# 5B Poisson-prosessien ominaisuuksia ja esimerkkilaskuja

## Tuntitehtävät

**5B1** Teemu Selänne on tehnyt NHL:ssä keskimäärin $\lambda = 1$ tehopistettä (maali tai maaliin johtanut syöttö) per peli. Oletetaan, että 30% tehopisteistä on maaleja ja 70% maaliin johtaneita syöttöjä. Oletetaan, että Teemu saa jokaisesta tekemästään maalista \$3000 ja jokaisesta maaliin johtaneesta syötöstä \$1000 bonuksen. Mallinna tehopisteiden syntyhetkiä 60 min kestävän pelin aikana Poisson-prosessilla ja vastaa seuraaviin kysymyksiin.

(a) Mikä on yksittäisen pelin bonuskertymän odotusarvo?

(b) Mikä on yksittäisen pelin bonuskertymän keskihajonta?

(c) Millä todennäköisyydellä Teemu tekee 1 maalin ja 2 maaliin johtanutta syöttöä yhdessä pelissä?

**5B2** Olkoon $X = (X_n)_{n\in\mathbb{Z}_+}$ Markov-ketju äärellisellä tilajoukolla $S$ ja siirtymätodennäköisyysmatriisilla $P = (p_{x,y})_{x,y\in S}$. Olkoon $\big(N(t)\big)_{t\geq 0}$ tästä riippumaton Poisson-prosessi intensiteetillä $\lambda > 0$. Määritellään jatkuva-aikainen prosessi $\big(Y(t)\big)_{t\geq 0}$ Markov-ketjun $X$ satunnaisena aikamuunnoksena kaavalla $Y(t) = X_{N(t)}$.

(a) Aputulokseksi todista, että Poisson-jakaumaa parametrilla noudattavalle satunnaisluvulle $M$ on voimassa estimaatit

$$\mathbb{P}\big[M \geq 1\big] \leq \lambda \quad \text{ja} \quad \mathbb{P}\big[M \geq 2\big] \leq \frac{\lambda^2}{2}.$$

Olkoot sitten $x, y \in S$, $x \neq y$, kaksi eri tilaa.

(b) Näytä, että $\mathbb{P}\big[Y(t) = y \,\big|\, Y(0) = x\big] \leq \lambda t$.

(c) Näytä, että

$$\Big|\mathbb{P}\big[Y(t) = y \,\big|\, Y(0) = x\big] - \lambda t e^{-\lambda t}\, p_{x,y}\Big| \leq \frac{1}{2}\lambda^2 t^2.$$

(d) Päättele aiempien kohtien avulla, että

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{\mathbb{P}\big[Y(t) = y \,\big|\, Y(0) = x\big]}{t} = \lambda\, p_{x,y}.$$

(e) Selitä, miksi myös kaikille $t > 0$ pätee

$$\lim_{s\to 0^+} \frac{\mathbb{P}\big[Y(t+s) = y \,\big|\, Y(t) = x\big]}{s} = \lambda\, p_{x,y}.$$

Pohdi, mitä ylläolevat laskut kertovat jatkuva-aikaisen prosessin $Y = \big(Y(t)\big)_{t\geq 0}$ hetkittäisistä tilajakaumista $\nu_t = \big(\nu_t(y)\big)_{y\in S}$, missä $\nu_t(y) = \mathbb{P}\big[Y(t) = y\big]$.

## Kotitehtävät

**5B3** Vaalimaan raja-asemalle saapuu rekkoja riippumattomin eksponenttijakautunein väliajoin, joiden odotusarvo on 15 min. Saapuvista rekoista kolmasosa ohjataan riippumattomalla satunnaisotannalla tulliin tarkastettavaksi.

(a) Millä todennäköisyydellä raja-asemalle ei tunnin aikana saavu yhtään rekkaa?

(b) Millä todennäköisyydellä tullin tarkastukseen saapuu vartin aikana vähintään 2 rekkaa?

**5B4** Olkoon $n \in \mathbb{N}$ ja $c > 0$. Olkoot $U_1, U_2, \ldots, U_n$ riippumattomia ja välin $[0, cn]$ tasajakaumaa noudattavia satunnaislukuja. Tarkastellaan välin $[0, cn]$ satunnaista pistekuviota

$$S = \{U_1, U_2, \ldots, U_n\} .$$

(a) Olkoon $(a, b] \subset [0, cn]$ jokin osaväli. Merkitään

$$N\big((a,b]\big) = \#\Big(S \cap (a,b]\Big) = \#\left\{j \;\middle|\; U_j \in (a,b],\ j \leq N\right\}$$

pistekuviossa $S$ tälle välille osuvien pisteiden lukumäärää. Laske todennäköisyydet

$$\mathbb{P}\Big[N\big((a,b]\big) = k\Big],\ k = 0, 1, \ldots, n,$$

ja selvitä siten lukumäärän $N\big((a,b]\big)$ jakauma.

(b) Kiinnitetään väli $(a, b]$ ja tarkastellaan mitä tapahtuu, kun parametri $n$ kasvaa. Laske raja-arvo $n \to \infty$ kohdassa (a) esiintyvistä todennäköisyyksistä.

(c) Olkoot $(a_1, b_1]$ ja $(a_2, b_2]$ erilliset osavälit, $a_1 < b_1 \leq a_2 < b_2 \leq cn$. Laske yhteisjakauman todennäköisyydet

$$\mathbb{P}\Big[N\big((a_1,b_1]\big) = k_1 \text{ ja } N\big((a_2,b_2]\big) = k_2\Big].$$

(d) Kiinnitetään välit $(a_1, b_1]$ ja $(a_2, b_2]$. Laske raja-arvo $n \to \infty$ kohdassa (c) esiintyvistä todennäköisyyksistä.