

MS-A0202 Differentiaali- ja integraalilaskenta 2 (SCI)
Luento 5: Gradientti ja suunnattu derivaatta.
Vektoriarvoiset funktiot. Taylor-approksimaatio.

Antti Rasila

Matematiikan ja systeemianalyysin laitos
Aalto-yliopisto

Syksy 2016

Vektoriarvoiset funktiot

- Olkoon $D \subset \mathbb{R}^n$ ja $\mathbf{f} = (f_1, f_2, \dots, f_m)$ vektori, missä jokainen funktion f komponentti on funktio $f_j: D \rightarrow \mathbb{R}$ ja $m, n \geq 2$. Huomaa, että f_j :t ovat tässä vektorin \mathbf{f} komponentteja (eivät siis osittaisderivaattoja).
- Tällainen vektori määrittelee vektoriarvoisen funktion $\mathbf{f}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, jota kutsutaan myös vektorikentäksi.
- Usein käytetään merkintää $\mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$.
- Vektoriarvoisia funktiota esiintyy usein mm. fysiikassa sellaisten suureiden yhteydessä, joilla on voimakkuus ja suunta (esimerkiksi nopeus- ja voimakentät).

Vektoriarvoisen funktion derivointi

- Derivaatan luonnollinen vastine vektoriarvoisen funktion $\mathbf{f} = (f_1, f_2, \dots, f_m)$ tapauksessa on Jacobin matriisi

$$D\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \frac{\partial f_m}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

- Jos $m = n$, Jacobin matriisi on neliömatriisi ja sen determinanttia sanotaan funktion \mathbf{f} Jacobin determinantiksi pisteessä \mathbf{x} . Tätä determinanttia tullaan tarvitaan kurssin loppuosassa.
- Tätä notaatiota käyttäen ketjusääntö voidaan kirjoittaa yleisessä muodossa

$$D(\mathbf{g} \circ \mathbf{f})(\mathbf{x}) = D\mathbf{g}(\mathbf{f}(\mathbf{x})) D\mathbf{f}(\mathbf{x}).$$

Sovellus: implisiittifunktiolause

- Tutkitaan yhtälöryhmää

$$\begin{cases} F_{(1)}(x_1, x_2, \dots, x_m, y_1, y_2, \dots, y_n) = 0, \\ F_{(2)}(x_1, x_2, \dots, x_m, y_1, y_2, \dots, y_n) = 0, \\ \vdots \\ F_{(n)}(x_1, x_2, \dots, x_m, y_1, y_2, \dots, y_n) = 0, \end{cases}$$

pisteen $P_0 = (a_1, a_2, \dots, a_m, b_1, b_2, \dots, b_n)$ lähellä.

- Muuttujat $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n)$ voidaan esittää muuttujien $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_m)$ funktioina jos pisteen P_0 lähellä, jos funktion $\mathbf{F}(\mathbf{y}) = (F_{(1)}, \dots, F_{(n)})(\mathbf{y})$ Jacobin determinatti

$$\det D\mathbf{F}(\mathbf{y}) \Big|_{P_0} \neq 0.$$

Esimerkki 1

- Osoitetaan, että (u, v) voidaan ratkaista muuttujien (x, y, z) funktiona systeemistä

$$\begin{cases} F(x, y, z, u, v) = xy^2 + xzu + yv^2 - 3, \\ G(x, y, z, u, v) = x^3yz + 2xv - u^2v^2 - 2, \end{cases}$$

pisteen $P_0 = (1, 1, 1, 1, 1)$ lähellä.

- Muodostetaan Jacobin determinanti

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial u} & \frac{\partial F}{\partial v} \\ \frac{\partial G}{\partial u} & \frac{\partial G}{\partial v} \end{vmatrix} \Big|_{P_0} = \begin{vmatrix} xz & 2yv \\ -2uv^2 & 2x - 2u^2v \end{vmatrix} \Big|_{P_0} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} = 4.$$

- Koska determinantti ei ole nolla, ratkaisu on olemassa.

Gradientti

- Olkoon $f: D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $n \geq 2$, derivoituva pisteessä $\mathbf{x} \in D$.

Määritelmä

Funktion f gradientti pisteessä \mathbf{x} on vektori

$$\nabla f = \text{grad } f = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} f, \frac{\partial}{\partial x_2} f, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} f \right) \in \mathbb{R}^n.$$

- Gradientti kertoo funktion f nopeimman kasvun suunnan. Se on vektoriarvoinen funktio $\nabla f: D \rightarrow \mathbb{R}^n$.
- Gradientti voidaan tulkita Jacobin matriisiin erikoistapauksena ($m = 1$).
- Tapauksessa $n = 3$ voidaan kirjoittaa

$$\nabla = \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z}.$$

- Tapauksessa $n = 2$ kolmas termi jää pois.

