MS-A0202 Differentiaali- ja integraalilaskenta 2 (SCI)
Luento 1: Parametrisoidut käyrät ja kaarenpituus

Antti Rasila

Matematiikan ja systeemianalyysin laitos
Aalto-yliopisto

Syksy 2016

Motivaatio

- Seuraavaksi tutustutaan taso- ja avaruuskäyriin sekä kaarenpituuteen.
- Käyriä esiintyy monissa sovelluksissa. Käyrä voi olla esimerkiksi kappaleen liikerata tasossa tai avaruudessa.
- Käyriä tarvitaan myös esimerkiksi parametrien optimointiin liittyvissä ongelmissa, missä käyrän pisteet liittyvät optimoitavien parametrien välisiin riippuvuuksiin.

Peruskäsitteitä: käyrän parametrisointi

- Formaalisti käyrällä tarkoitetaan joukkoa $C \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, joka voidaan esittää muodossa

$$C = \{\mathbf{r}(t) : t \in I\},$$

missä $I \subset \mathbb{R}$ on väli ja funktio $\mathbf{r}\colon I \to \mathbb{R}^n$ on jatkuva.

- Tässä $\mathbf{r}$ on käyrän C parametrisointi ja $I = [a, b]$ on vastaava parametriväli.
- Parametrisoinnin jatkuvuudella tarkoitetaan sen koordinaattifunktioiden jatkuvuutta.
- Käytännössä voidaan ajatella, että $n = 2$ tai $n = 3$, mutta ei ole välttämätöntä rajoittua näihin tapauksiin.
- Yleisempiä tilanteita voi esiintyä esimerkiksi optimointiin liittyvässä ongelmissa, jolloin n on optimoitavien parametrien määrä.

Koordinaattifunktiot 1/2

- Jos $n = 3$, niin kyseessä on avaruuskäyrä, jolle

$$\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t)) \in \mathbb{R}^3.$$

- Tässä x, y, z ovat parametrisoinnin koordinaattifunktioita, ja jatkuvuus tarkoittaa yksinkertaisesti sitä, että nämä ovat jatkuvia funktioita välillä $I = [a, b]$.
- Parametrisointi $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ kirjoitetaan usein koordinaattimuodossa

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \quad t \in I = [a, b]. \\ z = z(t), \end{cases}$$

Koordinaattifunktiot 2/2

- Vaihtoehtoisesti voidaan käyttää vektorimuotoa

$$\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}.$$

- Parametrisoinnit kirjoitetaan yleensä koordinaattimuodossa, kun taas niihin liittyvien tangenttivektorien kohdalla on luontevaa käyttää vektorimuotoa.
- Tapauksessa $n = 2$ kyseessä on tasokäyrä, joten z-koordinaatti jää pois:

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases}$$

  kun $t \in I = [a, b]$.
- **Huom.** Samalla käyrällä on useita eri parametrisointeja.

Esimerkki 1 (suora tasossa)

- Olkoot $P_0 = (x_0, y_0)$ ja $P_1 = (x_1, y_1)$ kaksi annettua pistettä xy-tasossa $\mathbb{R}^2$.
- Pisteiden P_0 ja P_1 kautta kulkeva suora voidaan parametrisoida

$$\mathbf{r}(t) = \begin{cases} x(t) = (1-t)x_0 + tx_1, \\ y(t) = (1-t)y_0 + ty_1, \end{cases}$$

  kun $t \in I = (-\infty, \infty)$.
- Hetkellä $t = 0$ saadaan $\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}(0) = (x_0, y_0)$ ja vastaavasti $\mathbf{r}(1) = (x_1, y_1)$.
- Asettamalla parametrisointiväliksi $I = [0, 1]$, saadaan pisteitä P_0 ja P_1 yhdistävä jana.

Esimerkki 2 (ympyrän kehä tasossa)

- Olkoon $P_0 = (x_0, y_0)$ ja $r_0 > 0$. Parametrisoidaan P_0-keskisen ja r_0-säteisen ympyrän kehä.
- Saadaan
$$\mathbf{r}(t) = \begin{cases} x(t) = x_0 + r_0 \cos(t), \\ y(t) = y_0 + r_0 \sin(t). \end{cases}$$
- Parametrisointiväliksi voidaan valita esim. $[0, 2\pi]$ tai $[-\pi, \pi]$, jos halutaan parametrisoida koko kehä.
- Huomaa, että $\mathbf{r}(0) = \mathbf{r}(2\pi) = (x_0 + r_0, 0)$ ja $\mathbf{r}(-\pi) = \mathbf{r}(\pi) = (x_0 - r_0, 0)$. Tällaista käyrää, jonka alku- ja loppupiste ovat sama, kutsutaan suljetuksi.
- Ympyrän kaari voidaan parametrisoida valitsemalla parametriväli sopivasti.

