MS-A0202 Differentiaali- ja integraalilaskenta 2 (SCI)
Luento 10: Moninkertaisten integraalien sovelluksia

Antti Rasila

Matematiikan ja systeemianalyysin laitos
Aalto-yliopisto

Syksy 2016

Moninkertaisten integraalien sovelluskohteita 1/2

Tähän mennessä kurssilla esiintyneita moninkertaisten integraalien sovelluskohteita ovat mm.:

- Pinta-alan laskeminen:

$$\mathrm{Ala}(D) = \iint_D 1\, dA.$$

- Tilavuuden laskeminen:

$$\mathrm{Tilavuus}(D) = \iiint_D 1\, dV.$$

- Kappaleen massan laskeminen:

$$m(D) = \iiint_D \delta(x, y, z)\, dV,$$

  missä $\delta(x, y, z)$ on tiheys pisteessä (x, y, z).

Moninkertaisten integraalien sovelluskohteita 2/2

- Hitausmomentti kappaleen pyöriessä z-akselin ympäri:

$$I_z(D) = \iiint_D \delta(x, y, z)(x^2 + y^2)\, dV,$$

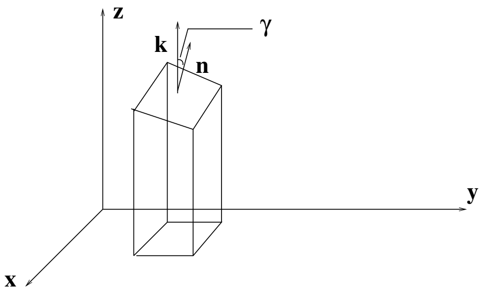
missä $\delta(x, y, z)$ on tiheys pisteessä (z, y, z).

- Painopisteen eli massakeskipisteen $(\bar{x}, \bar{y})$ laskeminen tasaisesti jakautuneen massan (eli $\delta(x, y, z) = \mathrm{vakio}$) ja kaksiulotteisen alueen tapauksessa:

$$\bar{x} = \frac{\iint_D x\, dA}{\iint_D \, dA}, \qquad \bar{y} = \frac{\iint_D y\, dA}{\iint_D \, dA}.$$

- Seuraavaksi käsitellään muutamia muita sovelluksia. Muita sovelluksia esiintyy myöhemmillä kursseilla, mm. lujuuslaskennassa.

Kaksiulotteinen pinta-ala avaruudessa 1/3



- Tutkitaan kaksiulotteista pintaa S, joka on xy-tason yläpuolella avaruudessa $\mathbb{R}^3$.
- Tarkastellaan aluksi xy-tason neliön yläpuolelle jäävän osan pinta-alaa. Se on ilmeisesti suurempi tai yhtäsuuri kuin vastaavan neliön pinta-ala.

Kaksiulotteinen pinta-ala avaruudessa 2/3

- Tästä johtuen pinta-aladifferentiaali dS on suurempi tai yhtäsuuri kuin kuin $dx\,dy$. Itseasiassa $dx\,dy$ saadaan, jos dS projisoidaan xy-tasoon.
- Projektio voidaan kirjoittaa kaavana

$$dx\,dy = \cos\gamma\,dS,$$

missä γ on pinnan S normaalivektorin $\mathbf{n}$ ja z-akselin suuntaisen yksikkövektorin $\mathbf{k}$ välinen kulma.
- Toisaalta pistetulon määritelmästä saadaan

$$\mathbf{n}\cdot\mathbf{k} = \|\mathbf{n}\|\,\|\mathbf{k}\|\cos\gamma,$$

ja siis

$$dS = \frac{1}{\cos\gamma}\,dx\,dy = \frac{\|\mathbf{n}\|\,\|\mathbf{k}\|}{\mathbf{n}\cdot\mathbf{k}}\,dx\,dy.$$

Kaksiulotteinen pinta-ala avaruudessa 3/3

- Aikaisemmin on johdettu pinnan (ylöspäin suunnatulle) normaalivektorille esitys

$$\mathbf{n} = -\frac{\partial z}{\partial x}\mathbf{i} - \frac{\partial z}{\partial y}\mathbf{j} + \mathbf{k}.$$

