

Tentti, 6.3.2013

1. Käytä seuraavaan tehtävään taulukkomuotoista Simplex-menetelmää.

$$\begin{array}{ll} \max & 2x_1 + x_2 \\ \text{s.e.} & 2x_1 - x_2 \leq 6 \\ & x_1 + 2x_2 \leq 10 \\ & x_1 - x_2 \geq -3 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{array}$$

- a) Muuta lineaarinen tehtävä standardimuotoon. (1p)  
b) Ratkaise LP-tehtävä Simplex-algoritmilla. (3p)  
c) Hahmottele tehtävän käypä joukko sekä Simplex-algoritmin eteneminen. (2p)

2. Tarkastellaan tehtävää

$$\begin{array}{ll} \min & (x_1 - a)^2 + (x_2 - b)^2 \\ \text{s.e.} & -4x_1 + 4x_2 \leq 12 \\ & 5x_1 + 2x_2 \leq 20 \\ & x_1, x_2 \geq 0, \end{array}$$

missä i)  $a = 2, b = 2$  ja ii)  $a = 4, b = 6$ .

- a) Ratkaise tapaukset i) ja ii) graafisesti. Piirrä tehtävän käypä alue sekä kohdefunktion tasa-arvokäyrät. (2p)  
b) Esitä molemmista tapauksista välttämättömät KKT-ehdot ja tutki toteutuvatko ne optimissa. (4p)
3. Olet tuotantopäällikkö autoja valmistavassa yrityksessä Nallen Nelipyörä Oy. Tällä hetkellä mallistoon kuuluu ainoastaan yksi malli, Mesikämmen. Valmistus vaatii 2 tonnia terästä ja 100 miestyötuntia. Yrityksellä on myös mahdollisuus laajentaa toimintaa ja alkaa valmistaa uusia Karhu-sarjan urheiluautoja. Niiden valmistaminen vaatii 1.5 tonnia terästä ja 150 miestyötuntia. Lisäksi valmistus vaatisi uuteen tuotantolinjaan investoimista. Tuotantolinja maksaisi 1000 Karhu-sarjan auton hinnan verran, ja sen käyttöikä olisi 10 vuotta. Viikoittain yrityksellä on käytössä 24 tonnia terästä ja 1200 miestyötuntia. Karhu-sarjan autoista saatava voitto on kaksinkertainen Mesikämmen-sarjan autoihin nähden.
- a) Minkälaisella viikottaisella tuotannolla yrityksen voitto maksimoituu? Formuloi tehtävä *lineaarisen kokonaislukutehtävänä*. Tehtävää ei tarvitse ratkaista. (4p)  
b) Suunnittele ratkaisevasi tehtävän Branch-and-Bound -menetelmällä. Esitä algoritmin toimintaperiaate. (2p)

*Jatkuu kääntöpuolella*

4. Tutkitaan lineaarista optimointitehtävää P ja sen duaalia D:

$$\begin{array}{ll} \text{P :} & \min \quad \mathbf{c}^T \mathbf{x} \\ & \text{s.t.} \quad \mathbf{Ax} = \mathbf{b} \\ & \quad \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \end{array} \qquad \begin{array}{ll} \text{D :} & \max \quad \phi(\mathbf{v}) \\ & \text{s.t.} \quad \mathbf{v} \in \mathbb{R}^m, \end{array}$$

missä  $\phi(\mathbf{v}) = \min \{ \mathbf{c}^T \mathbf{x} + \mathbf{v}^T (\mathbf{Ax} - \mathbf{b}) \mid \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \}$ . Sievennä duaalitehtävä D yksinkertaisempaan muotoon. (6p)

5. Resurssi, määrä  $x_0$ , jaetaan N:n agentin kesken, s.e., agenttien saamien hyötyjen summa maksimituu. Olkoon agentin  $i$  hyöty jaolle  $x_i$ ,  $g_i(x_i)$ , missä  $g'_i(x_i) > 0$ ,  $g''_i(x_i) < 0$ , ja olkoon  $\bar{x}_i$  agentin  $i$  saama määrä resurssia maksimissa. Formuloi ja ratkaise tehtävä. Osoita, että on olemassa hinta  $p > 0$  siten, että jos mielivaltaisesti valitulle agentille  $i$  myydään resurssia ko. hinnalla, hän ostaa sitä määrän  $\bar{x}_i$ . (6p)