Esimerkki 3 (reaalifunktion kuvaaja)

- Funktion $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ kuvaajaa $y = f(x)$ voidaan ajatella xy-tason käyränä.
- Tämä käyrä voidaan parametrisoida

$$\mathbf{r}(t) = \begin{cases} x(t) = t, \\ y(t) = f(t), \end{cases}$$

missä $t \in [a,b]$.

- Vektorimuodossa voidaan kirjoittaa

$$\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + f(t)\mathbf{j}.$$

Esimerkki 4 (Helix-käyrä eli kierrejousi)

- Helix-käyrä eli kierrejousi voidaan parametrisoida

$$\mathbf{r}(t) = \begin{cases} x(t) = a\cos(t), \\ y(t) = a\sin(t), \quad t \in I \\ z(t) = bt, \end{cases}$$

  missä $a, b > 0$ ovat parametreja.

- Vaihtoehtoisesti voidaan jälleen käyttää vektorimuotoa

$$\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k} = a\cos(t)\mathbf{i} + a\sin(t)\mathbf{j} + bt\mathbf{k}.$$

- Parametri a on jousen säde. Voidaan ajatella, että parametri b kertoo kuinka paljon jousta on venytetty.

Peruskäsitteitä: suunnistus

- Usein parametriväli on suljettu väli $[a, b]$.
- Jos tällöin $\mathbf{r}(a) = \mathbf{r}(b)$, niin kyseessä on umpinainen käyrä.
- Parametrisointi määrää käyrälle positiivisen suunnan, jolloin $\mathbf{r}(a)$ on käyrän alkupiste ja $\mathbf{r}(b)$ sen päätepiste.
- Voidaan muodostaa myös vastakkainen parametrisointi, jossa käyrä pysyy samana, mutta sen kulkusuunta vaihtuu.
- Tällöin myös parametrisointiin liittyvät alku- ja päätepiste vaihtavat paikkaa.
- Tapauksessa $\mathbf{r}\colon [0, 1] \to C$ vastakkainen parametrisointi $\mathbf{r}_-$ saadaan helposti kaavalla $\mathbf{r}_-(t) = \mathbf{r}(1 - t)$, $t \in [0, 1]$.

Peruskäsitteitä: implisiittinen muoto

- Tasokäyrän yhtälö voidaan usein ilmaista myös implisiittisessä muodossa $F(x, y) = 0$, missä F on jokin kahden muuttujan lauseke.
- Konkreettisia esimerkkejä ovat funktion kuvaaja $y = f(x)$, joka voidaan määritellä muodossa $F(x, y) = y - f(x) = 0$, ja R-säteinen ympyrä $x^2 + y^2 - R^2 = 0$.
- Huomaa, että yhtälön $F(x, y) = 0$ määräämä tasojoukko ole läheskään aina tasokäyrä.
- **Esimerkki:** Jos $A \subset \mathbb{R}^2$ on mikä tahansa suljettu tasojoukko (reunapisteet kuuluvat joukkoon), niin funktio

$$F(x, y) = \text{ pisteen } (x, y) \text{ pienin etäisyys joukosta } A$$

on jatkuva, mutta yhtälö $F(x, y) = 0$ esittää koko alkuperäistä joukkoa A.

Käyrän tangentti 1/3

- Tarkastellaan 3-ulotteista parametrisointia $\mathbf{r}$, joka on jatkuvasti derivoituva.
- Tämä tarkoittaa sitä, että jokaisen koordinaattifunktion täytyy olla derivoituva ja derivaatan vielä lisäksi jatkuva.
- Parametriväliä $[t, t + \Delta t]$ vastaava käyrän sekantti on vektori

$$\Delta \mathbf{r} = \mathbf{r}(t + \Delta t) - \mathbf{r}(t).$$

- Kun $\Delta t \to 0$, niin $\Delta \mathbf{r}$ kääntyy yhä enemmän käyrän tangentin suuntaiseksi, mutta samalla sen pituus pienenee kohti nollaa.

Käyrän tangentti 2/3

- Skaalaamalla kertoimella Δt saadaan kuitenkin erotusosamäärää vastaava lauseke, josta nähdään, että raja-arvo

$$\mathbf{r}'(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t}$$

on olemassa.

- Se voidaan käytännössä laskea kaavalla

$$\mathbf{r}'(t) = x'(t)\mathbf{i} + y'(t)\mathbf{j} + z'(t)\mathbf{k}.$$

- **Perustelu:** Vektorin $\Delta \mathbf{r}/\Delta t$ ensimmäinen koordinaatti

$$\frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t} \to x'(t),$$

kun $\Delta t \to 0$, ja samoin käy muissa koordinaateissa.

