MS-A0202 Differentiaali- ja integraalilaskenta 2 (SCI) Luento 9: Muuttujanvaihto taso- ja avaruusintegraaleissa

Antti Rasila

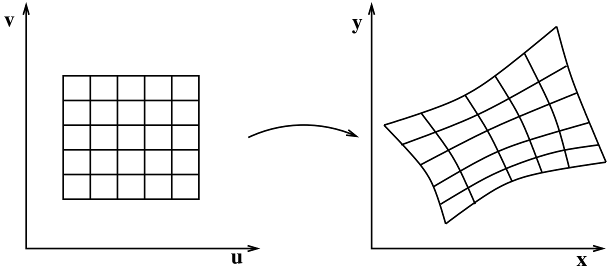
Matematiikan ja systeemianalyysin laitos
Aalto-yliopisto

Syksy 2016

Muuttujanvaihto taso- ja avaruusintegraaleissa 1/5

Tutkitaan funktiota $\mathbf{F}\colon D \to G$, missä D ja G ovat $\mathbb{R}^n$:n osajoukkoja ja $n \geq 2$. Tällaista funktiota kutsutaan myös vektorikentäksi.

Oletetaan, että funktion $\mathbf{F}$ kaikki osittaisderivaatat ovat olemassa ja jatkuvia. Lisäksi oletetaan, että $\mathbf{F}$ on bijektio, jokaista pistettä $\mathbf{y} \in G$ vastaa yksikäsitteinen piste $\mathbf{x} \in D$, jolle $\mathbf{F}(\mathbf{y}) = \mathbf{x}$. Tällöin $G = \mathbf{F}(D)$.



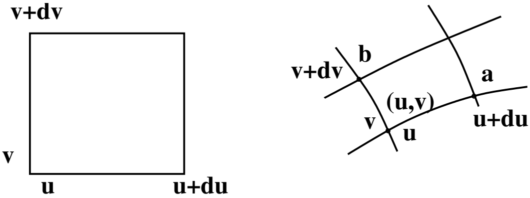
$$\mathbf{F}(u, v) = \big(x(u, v), y(u, v)\big).$$

Muuttujanvaihto taso- ja avaruusintegraaleissa 2/5

Tutkitaan aluksi muuttujanvaihtoa tasointegraalin tapauksessa:

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \iint_G ???\,du\,dv.$$

Tarvitaan tieto siitä, miten pinta-ala skaalautuu funktiossa $\mathbf{F} = (u, v)$.



Kuvassa **a** (vast. **b**) sijaitsee käyrällä, jolla v (vast. u) on vakio.

Muuttujanvaihto taso- ja avaruusintegraaleissa 3/5

Koska funktiolla $\mathbf{F}$ on jatkuvat osittaisderivaatat, käyrät ovat sileitä.

Vektorien $\mathbf{a}$ ja $\mathbf{b}$ ei tarvitse olla keskenään kohtisuorassa, vaikka sovelluksissa näin usein onkin.

Kirjoitetaan formaalisti $\mathbf{a} = dx\,\mathbf{i} + dy\mathbf{j}$, ja myös

$$dx = \frac{\partial x}{\partial u}du + \frac{\partial x}{\partial v}dv \text{ ja } dy = \frac{\partial y}{\partial u}du + \frac{\partial y}{\partial v}dv.$$

Edettäessä vektorin $\mathbf{a}$ suuntaan, koordinaati v on vakio ja siten $dv = 0$. Saadaan

$$\mathbf{a} \approx \frac{\partial x}{\partial u}du\,\mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial u}du\,\mathbf{j}.$$

Samaan tapaan voidaan päätellä, että

$$\mathbf{b} \approx \frac{\partial x}{\partial v}dv\,\mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial v}dv\,\mathbf{j}.$$

Muuttujanvaihto taso- ja avaruusintegraaleissa 4/5

Approksimaatiokaava pinta-alaelementin dA muutokselle siis on

$$dA \approx |a \times b| = \left\| \begin{array}{ccc} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial x}{\partial u} du & \frac{\partial y}{\partial u} du & 0 \\ \frac{\partial x}{\partial v} dv & \frac{\partial y}{\partial v} dv & 0 \end{array} \right\|$$

Käytetään merkintää (huom. neliömatriiseille $\det A = \det A^T$)

$$\left| \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} \right| du\, dv := \left| \det J_{\mathbf{F}}(x, y) \right| du\, dv.$$

Determinantti $\det J_{\mathbf{F}}(x, y)$ on funktion $\mathbf{F} \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ Jacobin determinantti. Sille käytetään myös merkintää

$$\det J_{\mathbf{F}}(x, y) = \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right|, \text{ kun } \mathbf{F}(x, y) = \big(u(x, y), v(x, y)\big).$$

Muuttujanvaihto taso- ja avaruusintegraaleissa 5/5

Olkoon $\mathbf{F}\colon D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$. Matriisi

$$J_F(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial F_1}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial F_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial F_n}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial F_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n),$$

on funktion **F** Jacobin matriisi.