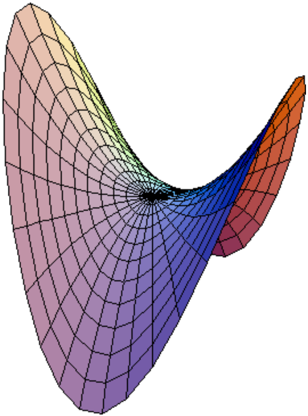
- Saadaan

$$\|\mathbf{n}\| = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}$$

- Lisäksi $\|\mathbf{k}\| = 1$ ja $\mathbf{n} \cdot \mathbf{k} = 1$, joten

$$dS = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\, dx\, dy.$$

Esimerkki



- Lasketaan xy-tason kiekon $x^2 + y^2 = a^2$, $a > 0$ yläpuolella olevan hyperbolisen paraboloidipinnan $z = x^2 - y^2$ osan pinta-ala.

Ratkaisu 1/2

- Lasketaan
$$\frac{\partial}{\partial x} z = 2x, \qquad \frac{\partial}{\partial y} z = -2y.$$
- Siten pinta-aladifferentiaaliksi saadaan
$$dS = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\, dx\, dy$$
$$= \sqrt{1 + 4(x^2 + y^2)}\, dx\, dy$$
$$= \sqrt{1 + 4r^2}\, r\, dr\, d\theta,$$
napakoordinaateissa ilmaistuna.

Ratkaisu 2/2

- Lasketaan nyt integraali napakoordinaateissa:

$$\mathrm{Ala}(S) = \int_0^{2\pi} \int_0^a r\sqrt{1+4r^2}\,dr\,d\theta$$

$$= \frac{\pi}{4} \int_0^a 8r\sqrt{1+4r^2}\,dr$$

$$= \frac{\pi}{4} \Big|_{r=0}^{a} \frac{2}{3}(1+4r^2)^{3/2} = \frac{\pi}{6}\big[(1+4a^2)^{3/2} - 1\big].$$

Massakeskipiste 1/2

- Kolmiulotteisen kappaleen D massakeskipiste $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ voidaan laskea

$$\bar{x} = \left[\iiint_D x\delta(x,y,z)\, dV \right] \left[\iiint_D \delta(x,y,z)\, dV \right]^{-1},$$

$$\bar{y} = \left[\iiint_D y\delta(x,y,z)\, dV \right] \left[\iiint_D \delta(x,y,z)\, dV \right]^{-1},$$

$$\bar{z} = \left[\iiint_D z\delta(x,y,z)\, dV \right] \left[\iiint_D \delta(x,y,z)\, dV \right]^{-1},$$

missä $\delta = \delta(x,y,z)$ on kappaleen tiheys pisteessä (x,y,z).

Massakeskipiste 2/2

- Kaava voidaan kirjoittaa myös vektorimuodossa

$$\bar{x}\mathbf{i} + \bar{y}\mathbf{j} + \bar{z}\mathbf{k} = \frac{\iiint_D \mathbf{r}\delta \, dV}{\iiint_D \delta \, dV},$$

missä $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$.

Esimerkki

- Lasketaan epäyhtälöiden $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$ ja $0 \leq z \leq 1$ määräämän yksikkökuution D massakeskipiste, kun tiheys $\delta(x, y, z) = z$.
- **Huom.** Yksikkökuutio D voidaan myös määritellä käyttäen nk. karteesista tuloa:

$$D = [0, 1] \times [0, 1] \times [0, 1] = [0, 1]^3.$$

Tämä merkintätapa tarkoittaa samaa kuin ylläoleva määritelmä epäyhtälöiden avulla.

Ratkaisu 1/2

- Lasketaan ensin

$$\iiint_D \delta \, dV = \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 z \, dx \, dy \, dz$$

$$= \int_0^1 z \, dz = \Big|_{z=0}^{1} \frac{1}{2} z^2 = \frac{1}{2}.$$

- Saadaan

$$\bar{x} = \frac{\int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 xz \, dx \, dy \, dz}{1/2} = \frac{\left(\Big|_{x=0}^{1} \frac{1}{2} x^2 \right) \left(\Big|_{z=0}^{1} \frac{1}{2} z^2 \right)}{1/2}$$

$$= \frac{(1/2)^2}{1/2} = \frac{1}{2}.$$

Ratkaisu 2/2

- Vastaavasti

$$\bar{y} = \frac{\int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 yz\,dx\,dy\,dz}{1/2} = \frac{(1/2)^2}{1/2} = \frac{1}{2}.$$

