnaiskulku.* Satunnaisjono (S_0, S_1, \dots) määritellään rekursiivisesti kaavalla $S_0 = x_0$ ja $S_t = S_{t-1} + X_t$, $t \geq 1$, missä $x_0 \in \mathbb{R}$ ja X_1, X_2, \dots ovat riippumattomia ja samoin jakautuneita odotusarvonaan m .

- (a) Todista, että keskitetty satunnaiskulku $\bar{S}_t = S_t - mt$ on informaatiojonon (x_0, X_1, X_2, \dots) suhteen martingaali riippumatta m :n arvosta.
- (b) Onko (\bar{S}_t) martingaali itsensä suhteen?

4A4 *Huijareiden kasino.* Kasinon kolikonheittopeleissä on kahdenlaisia kolikoita: 90% pöydistä käyttää tavallista (kruunan tn on $1/2$) ja loput painotettua (kruunan tn on $1/4$) kolikkoa. Mallinnetaan satunnaisesti valitun pelipöydän yksittäisen pelin tuottoa satunnaisluvulla

$$X = 2 \cdot \mathbf{1}_{\{U \leq W\}} - 1 = \begin{cases} +1, & \text{jos } U \leq W, \\ -1, & \text{muuten,} \end{cases}$$

missä U ja W ovat riippumattomia, $\mathbb{P}[W = 1/2] = 0.90 = 1 - \mathbb{P}[W = 1/4]$, ja U noudattaa välin $(0, 1)$ tasajakaumaa.

- (a) Laske pelin odotettu tuotto $\mathbb{E}[X]$ ulkopuolisen havainnoijan näkökulmasta.
- (b) Kirjoita satunnaisluvun $\mathbb{E}[X | W]$ lauseke W :n funktiona.
- (c) Kirjoita satunnaisluvun $\mathbb{E}[X | U, W]$ lauseke W :n ja U :n funktiona.