Jacobin determinantin itseisarvo kertoo pinta-alan (yleisemmin n-ulotteisen tilavuuselementin) muutoksen, joten

$$\iint_D f(x, y) \det J_{\mathbf{F}}(x, y)\big|\, dx\, dy = \iint_G g(u, v)\big|\, du\, dv,$$

missä $g(u, v) = f(x(u, v), y(u, v))$ ja $G = \mathbf{F}(D)$.

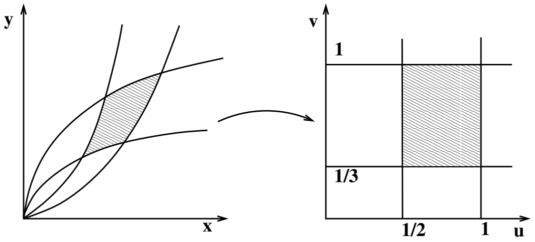
Etumerkki kertoo, onko **F** suunnistuksen säilyttävä vai kääntävä. Itseisarvo tarvitaan, koska pinta-alalla (tilavuudella) ei ole suuntaa.

Esimerkki 1 1/3

Lasketaan neljän paraabelin $y = x^2$, $y = 2x^2$, $x = y^2$ ja $x = 3y^2$ rajoittamaan alueen D pinta-ala.

Huomataan, että karteesiseen koordinaatistoon päästään muunnoksella

$$\mathbf{F} = u\mathbf{i} + v\mathbf{j}, \quad u(x,y) = \frac{x^2}{y},\ v(x,y) = \frac{y^2}{x}.$$



Esimerkki 1 2/3

Halutaan kuitenkin muunnos $\mathbf{F}^{-1}\colon G \to D$, joka vie karteesiset koordinaatit alkuperäiseen tilanteeseen.

Lineaarialgebran perusteella

$$\det J_{\mathbf{F}^{-1}}(u, v) = \frac{1}{\det J_{\mathbf{F}}(x, y)}.$$

Lasketaan

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{2x}{y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{x^2}{y^2}.$$

Saadaan myös

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{y^2}{x^2}, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{2y}{x}.$$

Esimerkki 1 3/3

Lasketaan edelleen

$$\det J_{\mathbf{F}}(x,y) = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{2x}{y} & -\frac{x^2}{y^2} \\ -\frac{y^2}{x^2} & \frac{2y}{x} \end{vmatrix}$$

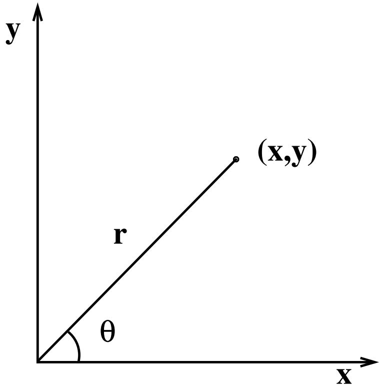
$$= 4 - 1 = 3, \text{ eli } \left|\det J_{\mathbf{F}^{-1}}(u,v)\right| = \frac{1}{3}.$$

Tulokseksi siis saadaan

$$\iint_D 1\,dx\,dy = \iint_G \frac{1}{3}\,du\,dv = \frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{9}.$$

Tavallisimmat sovelluksissa esiintyvät muuttujanvaihdot ovat suoraviivaisempia kuin tämän esimerkin tapaus.

Napakoordinaatit 1/2



Piste $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ voidaan kirjoittaa muodossa (r, θ), missä $r > 0$ ja $0 \leq \theta < 2\pi$.

Alkeisgeometriasta saadaan kaavat

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}, \text{ kun } r^2 = x^2 + y^2.$$

Napakoordinaatit 2/2

Jacobin determinantille saadaan kaava

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r.$$

Siten

$$dx\,dy = \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}\right| dr\,d\theta = r\,dr\,d\theta.$$

Integraali napakoordinaateissa voidaan siis laskea

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \iint_G g(r,\theta) r\,dr\,d\theta,$$

missä $g(r,\theta) = f(r\cos\theta, r\sin\theta)$.