- Edelleen voidaan laskea

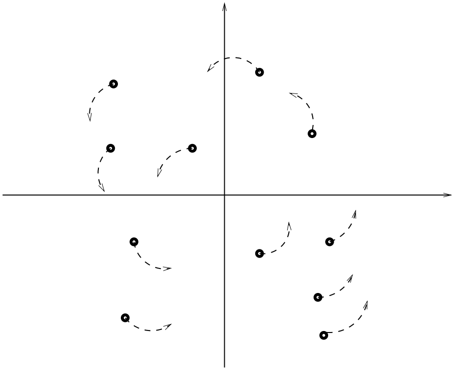
$$\bar{z} = \frac{\int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 z^2\,dx\,dy\,dz}{1/2} = \frac{\Big|_{z=0}^{1} \frac{1}{3} z^3}{1/2}$$

$$= \frac{(1/3)}{(1/2)} = \frac{2}{3}.$$

- Massakeskipisteeksi saadaan

$$(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = (1/2, 1/2, 2/3).$$

Hitausmomentti 1/3



- Tarkastellaan tilannetta, jossa pistemäiset kappaleet kiertävät oriogoa xy-tasossa ympyrän muotoista rataa pitkin samalla kulmanopeudella.

Hitausmomentti 2/3

- Voidaan laskea kappaleiden yhteenlaskettu liike-energia saadaan laskemalla summa

$$E = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \frac{1}{2} \Big[\sum_{i=1}^{N} m_i r_i^2 \Big] \omega^2$$

$$= \frac{1}{2} \Big[\sum_{i=1}^{N} m_i (x_i^2 + y_i^2) \Big] \omega^2,$$

  missä ω on kulmanopeus ja m_i, x_i sekä y_i ovat i:nnen kappaleen massa ja paikka.

- Summaa

$$\sum_{i=1}^{N} m_i (x_i^2 + y_i^2)$$

  kutsutaan hitausmomentiksi.

Hitausmomentti 3/3

- Ajattelemalla z-akselin ympäri pyörivä kappale joukoksi "infinitesimaalisen pieniä" pisteitä, voidaan edelläolevasta summasta päätellä kappaleen liike-energia:

$$E = \frac{1}{2}\left[\iiint_D (x^2 + y^2)\delta(x, y, z)\, dV\right]\omega^2$$

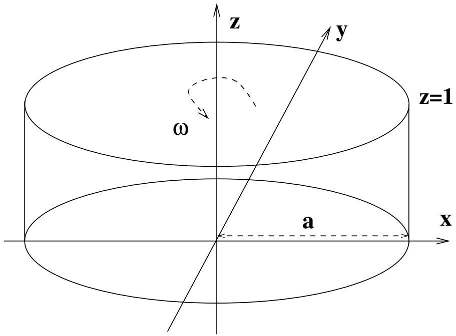
$$= \frac{1}{2} I_z \omega^2,$$

missä

$$I_z = \iiint_D (x^2 + y^2)\delta(x, y, z)\, dV$$

on kappaleen hitausmomentti z-akselin suhteen.

Esimerkki



- Lasketaan sylinterin

$$D = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 \leq a^2 \text{ ja } 0 \leq z \leq 1\}, \qquad a > 0$$

hitausmomentti z-akselin suhteen, kun tiheys on vakio $\delta = \delta_0$.

Ratkaisu 1/2

- Lasketaan

$$
\begin{aligned}
I_z &= \iiint_D (x^2 + y^2)\delta_0 \, dV \\
&= \delta_0 \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_0^a r^2 r \, dr \, d\theta \, dz \\
&= 2\pi\delta_0 \int_0^a r^3 \, dr = \frac{1}{2}\pi\delta_0 a^4.
\end{aligned}
$$

Ratkaisu 2/2

- Toisaalta sylinterin massa on

$$m = \iiint_D \delta_0 \, dV = \delta_0 \mathrm{Tilavuus}(D) = \delta_0 \pi a^2.$$

- Siten hitausmomentti voidaan kirjoittaa

$$I_z = \frac{1}{2}(\pi \delta_0 a^2) a^2 = \frac{1}{2} m a^2.$$