Käyrän tangentti 3/3

Määritelmä

Jos käyrällä $C \subset \mathbb{R}^3$ on jatkuvasti derivoituva parametrisointi $\mathbf{r}$, niin pisteessä $\mathbf{r}(t)$,

$$\mathbf{r}'(t) = x'(t)\mathbf{i} + y'(t)\mathbf{j} + z'(t)\mathbf{k}$$

on käyrän tangenttivektori ja funktiot x, y, z ovat parametrisoinnin koordinaattifunktiot. Tason tapauksessa z-koordinaatti jää pois. Voidaan ajatella, että $\mathbf{v}(t) = \mathbf{r}'(t)$ on käyrää C pitkin liikkuvan kappaleen nopeus ja $\|\mathbf{v}(t)\|$ vauhti (hetkellä t).

Huomautus: Tangenttivektorin määritelmästä saadaan myös jatkossa hyödyllinen approksimaatio: Koska $\mathbf{r}'(t) \approx \Delta\mathbf{r}/\Delta t$, niin $\Delta\mathbf{r} \approx \mathbf{r}'(t)\Delta t$.

Esimerkki 5

- Sykloidin parametrisointi (kulman avulla) on muotoa

$$\begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(1 - \cos t). \end{cases}$$

- Voidaan laskea tangenttivektori

$$\mathbf{r}'(t) = a(1 - \cos t)\mathbf{i} + a \sin t\mathbf{j},$$

  ja kiihtyvyys $\mathbf{a}(t) = \mathbf{r}''(t) = a \sin t\mathbf{i} + a \cos t\mathbf{j}$.
- Saadaan $\|\mathbf{a}(t)\|$ = vakio = tasaisen pyörimisliikkeen kiihtyvyys.
- Huomaa, että $\mathbf{r}'(2\pi n) = \overline{0}$ eli hetkellinen nopeus on nolla. Tällöin käyrän suunta voi muuttua jyrkästi.

Kaarenpituus

- Olkoon $\mathbf{r}\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$ käyrän C jatkuvasti derivoituva parametrisointi.
- Jos käyrää approksimoidaan sekanteista muodostetulla murtoviivalla ja annetaan approksimaation tihentyä, voidaan ajatella murtoviivan pituuden suppenevan kohti kaaren pituutta $\ell(C)$.
- Kaarenpituus voidaan laskea integraalina

$$\ell(C) = \int_a^b \|\mathbf{r}'(t)\|\,dt.$$

- Jos käyrän parametrisointi on ainostaan paloittain jatkuvasti derivoituva, saadaan koko käyrän kaarenpituus laskemalla osien kaarenpituudet yhteen.
- Vaikka käyrällä voi olla useita eri parametrisointeja voidaan osoittaa, ettei kaarenpituus riipu parametrisoinnin valinnasta eikä suunnasta.

Esimerkki 6

- Lasketaan Helix-käyrän $\mathbf{r}(t) = (\cos t, \sin t, t)$ kaarenpituuden parametrivälillä $t \in [0, 2\pi]$.
- Koska $\mathbf{r}'(t) = -\sin t\mathbf{i} + \cos t\mathbf{j} + \mathbf{k}$, niin

$$|\mathbf{r}'(t)| = \sqrt{(-\sin t)^2 + \cos^2 t + 1} = \sqrt{2}.$$

- Kaarenpituudeksi saadaan

$$\ell = \int_0^{2\pi} \|\mathbf{r}'(t)\|\, dt = 2\sqrt{2}\pi.$$

Esimerkki 7

- Funktion kuvaajan $y = f(x)$ kaarenpituudelle on välillä $[a, b]$ olemassa jo ennestään tuttu kaava. Tämä voidaan johtaa myös asettamalla $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + f(t)\mathbf{j}$, kun $t \in [a, b]$.
- Tällöin $\mathbf{r}'(t) = \mathbf{i} + f'(t)\mathbf{j}$ ja $\|\mathbf{r}'(t)\| = \sqrt{1 + f'(t)^2}$, joten kaarenpituudeksi saadaan

$$\ell = \int_a^b \sqrt{1 + f'(t)^2}\, dt.$$

- **Huom.** Kaarenpituutta voidaan tutkia myös sellaisille käyrille, joiden parametrisointi on muodostettu rajoittamattomalla välillä.
- Kaarenpituusintegraalista tulee tällöin epäoleellinen. Jos tämä integraali on suppeneva, niin käyrää sanotaan suoristuvaksi.