

Oppimistavoitteet:

- Kertaus
- *Repetitio mater studiorum est!*

Tehtävä 1: Tehtävä 1: Lineaarinen optimointi - Simplex

Putte Possu on luvannut auttaa ystäväänsä illallisjuhlan järjestämisessä. Hänen on ottanut tehtäväkseen alkupalan laittamisen. Hän on valinnut vaihtoehdoiksi kolme keittoa: kasvissekeitto, porkkanakeitto ja vihanneskeitto. Yhteen litraan kasvissekeittoa tarvitaan 1 kg porkkanoita ja 1 kg lanttua, yhteen litraan porkkanakeittoa tarvitaan 2 kg porkkanoita ja yhteen litraan vihanneskeittoa tarvitaan 2 kg porkkanoita, 1 kg lanttua ja 1 kg perunoita. Putte Possu on varannut kellariinsa juhlaa varten 10 kg porkkanoita, 4 kg lanttua ja 3 kg perunoita.

Hänen ruuanlaittotaitonsa tuntien kasvissekeitto on kolme kertaa paremman makuista kuin vihanneskeitto ja porkkanakeitto on kaksi kertaa parempaa kuin vihanneskeitto. Kuinka paljon kutakin keittoa Putte Possun tulisi laittaa, kun hän haluaa maksimoida keittojen tuoman makukokemuksen?

Formuloi lineaarisena optimointitehtävänä ja ratkaise Simplex-algoritmilla.

Tehtävä 2: Lineaarinen optimointi - Duaali

Ystäväsi haluaa sijoittaa täsmälleen 40 000 € arvosta joko obligaatioihin, säästötilille tai osakkeisiin ja maksimoida sijoitustensa tuotto. Obligaatioiden tuotto on 7 % siihen sijoitetusta rahamäärästä ja vastaavasti säästötilin tuotto on 5 % ja osakkeiden tuotto on 9 %. Ystäväsi voi myös lainata itselleen lisää rahaa korkeintaan 10 000 € säästötilin tuottoa vastaavalla korolla. Hän on myös saanut pankkiirikaveriltaan sijoitusvinkin, jonka mukaan hänen kannattaa sijoittaa osakkeisiin korkeintaan 20 000 €.

Formuloi lineaarisena optimointitehtävänä käyttäen kolmea päätösmuuttujaa ja muodosta tehtävän duaalitehtävä. Anna myös dualimuuttujille tulkinta.

Tehtävä 3: Kokonaislukuoptimointi

Yritys miettii pienen työpajan rakentamista ja on budjetoinut sitä varten 30 000 €. Työpajaan on mahdollista rakentaa kolme erilaista linjastoa. Ensimmäinen linjasto tuottaa voisilmäpullia ja korvapuusteja ja siihen tulisi sijoittaa 10 000 €, toinen linjasto tuottaa pizzapohjia ja se maksaa 15 000 € ja kolmas linjasto tuottaa sämpylöitä ja patonkeja ja sen rakentamiseen tarvitaan 20 000 €. Työpajan raaka-aineiksi työpajalla on 10 000 kg vehnäjauhoja ja 5 000 kg sokeria. Tuotteiden myyntihinnat ja raaka-ainevaatimukset per laatikko on esitettyinä oheisessa taulukossa.

Tuote		1	2	3	4	5
Myyntihinta	€/ltk	7	8	10	5	12
Vehnäjauhot	kg/ltk	2	3	5	1	4
Sokeri	kg/ltk	3	1	1	3	2

Mitkä linjastot yrityksen kannattaa rakentaa ja kuinka paljon kutakin tuotetta yrityksen kannattaa tuottaa oman voittonsa (tuotto - kustannukset) maksimoiseksi? Vai kannattaako yrityksen jättää investoimatta?

Formuloi lineaarisena optimointitehtävänä.

