MS-A0202 Differentiaali- ja integraalilaskenta 2 (SCI)
Luento 3: Osittaisderivaatta

Antti Rasila

Matematiikan ja systeemianalyysin laitos
Aalto-yliopisto

Syksy 2016

Osittaisderivaatat

- Olkoon $D \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$ ja $f \colon D \to \mathbb{R}$ funktio.
- Tällöin kaikille $j = 1, \ldots, n$ funktion f osittaisderivaatta muuttujan x_j suhteen on
$$f_j(\mathbf{x}) = \lim_{h \to 0} \frac{f(\mathbf{x} + h\mathbf{e}_j) - f(\mathbf{x})}{h},$$
jos kyseinen raja-arvo on määritelty. Tässä $\mathbf{e}_j$ on j:s yksikkökantavektori.
- Osittaisderivaatta siis viittaa muutokseen usean muuttujan funktion arvossa, kun muuttujan x_j arvon pienissä muutoksissa.
- Käytännössä osittaisderivaattojen laskeminen on yleensä helppoa, ja se tapahtuu samaan tapaan kuin yhden muuttujan tapauksessa.

Esimerkki 1

- Olkoon funktio $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$
$$f(x, y) = x^2 \sin y.$$
- Sen osittaisderivaatat ovat:
$$f_1(x, y) = 2x \sin y$$
ja
$$f_2(x, y) = x^2 \cos y.$$

Merkintätavat osittaisderivaatoille

- Funktion $f\colon D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ osittaisderivaattaa muuttujan x_j suhteen merkitään mm. seuraavilla tavoilla

$$\frac{\partial f}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} f(x_1, \ldots, x_n)$$

$$= f_j(x_1, \ldots, x_n) = D_j f(x_1, \ldots, x_n).$$

- Tapauksessa $n = 2$ usein kirjoitetaan $z = f(x, y)$, jolloin voidaan myös käyttää merkintöjä

$$f_1(x, y) = \frac{\partial z}{\partial x}, \quad f_2(x, y) = \frac{\partial z}{\partial y}.$$

- Osittaisderivaatalle käytetään erillistä symbolia, jotta se ei sekottuisi tavalliseen derivaattaan. Tällä on merkitystä varsinkin, jos muuttujia ei kirjoiteta.

Osittaisderivaatan arvo

- Funktion $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ osittaisderivaatan f_j arvoa pisteessä $\mathbf{x}_0 \in D$ merkitään
$$\left.\frac{\partial z}{\partial x_j}\right|_{\mathbf{x}_0} = \left.\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)\right|_{\mathbf{x}_0}$$
$$= f_j(\mathbf{x}_0) = D_j f(\mathbf{x}_0).$$
- **Esim.** Jos $f(u,v) = u^2 v$ ja $\mathbf{w} = x^2\mathbf{i} + xy\mathbf{j}$, niin
$$f_1(\mathbf{w}) = f_1(x^2, xy) = \left.\left(\frac{\partial}{\partial u} f(u,v)\right)\right|_{(x^2, xy)}$$
$$= 2uv\Big|_{u=x^2,\, v=xy} = 2(x^2)(xy) = 2x^3 y.$$

Esimerkki 2

- Etsitään
$$\frac{\partial z}{\partial x} \text{ ja } \frac{\partial z}{\partial y},$$
kun $z = x^3y^2 + x^4y + y^4$.
- Saadaan
$$\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2y^2 + 4x^3y$$
ja
$$\frac{\partial z}{\partial y} = 2x^3y + x^4 + 4y^3.$$

Esimerkki 3

- Etsitään $f_1(0,\pi)$, kun $f(x,y) = e^{xy}\cos(x+y)$.
- Saadaan
$$f_1(x,y) = ye^{xy}\cos(x+y) - e^{xy}\sin(x+y).$$
- Siten
$$f_1(0,\pi) = \pi e^0\cos(\pi) - e^0\sin(\pi) = -\pi.$$

Ketjusäännön soveltaminen

- Tavallisiin derivaattoihin liittyvä ketjusääntö

$$(f \circ g)'(x) = f'\big(g(x)\big)g'(x)$$

on voimassa myös osittaisderivaattojen tapauksessa.

- Esimerkiksi jos $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ja $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, niin

$$\frac{\partial}{\partial x} f\big(g(x,y)\big) = f'\big(g(x,y)\big)g_1(x,y)$$

ja

$$\frac{\partial}{\partial y} f\big(g(x,y)\big) = f'\big(g(x,y)\big)g_2(x,y).$$

- Myöhemmin esitetään myös ketjusääntö monen muuttujan funktioille.