Esimerkki 2

- Olkoon $f(x, y) = x^2 + y^2$.
- Saadaan $\nabla f = 2x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j}$.
- Erityisesti ∇f on kohtisuorassa jokaista origokeskisen ympyrän tangenttisuoraa vastaan.

Gradientti ja tasa-arvokäyrät

Lause

Olkoon $D \subset \mathbb{R}^2$, $(a, b) \in D$ ja $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ derivoituva pisteessä (a, b) siten, että $\nabla f(a, b) \neq \mathbf{0}$. Tällöin $\nabla f(a, b)$ on kohtisuorassa pisteen (a, b) kautta kulkevaa funktion f tasa-arvokäyrää vasten.

Seuraus: Jos piste $\mathbf{x} \in D$ on funktion f paikallinen ääriarvo (minimi tai maksimi), niin $\nabla f(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$. Tällainen piste ei kuitenkaan välttämättä ole funktion ääriarvo.

Todistus

Olkoon $0 \in I$ ja $\mathbf{r}(t): I \rightarrow \mathbb{R}^2$ tasa-arvokäyrän sellainen parametrisointi, että $\mathbf{r}(0) = (a, b)$.

Koska \mathbf{r} on tasa-arvokäyrä, kaikilla $t \in I$ pätee $f(x(t), y(t)) = f(a, b)$ eli vakio, missä $\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{j} + y(t)\mathbf{j}$.

Ketjusäännöstä saadaan (koska vakiofunktion derivaatta on nolla)

$$f_1(x(t), y(t))x'(t) + f_2(x(t), y(t))y'(t) = 0.$$

Erityisesti pisteessä $t = 0$ tämä tarkoittaa, että

$$\nabla f(a, b) \cdot \mathbf{r}'(0) = 0,$$

eli toisin sanoen vektori ∇f ja $\mathbf{r}'(0)$ ovat kohtisuorassa. □

Suunnattu derivaatta

- Edellinen tulos voidaan tulkita niin, että funktio kasvaa jyrkimmin gradienttinsa suuntaan. Tasa-arvokäyrä puolestaan antaa suunnan, johon edettäessä funktio ei kasva eikä vähene.
- Tämä johtaa kysymykseen funktion arvon kasvunopeudesta muihin suuntiin liikuttaessa, mitä kutsutaan suunnatuksi derivaataksi.
- Suunnattu derivaatta voidaan löytää seuraavaa tulosta käyttäen:

Lause

Olkoon $f: D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ funktio, $(a, b) \in D$ ja \mathbf{u} sellainen vektori, että $\|\mathbf{u}\| = 1$. Tällöin funktion f suunnattu derivaatta suuntaan \mathbf{u} saadaan kaavasta

$$D_{\mathbf{u}}f(a, b) = \mathbf{u} \cdot \nabla f(a, b).$$

Esimerkki 3 1/2

- Olkoon $f(x, y) = y^4 + 2xy^3 + x^2y^2$. Etsitään $D_{\mathbf{u}}(0, 1)$, kun \mathbf{u} on (a) $\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$, (b) $\mathbf{j} + 2\mathbf{i}$, (c) $3\mathbf{i}$, (d) $\mathbf{i} + \mathbf{j}$.
- **Ratkaisu:** Lasketaan

$$\nabla f(x, y) = (2y^3 + 2xy^2)\mathbf{i} + (4y^3 + 6xy^2 + 2x^2y)\mathbf{j},$$

$$\nabla f(0, 1) = 2\mathbf{i} + 4\mathbf{j}.$$

(a) $\|\mathbf{i} + 2\mathbf{j}\| = \sqrt{5}$ ja siten $\mathbf{u} = (\mathbf{i} + 2\mathbf{j})/\sqrt{5}$. Saadaan

$$D_{\mathbf{u}}f(0, 1) = \frac{1}{\sqrt{5}}(\mathbf{i} + 2\mathbf{j}) \cdot (2\mathbf{i} + 4\mathbf{j}) = \frac{2 + 8}{\sqrt{5}} = 2\sqrt{5}.$$

Huomaa, että tässä \mathbf{u} ja $\nabla f(0, 1)$ ovat yhdensuuntaiset.