Tehtävä 4: Branch & Bound

Ratkaise kokonaislukuoptimointitehtävä käyttämällä Branch & Bound -algoritmia. Ratkaise osatehtävät graafisesti

$$\begin{array}{llll} \text{max} & 4x_1 & + & 3x_2 \\ \text{s.e.} & 8x_1 & - & 2x_2 \leq 52 \\ & 10x_1 & + & 7x_2 \leq 70 \\ & x_1 & + & 2x_2 \leq 12 \\ & -3x_1 & + & 4x_2 \leq 12 \\ & x_1 \geq 0, & x_2 \geq 0 & \end{array}$$

Tehtävä 5: Monitavoiteoptimointi - painokerroinmenetelmä

Pulp and Paper Ltd tuottaa hienopaperia, sanomalehtipaperia ja kierrätyspaperia. Valkaistusta paperista maksetaan 800 €/tonni, sanomalehtipaperista 650 €/tonni ja kierrätyspaperista 450 €/tonni. Tuotannon aiheuttamat päästöt ovat hienopaperitonnille 70 yksikköä, sanomalehtipaperitonnille 60 yksikköä ja kierrätyspaperitonnille 20 yksikköä. Yrityksellä on käytettävänä tuotantoon varten 500 000 tonnia peruspuuta ja 200 000 tonnia kuitupuuta. Yhden hienopaperitonnin tuottamiseen kuluu 1,5 tonnia peruspuuta ja 1 tonni kuitupuuta. Vastaavat arvot sanomalehtipaperille ovat 2 tonnia peruspuuta ja 0,5 tonnia kuitupuuta ja kierrätyspaperille 1,5 tonnia peruspuuta eikä yhtään kuitupuuta. Yritys pyrkii maksimoimaan tuotonsa ja minimoimaan aiheutuvat päästöt.

Muodosta lineaarinen optimointitehtävä ja ratkaise painokerroinmenetelmän avulla Pareto-optimaaliset tuotantoratkaisut.

Tehtävä 6: Peliteoria - Nashin tasapaino

Ratkaise normaalimuotoisten pelien Nashin tasapainot, kun

	<i>L</i>	<i>R</i>		<i>L</i>	<i>R</i>		<i>L</i>	<i>R</i>
<i>U</i>	4, 5	2, 3	<i>U</i>	3, 3	0, 1	<i>U</i>	4, 4	1, 5
<i>D</i>	3, 1	1, 2	<i>D</i>	1, 0	2, 2	<i>D</i>	5, 1	2, 2

- vain puhtaat strategiat ovat käytössä
- myös sekastrategiat ovat käytössä.

Tehtävä 7: Minimi- ja maksimipisteet

- Etsi funktion gradientin nollakohdat ja tutki ovatko ne minimi-, maksimi- vai satulapisteitä.

$$f(x, y) = yx^2 + y^3 + x$$

- Ratkaise funktion minimi- ja maksimipisteet annetulla rajoitusehdolla Lagrangen funktion avulla.

$$\begin{array}{llll} f(x, y) = & yx^2 + y^3 + x \\ \text{s.e.} & x^3 & + & y = 8 \\ & x \in \mathbf{R}, & y \in \mathbf{R} & \end{array}$$

Tehtävä 8: KKT-ehdot

Ratkaise optimointitehtävä graafisesti ja tutki täyttääkö ratkaisu KKT-ehdot.

$$\begin{array}{llll} \max & 3x & + & 2y \\ \text{s.e.} & (x-2)^2 & + & (y-1)^2 \leq 9 \\ & -(x-1)^2 & - & y \geq -6 \\ & 4x & - & 3y = 0 \\ & x \in \mathbf{R}, & & y \geq 0 \end{array}$$

Tehtävä 9: Yksiulotteiset optimointialgoritmit

- a) Käytä puolitusmenetelmää ja kultaisen leikkauksen menetelmää minimikohdan etsimiseksi annetulla välillä, suorita vähintään kolme iteraatiota,

$$f(x) = \sin(\sqrt{x}) + \cos(-x^2), \quad 0 \leq x \leq \pi.$$

- b) Käytä Newtonin menetelmää ja sekanttimenetelmää funktion maksimikohdan etsimiseksi, suorita vähintään kolme iteraatiota ja aloita pisteestä $x = 0$,

$$f(x) = \sin(x) + \cos(3x).$$

Tehtävä 10: Moniulotteiset optimointialgoritmit

Käytä gradienttimenetelmää funktion minimikohdan etsimiseksi, suorita vähintään kolme iteraatiota ja aloita pisteestä $x = 3$ ja $y = 4$,

$$f(x, y) = (y - 2)^2 + (1 - 2x)^2 + xy.$$