Esimerkki 2

Olkoon $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 < x^2 + y^2 < 4\}$.
Lasketaan napakoordinaateissa integraali

$$I = \iint_D \frac{1}{x^2 + y^2}\, dx\, dy.$$

Saadaan

$$I = \int_0^{2\pi} \int_1^2 \frac{1}{r^2} r\, dr\, d\theta = 2\pi \int_1^2 \frac{1}{r}\, dr$$

$$= 2\pi \ln r \Big|_{r=1}^{2} = 2\pi \ln 2.$$

Esimerkki 3 1/2

- Integraali

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\, dx$$

on erittäin tärkeä mm. todennäköisyyslaskennassa ja tilastotieteessä.

- Tämä integraali on vaikea, koska integraalifunktiota ei ole mahdollista kirjoittaa alkeisfunktioiden avulla.
- Ylläoleva integraali on kuitenkin mahdollista laskea seuraavan tempun avulla: Huomataan aluksi, että

$$I = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2-y^2}\, dx\, dy = \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\, dx\right)^2.$$

Nyt

$$I = \int_0^{2\pi}\int_0^{\infty} e^{-r^2} r\, dr\, d\theta = 2\pi \int_0^{\infty} re^{-r^2}\, dr.$$

Esimerkki 3 2/2

Sijoittamalla $t = r^2$, $dt = 2r\,dr$, saadaan

$$\int re^{-r^2}\,dr = \frac{1}{2}\int e^{-t}\,dt = -\frac{1}{2}e^{-t} + C = -\frac{1}{2}e^{-r^2} + C.$$

Siten

$$I = 2\pi \lim_{R\to\infty} -e^{-r^2}\Big|_{r=0}^{R} = \pi.$$

- Näin ollen, alkuperäisen integraalin arvo on

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}.$$

Muuttujanvaihto avaruusintegraalissa

- Yleinen idea: Muunnoskaavat

$$\begin{cases} x = x(u, v, w), \\ y = y(u, v, w), \\ z = z(u, v, w). \end{cases}$$

- Tällöin

$$dx\,dy\,dz = \left| \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} \right| du\,dv\,dw,$$

missä

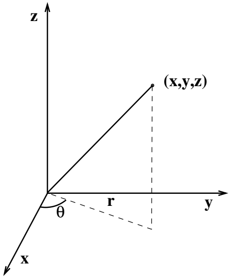
$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix}.$$

- Jos siis $g(u, v, w) = f(x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w))$, niin

$$\iiint_D f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz = \iiint_G g(u, v, w) \left| \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} \right| du\,dv\,dw.$$

Sylinterikoordinaatit

Koordinaatit (r, θ, z), missä $0 < r$, $0 \leq \theta < 2\pi$, $z \in \mathbb{R}$.



Muunnoskaavat:

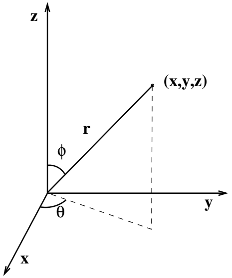
$$\begin{cases} x = r\cos\theta, \\ y = r\sin\theta, \\ z = z. \end{cases}$$

Muunnoksen Jacobin determinantiksi saadaan

$$dx\,dy\,dz = \left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,z)}\right| dr\,d\theta\,dz = r\,dr\,d\theta\,dz.$$

Pallokoordinaatit

Koordinaatit (r, θ, ϕ), missä $0 < r$, $0 \leq \theta < 2\pi$, $0 \leq \phi < \pi$.



Muunnoskaavat:

$$\begin{cases} x &= r \sin\phi \cos\theta, \\ y &= r \sin\phi \sin\theta, \\ z &= r \cos\phi. \end{cases}$$

Muunnoksen Jacobin determinantiksi saadaan

$$dx\, dy\, dz = \left| \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \theta, \phi)} \right| dr\, d\theta\, d\phi = r^2 \sin\phi\, dr\, d\theta\, d\phi.$$

Esimerkki 4

Lasketaan R-säteisen pallon $\mathbb{B}^3(R)$ tilavuus:

$$\iiint_{\mathbb{B}^3(R)} 1\, dx\, dy\, dz = \int_0^R \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} r^2 \sin\phi\, d\phi\, d\theta\, dr$$

$$= \int_0^R \int_0^{2\pi} -r^2 \cos\phi \Big|_{\phi=0}^{\pi} d\theta\, dr = \int_0^R \int_0^{2\pi} 2r^2\, d\theta\, dr$$

$$= \int_0^R 4\pi r^2\, dr = \frac{4\pi r^3}{3}\Big|_{r=0}^{R} = \frac{4\pi R^3}{3}.$$