Esimerkki 3 2/2

(b) $\|\mathbf{j} - 2\mathbf{i}\| = \sqrt{5}$ ja siten $\mathbf{u} = (\mathbf{j} - 2\mathbf{i})/\sqrt{5}$. Saadaan

$$D_{\mathbf{u}}f(0, 1) = \frac{1}{\sqrt{5}}(\mathbf{j} - 2\mathbf{i}) \cdot (2\mathbf{i} + 4\mathbf{j}) = \frac{-4 + 4}{\sqrt{5}} = 0.$$

Vektorit \mathbf{u} ja $\nabla f(0, 1)$ ovat siis kohtisuorassa.

(c) $\|3\mathbf{i}\| = 3$ ja siten $\mathbf{u} = \mathbf{i}$. Saadaan $D_{\mathbf{u}}f(0, 1) = \mathbf{i} \cdot (2\mathbf{i} + 4\mathbf{j}) = 2$. Tämä on sama kuin $f_1(0, 1)$.

(d) $\|\mathbf{i} + \mathbf{j}\| = \sqrt{2}$ ja siten $\mathbf{u} = (\mathbf{i} + \mathbf{j})/\sqrt{2}$. Saadaan

$$D_{\mathbf{u}}f(0, 1) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{i} + \mathbf{j}) \cdot (2\mathbf{i} + 4\mathbf{j}) = \frac{2 + 4}{\sqrt{2}} = 3\sqrt{2}.$$

Huomaa, että $3\sqrt{2} \approx 4.243 < 2\sqrt{5} \approx 4.472$.

Taylorin kaava

- Yhden muuttujan tapauksessa $m + 1$ kertaa jatkuvasti derivoituvaa funktiota $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ voidaan approksimoida kaavalla

$$f(x) \approx f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{f''(a)}{2!}(x - a)^2 + \dots + \frac{f^{(m)}(a)}{m!}(x - a)^m.$$

kun $a, x \in I$.

- Tämä idea yleistyy usean muuttujan tapaukseen: Jos $\mathbf{a}, \mathbf{h} \in \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$ ja funktiolla $F: D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ on jatkuvat kertaluvun $(m + 1)$ osittaisderivaatat pisteitä $\mathbf{a}, \mathbf{a} + \mathbf{h}$ yhdistävällä janalla, niin

$$F(\mathbf{a} + \mathbf{h}) \approx \sum_{j=0}^m \frac{(\mathbf{h} \cdot \nabla)^j f(\mathbf{a})}{j!}.$$

Esimerkki 4

- Olkoon $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ ja $f(x, y)$ neljä kertaa jatkuvasti derivoituva kiekossa (a, b) -keskisessä r -säteisessä kiekossa.
- Etsitään 3. asteen approksimaatio. Jos $\mathbf{h} = (h, k)$, niin

$$f(a+h, b+k) \approx f(a, b) + (hD_1 + kD_2)f(a, b) + \frac{1}{2!}(hD_1 + kD_2)^2 f(a, b) \\ + \frac{1}{3!}(hD_1 + kD_2)^3 f(a, b)$$

$$= f(a, b) + hf_1(a, b) + kf_2(a, b) + \frac{1}{2!} \left(h^2 f_{11}(a, b) + 2hkf_{12}(a, b) + k^2 f_{22}(a, b) \right) \\ + \frac{1}{3!} \left(h^3 f_{111}(a, b) + 3h^2 kf_{112}(a, b) + 3hk^2 f_{122}(a, b) + k^3 f_{222}(a, b) \right).$$

- **Huom.** 1. asteen Taylor-approksimaatio on sama kuin tangenttitaso.

Esimerkki 5 1/2

- Etsitään 2. asteen Taylor-approksimaatio funktiolle $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^3}$ pisteen $(1, 2)$ ympäristössä.
- Lasketaan $f(1, 2) = 3$,

$$f_1(x, y) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^3}}, \quad f_2(x, y) = \frac{3y^2}{2\sqrt{x^2 + y^3}},$$

eli $f_1(1, 2) = 1/3$ ja $f_2(1, 2) = 2$.

Edelleen

$$f_{11}(x, y) = \frac{y^3}{(x^2 + y^3)^{3/2}}, \quad f_{11}(1, 2) = \frac{8}{27},$$

Esimerkki 5 2/2

$$f_{12}(x, y) = \frac{-3xy^2}{2(x^2 + y^3)^{3/2}}, \quad f_{12}(1, 2) = -\frac{2}{9},$$

$$f_{22}(x, y) = \frac{12x^2y + 3y^4}{4(x^2 + y^3)^{3/2}}, \quad f_{22}(1, 2) = \frac{2}{3}.$$

- Siten

$$f(1 + h, 2 + k) \approx 3 + \frac{1}{3}h + 2k + \frac{1}{2!} \left(\frac{8}{27}h^2 + 2 \left(-\frac{2}{9} \right) hk + \frac{2}{3}k^2 \right).$$