K Kytölä & A Karrila

5A Satunnaiset pistekuviot ja laskuriprosessit

Tämän harjoituksen tavoitteena on tutustua satunnaisten pistekuvioihin ja niiden laskuriprosesseihin sekä erityisesti harjoitella ratkaisemaan Poisson-prosessiin ja eksponenttijakaumiin liittyviä laskutehtäviä.

Tuntitehtävät

5A1 *Poisson-jakauman ohentaminen.* Olkoot $B_1, B_2, B_3, \ldots$ riippumattomia samoin jakautuneita satunnaislukuja, joille $\mathbb{P}[B_n = 1] = p$ ja $\mathbb{P}[B_n = 0] = 1 - p$. Olkoon N edelleen näistä riippumaton Poisson-jakaumaa parametrilla λ noudattava satunnaisluku.

(a) Laske satunnaisluvun N todennäköisyysgeneroiva funktio $\phi_N(z) = \mathbb{E}\big[z^N\big]$.

(b) Merkitään $N_1 = \sum_{j=1}^{N} B_j$. Osoita, että N_1 noudattaa Poisson-jakaumaa. Mikä on tämän Poisson-jakauman parametri?

5A2 *Eksponentiaalisten odotusaikojen toistuva odottaminen.* Satunnaisluvun X sanotaan noudattavan Gamma-jakaumaa parametrein k ja λ, jos sillä on tiheysfunktio

$$p(x) = \begin{cases} \frac{\lambda^k}{(k-1)!} x^{k-1} e^{-\lambda x} & \text{, kun } x > 0 \\ 0 & \text{, kun } x \leq 0. \end{cases}$$

ja tällöin merkitään $X \sim \text{Gamma}(k, \lambda)$.

Olkoot $\tau_1, \tau_2, \ldots$ riippumattomia eksponenttijakautuneita satunnaismuuttujia parametrilla λ, ja määritellään kaikilla $n \in \mathbb{N}$

$$T_n = \tau_1 + \tau_2 + \cdots + \tau_n.$$

(a) Osoita, että $T_n \sim \text{Gamma}(n, \lambda)$.

(b) Osoita, että $\mathbb{P}\big[T_n \leq t < T_{n+1}\big] = \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t}$, kun $t > 0$.

(c) Osoita, että $\mathbb{P}\big[T_n \leq t, T_{n+1} \geq u\big] = \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda u}$, kun $0 < t < u$.

Kotitehtävät

5A3 Välin $(0, \infty)$ tasakoosteinen ja riippumattomasti sironnut satunnainen pistekuvio määritellään joukkona $X = \{T_1, T_2, \ldots\}$, missä $T_n = \tau_1 + \cdots + \tau_n$ ja $\tau_1, \tau_2, \ldots$ ovat riippumattomia ja $\mathrm{Exp}(\lambda)$-jakautuneita. Sitä vastaava Poisson-prosessi määritellään kaavalla $N(t) = |X \cap (0, t]\,|$, $t \geq 0$.

(a) Todista, että $N(t)$ voidaan kirjoittaa muodossa $N(t) = \max\{n \geq 0 : T_n \leq t\}$, kun merkitään $T_0 = 0$.

(b) Selitä, miten tapahtumahetket $\{T_1, T_2, \ldots\}$ voidaan määrätä havaitsemalla laskuriprosessin $N(t)$ realisaatio (piirrä kuva realisaatiosta).

(c) Mitä jakaumaa $N(t)$ noudattaa kiinnitetyllä $t > 0$?
Vihje: Tehtävän **5A2** *laskuista on apua.*

(d) Määritellään diskreettiaikainen satunnaisprosessi $(X_0, X_1, X_2, X_3, \ldots)$ kaavalla $X_k = N(k)$, $k = 0, 1, 2, \ldots$. Onko $(X_0, X_1, \ldots)$ Markov-ketju? Jos on, määritä sen siirtymätodennäköisyydet.
Vihje: Tehtävän **5A2** *laskuista on osittaista apua.*

5A4 Olkoon $N(t)$ Poisson-prosessi intensiteetillä 2. Laske

(a) $\mathbb{P}\big[N(2) = 5\big]$,

(b) $\mathbb{P}\big[N(5) = 8 \,\big|\, N(2) = 3\big]$,

(c) $\mathbb{P}\big[N(2) = 3 \,\big|\, N(5) = 8\big]$.