Esimerkki 4

- Osoitetaan, että derivoituva funktio $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ toteuttaa seuraavan osittaisdifferentiaaliyhtälön, kun $z = f(x/y)$:

$$x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

- Ketjusäännön perusteella

$$\frac{\partial z}{\partial x} = f'\left(\frac{x}{y}\right)\left(\frac{1}{y}\right) \text{ ja } \frac{\partial z}{\partial y} = f'\left(\frac{x}{y}\right)\left(\frac{-x}{y^2}\right).$$

- Siten

$$x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = f'\left(\frac{x}{y}\right)\left(x \cdot \frac{1}{y} + y \cdot \frac{-x}{y^2}\right) = 0.$$

Pinnan tangentit ja normaali

- Yhden muuttujan tapauksessa derivaatan avulla voidaan löytää lauseke derivoituvan funktion tangentille annetussa pisteessä. Tämä idea yleistyy monen muuttujan tapaukseen.
- Kahden muuttujan tapauksessa pinnalle $z = f(x, y)$ saadaan kuitenkin kaksi tangenttia pisteessä (a, b):

$$\mathbf{T}_1 = \mathbf{i} + f_1(a, b)\mathbf{k} \text{ ja } \mathbf{T}_2 = \mathbf{j} + f_2(a, b)\mathbf{k}.$$

- Pinnan normaali saadaan tangenttivektorien ristitulona

$$\mathbf{n} = \mathbf{T}_2 \times \mathbf{T}_1 = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 1 & f_2(a, b) \\ 1 & 0 & f_1(a, b) \end{vmatrix}$$

$$= f_1(a, b)\mathbf{i} + f_2(a, b)\mathbf{j} - \mathbf{k}.$$

Tangenttitaso

- Olkoon $D \subset \mathbb{R}^2$, $f\colon D \to \mathbb{R}$ ja $(a, b) \in D$.
- Pinnan $z = f(x, y)$ tangenttitaso pisteessä (a, b) kulkee aina pisteen $P = (a, b, f(a, b))$ kautta.
- Tangenttitasolle saadaan yhtälö

$$z = f(a, b) + f_1(a, b)(x - a) + f_2(a, b)(y - b).$$

- **Huom.** Selvästikään ei ole välttämätöntä, että tangenttitaso olisi määritelty pisteessä (a, b).

Normaalisuoran yhtälöt

- Normaalisuora pinnalle $z = f(x, y)$ pisteessä $(a, b, f(a, b))$ on vektorin

$$f_1(a, b)\mathbf{i} + f_2(a, b)\mathbf{j} - \mathbf{k}$$

  suuntainen.
- Siten se toteuttaa yhtälöt

$$\frac{x - a}{f_1(a, b)} = \frac{y - b}{f_2(a, b)} = \frac{z - f(a, b)}{-1}.$$

- Nämä yhtälöt eivät ole määriteltyjä, jos $f_1(a, b) = 0$ tai $f_2(a, b) = 0$. Näissä normaalin lauseke joudutaan päättelemään muulla tavoin.

Esimerkki 5 1/2

- Etsitään tangentti ja normaali pinnalle $z = \sin(xy)$, kun $x = \pi/3$ ja $y = -1$
- Tangentti ja normaali kulkevat pisteen $(\pi/3, -1, -\sqrt{3}/2)$ kautta.
- Lasketaan osittaisderivaatat:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = y\cos(xy) \text{ ja } \frac{\partial z}{\partial y} = x\cos(xy).$$

- Pisteessä $(\pi/3, -1)$ saadaan

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{1}{2} \text{ ja } \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\pi}{6}.$$

Esimerkki 5 2/2

- Siten kyseisellä pinnalla on normaalivektori

$$\mathbf{n} = -(1/2)\mathbf{i} + (\pi/6)\mathbf{j} - \mathbf{k}.$$

- Tangenttitaso on

$$z = \frac{-\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\left(x - \frac{\pi}{3}\right) + \frac{\pi}{6}(y+1).$$

- Normaalisuoran yhtälöiksi saadaan

$$\frac{6x - 2\pi}{-3} = \frac{6y+6}{\pi} = \frac{6z + 3\sqrt{3}}{-6}.$$

Korkeammat osittaisderivaatat

- Funktiolle $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ voidaan määritellä myös korkeampia osittaisderivaattoja.
- Jos $z = f(x, y)$, niin saadaan esimerkiksi

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial x} = f_{11}(x, y)$$

ja

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y} = f_{21}(x, y).$$

- Vastaavasti, jos $w = f(x, y, z)$, saadaan esimerkiksi

$$\frac{\partial^5 w}{\partial y \partial x \partial y^2 \partial z} = \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial w}{\partial z} = f_{32212}(x, y, z).$$

Esimerkki 6

- Etsitään funktion $f(x,y) = x^3y^4$ toiset osittaisderivaatat.
- Saadaan aluksi

$$f_1(x,y) = 3x^2y^4 \qquad f_2(x,y) = 4x^3y^3.$$

- Siten

$$f_{11}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}3x^2y^4 = 6xy^4, \qquad f_{21}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}4x^3y^3 = 12x^2y^3,$$

$$f_{12}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}3x^2y^4 = 12x^2y^3, \qquad f_{22}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}4x^3y^3 = 12x^3y^2.$$