

Tentti, 8.4.2015

1. Tee lyhyesti selkoa seuraavista käsitteistä (valitse listasta 6 kpl):

- $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ Jacobin matriisi pisteessä \mathbf{x} (auki kirjoitettuna)
- $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ Hessen matriisi (samoin)
- f on konkaavi
- f :n noususuunta \mathbf{x} :ssä
- binäärinen valinta
- joukon ositustehtävä
- alireitti
- portfolion optimointi
- ei-käypä kantaratkaisu
- simplex-iteraatio

2. Käytä seuraavaan tehtävään taulukkomuotoista Simplex-menetelmää.

$$\begin{array}{ll} \min & x_1 - 2x_2 \\ \text{s.e.} & x_1 + x_2 \geq 2 \\ & -x_1 + x_2 \geq 1 \\ & x_2 \leq 3 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{array}$$

- a) Muuta lineaarinen tehtävä standardimuotoon. (1p)
b) Ratkaise LP-tehtävä Simplex-algoritmillä. (3p)
c) Hahmottele tehtävän käypä joukko sekä Simplex-algoritmin eteneminen. (2p)

3. Tarkastellaan tehtävää

$$\begin{array}{ll} \max & 9x_1 + 5x_2 \\ \text{s.e.} & 4x_1 + 9x_2 \leq 35 \\ & x_1 \leq 6 \\ & x_1 - 3x_2 \geq 1 \\ & 3x_1 + 2x_2 \leq 2 \\ & x_1, x_2 \in \mathbb{Z}_+ \cup \{0\} \end{array}$$

- a) Ratkaise tehtävän LP-relaksaatio graafisesti. (1p)
b) Etsi Branch-and-Bound -menetelmää käyttäen tehtävälle ratkaisu. Ratkaise osatehtävät graafisesti. (3p)
c) Esitä ratkaisusi kulku puumuodossa ja perustele sen avulla, että löytämäsi ratkaisu todella on annetun tehtävän paras mahdollinen kokonaislukuratkaisu. (2p)

4. Letkeät leikkiveljet & -siskot oy:n hittituote on yrityksen patentoima leluautomalli. Valmiissa leluautossa on neljä pyörää ja kaksi istuinta. Tehdas, jossa nämä osat valmistetaan, toimii kolmessa vuorossa ympäri vuorokauden. Alla olevassa taulukossa on esitetty osien tuotantomäärät eri työvuoroissa.

Työvuoro	Tuotantomäärä / tuotantokierros	
	Pyöriä	Istuimia
1	500	300
2	600	280
3	640	360

Ideaalitilanteessa valmistettujen pyörien määrä on täsmälleen kaksinkertainen valmistettujen istuinten määrään verrattuna. Kuitenkin koska tuotantomäärät vaihtelevat vuorosta toiseen, optimaaliseen tasapainoon ei ole välttämättä mahdollista päästä. Siispä Letkeät leikkiveljet & -siskot on kiinnostunut määrittämään tuotantokierrosten määrän kussakin työvuorossa niin, että vuorokausittainen ylimääräisten osien lukumäärä tuotannossa minimoituu. Työehtosopimuksen takia tuotantokierroksille eri työvuoroissa on asetettu ala- ja ylärajat: ensimmäisessä työvuorossa kierroksia on oltava vähintään 4 ja enintään 5, toisessa vuorossa vähintään 10 ja enintään 20, ja kolmannessa vuorossa vähintään 3 ja enintään 5.

Yrityksellä on tarvittavat ohjelmistot ongelman ratkaisuun, mutta mallin syöttäminen tietokoneelle tuottaa ongelmia ja toimitusjohtaja pyytää kesätyöntekijänä toimivaa Optimoinnin perusteet -kurssin käynnyttä teekkaria apuun. Formuloi leluauto-osien valmistus tavoiteoptimointitehtävänä.

5. a) Kirjoita tehtävän

$$\begin{aligned} \min \quad & \mathbf{c}^T \mathbf{x} \\ \text{s.e.} \quad & \mathbf{Ax} = \mathbf{b} \\ & \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \end{aligned}$$

KKT-ehdot. (3p)

- b) Olkoon sitten kohdefunktio $z = \mathbf{c}^T \mathbf{x} - \mu \sum_{j=1}^n \ln x_j$, $\mathbf{x} > \mathbf{0}$, parametri $\mu > 0$, ja rajoitus $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$. Kirjoita KKT-ehdot ja osoita, että niistä seuraa edelliset ehdot, kun $\mu \rightarrow 0$. (3p)