

## 6A Jatkuvan aikavälin stokastisia prosesseja

Tämän harjoituksen tavoitteena on tutustua uusiutumisosseihin ja jatkuva-aikaisiin Markov-osseihin ja harjoitella laskemaan niihin liittyviä hetkittäisiä jakaumia ja tasapainojakaumia. Laskuharjoitukseen kannattaa ottaa mukaan tietokone tai matriisilaskutoimituksiin kykeneväinen laskin.

### Tuntitehtävät

**6A1** Oletetaan, että uusiutumisosseiden väliajat  $\tau_1, \tau_2, \dots$  ovat riippumattomia ja samoin jakautuneita, joille pätee  $\mathbb{E}(\tau_i) = m \in (0, \infty)$  ja  $\mathbb{P}(\tau_i > 0) = 1$ . Todista, että luentomomentein kaavan (9.3) määrittämät kertymäfunktiot

$$F_+(t) = \mathbb{P}(\tau_+ \leq t) = \frac{\mathbb{E}(\tau_i \wedge t)}{\mathbb{E}(\tau_i)}$$

ja

$$F_*(t) = \mathbb{P}(\tau_* \leq t) = \frac{\mathbb{E}(\tau_i 1(\tau_i \leq t))}{\mathbb{E}(\tau_i)}$$

todella ovat  $\mathbb{R}_+$ :n kertymäfunktioita, eli niille pätee  $F(0) = 0$ ,  $\lim_{t \rightarrow \infty} F(t) = 1$ ,  $F$  on kasvava ja oikealta jatkuva.

**6A2** Yrityksen it-henkilö on vastuussa kahden www-palvelimen toiminnasta. Palvelin  $i$  toimii keskimäärin  $\ell_i$  päivää ennen vikaantumistaan ja vian korjaaminen kestää keskimäärin  $m_i$  päivää, missä  $\ell_1 = 30$ ,  $\ell_2 = 100$ ,  $m_1 = 1$  ja  $m_2 = 2$ . Palvelinten toiminta- ja korjausajat oletetaan toisistaan riippumattomiksi ja eksponenttijakautuneiksi. It-henkilö korjaa palvelimet vikaantumisjärjestyksessä.

- Mallinna palvelinten tilaa jatkuva-aikaisella tilajoukon  $S = \{\emptyset, 1, 2, 12, 21\}$  Markov-ketjulla, missä tilajoukon alkiot kuvaavat korjattavien palvelinten työjonoja. Kirjoita Markov-ketjun generaattorimatriisi ja piirrä siirtymäkaavio.
- Millä todennäköisyydellä kumpikaan palvelimista ei toimi viikon kuluttua, jos ne molemmat toimivat nykyhetkellä?
- Selvitä palvelinten tilaa kuvaavan ketjun tasapainojakauma. Millä todennäköisyydellä yrityksestä löytyy vähintään yksi toimiva palvelin tasapainotilanteessa?
- Jos tasapainotilanteessa havaitaan, että kumpikaan palvelin ei toimi, kauanko odotusarvoisesti kestää, ennen kuin toimintaan saadaan vähintään yksi palvelin?

## Kotitehtävät

**6A3** Yrityksen it-henkilö on vastuussa kahden www-palvelimen toiminnasta, jotka toimivat kuten tehtävässä **6A2**. Palvelimet on priorisoitu niin, että it-henkilö korjaa palvelimen 1 heti sen vioittuessa ja tarvittaessa keskeyttää palvelimen 2 korjaustyöt siksi aikaa.

- (a) Mallinna palvelinten tilaa jatkuva-aikaisella tilajoukon  $S' = \{\emptyset, 1, 2, 12\}$  Markov-ketjulla, missä tilajoukon alkioit kuvaavat korjattavien palvelinten joukkoja. Kirjoita ketjun generaattorimatriisi ja piirrä siirtymäkaavio.
- (b) Selvitä palvelinten tilaa kuvaavan ketjun tasapainojakauma. Millä todennäköisyydellä yrityksestä löytyy vähintään yksi toimiva palvelin tasapainotilanteessa?
- (c) Jos tasapainotilanteessa havaitaan, että kumpikaan palvelin ei toimi, kauanko odotusarvoisesti kestää, ennen kuin toimintaan saadaan vähintään yksi palvelin?
- (d) Vertaa edellisten kohtien tuloksia tehtävän **6A2** tuloksiin.

**6A4** Bussipysäkille saapuvien bussien saapumishetkien (luentomoniste, esimerkki 9.17) väli-aikoja merkitään  $\tau_1, \tau_2, \dots$ . Luentomonisteen lauseen 9.16 perusteella tiedetään, että satunnaisen matkustajan näkökulmasta odotusaika  $\tau_+$  seuraavan bussin saapumiseen noudattaa pitkällä aikavälillä likimäärin väliaikojen tasapainojakaumaa, ja seuraavan ja edellisen bussin väliaika  $\tau_*$  likimäärin kokovinoutettua väliaikajakaumaa. Selvitä satunnaislukujen  $\tau_+$  ja  $\tau_*$  tiheysfunktioit (jos olemassa) ja kertymäfunktioit, kun

- (a)  $\tau_i \stackrel{\text{st}}{=} \text{Tas}(0, 1)$  noudattaa avoimen yksikkövälin  $(0, 1)$  tasajakaumaa.
- (b)  $\tau_i \stackrel{\text{st}}{=} \delta_c$  noudattaa Dirac-jakaumaa pisteessä  $c > 0$ .
- (c) Kauanko bussipysäkille saapuvan henkilön pitää odotusarvoisesti odottaa seuraavan bussin saapumista, jos bussin väliajat noudattavat (a)-kohdan jakaumaa?
- (d) Kauanko bussipysäkille saapuvan henkilön pitää odotusarvoisesti odottaa seuraavan bussin saapumista, jos bussin väliajat noudattavat (b)-kohdan jakaumaa?

Tunnistatko kertymäfunktioita vastaavat jakaumat?