

4B Valintahetket ja pysäytetyt martingaalit

Tämän harjoituksen tavoitteena on oppia tunnistamaan, mitkä satunnaishetket ovat valintahetkiä ja oppia laskemaan lukuarvoja ja estimaatteja satunnaisprosessien osumatodennäköisyyksille hyödyntäen valintahetkellä pysäytettyjä martingaaleja.

Tuntitehtävät

4B1 *Valintahetket.* Jos τ_1 ja τ_2 ovat satunnaisjonon (X_0, X_1, \dots) valintahetkiä, niin mitkä seuraavista ovat valintahetkiä? Perustele vastauksesi huolellisesti nojautuen valintahetken määritelmään (luentomoniste, kappale 7.4).

- (a) $T_1 = 3$
- (b) $T_2 = \tau_1 + 6$
- (c) $T_3 = \max(\tau_1 - 6, 0)$
- (d) $T_4 = \min(\tau_1, \tau_2)$
- (e) $T_5 = \max(\tau_1, \tau_2)$
- (f) $T_6 = \tau_1 + \tau_2$.

4B2 *Pólyan urna.* Urnassa on alkuhetkellä yksi punainen ja yksi vihreä pallo. Kierroksella $t = 1, 2, \dots$ urnasta poimitaan umpimähkään yksi pallo, katsotaan sen väri, palautetaan kyseinen pallo takaisin urnaan ja lisätään urnaan yksi uusi poimitun kanssa saman värinen pallo. Olkoon X_t punaisten pallojen suhteellinen osuus kaikista palloista t :n kierroksen jälkeen.

- (a) Todista, että prosessi (X_t) on martingaali.
- (b) Todista, että todennäköisyys sille, että punaisten pallojen suhteellinen osuus koskaan ylittää tason 0.9 on enintään $5/9$.
Vihje: Perustele ensin, miksi $\mathbb{E}[X_{t \wedge T}] \geq 0.9 \mathbb{P}[T \leq t]$, missä $T = \min \{t \geq 0 \mid X_t \geq 0.9\}$. Lisäksi voit hyödyntää tulosta $\mathbb{P}[T < \infty] = \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{P}[T \leq t]$.

Kotitehtävät

4B3 *Velkakirja.* Velkakirjan arvo nykyhetkellä on 47 € ja eräpäivänä 30 päivän kuluttua joko 100 € tai 0 €. Olkoon S_t kyseisen velkakirjan arvo t :n päivän kuluttua. Oletetaan, että $(S_t)_{t \in \mathbb{Z}_+}$ on martingaali.

- Mikä on todennäköisyys, että velkakirjan arvo eräpäivänä on 100 €?
- Pertti suunnittelee ostavansa velkakirjan nyt ja myyvänsä sen joko eräpäivänä tai heti kun sen arvo nousee yli tason 55 € tai laskee alle tason 15 €. Kuinka paljon Pertti odotusarvoisesti nettoaa velkakirjastaan myyntihetkellä?
- Oletetaan, että velkakirjan arvo ei koskaan voi olla negatiivinen. Johda yläraja sen tapahtuman todennäköisyydelle, että velkakirjan arvo joskus nousee vähintään Pertin tavoitetasolle 55 €. Toisin sanoen, etsi jokin sellainen luku $q < 1$, että $\mathbb{P}[X_s \geq 55 \text{ jollakin } s] \leq q$.

4B4 *Lognormaali osakekurssi.* Osakkeen t :nnen kaupankäyntipäivän päätöskurssia mallinnetaan satunnaisprosessilla $M_t = M_0 X_1 \cdots X_t$, missä M_0 on tunnettu vakio ja X_1, X_2, \dots ovat riippumattomia lognormaalijakautuneita satunnaislukuja muotoa $X_t = e^{\eta_t}$, missä η_t on normaalijakautunut odotusarvonaan μ ja varianssinaan σ^2 .

- Millä parametrien μ ja σ^2 arvoilla (M_t) on martingaali?
- Entä milloin (M_t) on alimartingaali?