



© [Helder Almeida] / [Folia]

# MECANIQUE DES MATERIAUX ET DES STRUCTURES

INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES APPLIQUÉES DE LYON

GMC  
MASTER  
Version 2011-2012  
Cours

FORMATION 

Auteur de la ressource pédagogique :  
BRUNET Michel



INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES APPLIQUEES DE LYON

DEPARTEMENT GENIE MECANIQUE CONCEPTION

## **MASTER GENIE MECANIQUE**

Laboratoire de Mécanique des Contacts et des Structures (LaMCoS)  
UMR INSA-CNRS 5259

**Equipe Mécanique des Solides et des Endommagements (MSE)**

---

---

# **MECANIQUE DES MATERIAUX ET DES STRUCTURES**

---

---

**CH-1 Mouvement et Lois de conservation**

**CH-2 Contraintes et Déformations**

**CH-3 Lois de comportement**

**CH-4 Thermodynamique et Hyperélasticité**

**CH-5 Plasticité et Endommagement**

**CH-6 Formulations non-locales**

**Annexe**

**M. BRUNET**

**EDITION 2011-2012**

---

 Sommaire
 

---

<b>1</b>	<b>MOUVEMENT ET LOIS DE CONSERVATION</b>	<b>6</b>
1.1	DESCRIPTION DU MOUVEMENT	6
1.1.1	Formulations d'Euler et de Lagrange .....	6
1.1.2	Le tenseur gradient F .....	7
1.2	LOI DE CONSERVATION EN GENERAL	9
1.2.1	Qu'est-ce qu'une loi de conservation .....	9
1.2.2	Le vecteur flux .....	10
1.2.3	Forme locale de la loi de conservation .....	12
1.3	MILIEUX CONTINUS CLASSIQUES	15
1.3.1	La loi de conservation de la masse .....	15
1.3.2	Loi fondamentale de la dynamique .....	16
1.3.3	Premier principe de la thermodynamique .....	17
1.3.4	Synthèse .....	19
1.4	PUISSANCES VIRTUELLES	19
1.4.1	Théorème des puissances virtuelles : .....	19
1.4.2	Remarques sur les puissances virtuelles : .....	20
<b>2</b>	<b>CONTRAINTES ET DEFORMATIONS</b>	<b>21</b>
2.1	DESCRIPTION DES CONTRAINTES	21
2.1.1	Flux de contraintes .....	21
2.1.2	Les tenseurs des contraintes .....	23
2.1.3	Exemple : Contraintes et déformation homogène triaxiale .....	25
2.1.4	Conditions aux limites .....	25
2.2	DESCRIPTION DES DEFORMATIONS	26
2.2.1	Les tenseurs de déformation .....	26
2.2.2	Décomposition polaire .....	30
2.2.3	Les mesures de déformation .....	33
2.2.4	Exemples et remarques .....	34
2.2.5	Petites perturbations (linéarisation) .....	37
2.2.6	Coordonnées matérielles .....	38
2.3	VITESSES DE DEFORMATIONS	46
2.3.1	Tenseur taux de déformation et taux de rotation .....	46
2.3.2	Description lagrangienne réactualisée .....	48
2.3.3	Dualités contraintes-déformations .....	50
2.4	LES FORMES DE RESOLUTION	51
2.4.1	Forme incrémentale Lagrangienne Totale .....	51
2.4.2	Forme incrémentale Lagrangienne Réactualisée .....	54
2.4.3	Forme en vitesse Lagrangienne Réactualisée .....	55
2.4.4	Forme Eulérienne .....	56
2.4.5	Résolution dynamique explicite .....	58

<b>3</b>	<b>LOIS DE COMPORTEMENT</b>	<b>60</b>
3.1	THEORIE GENERALE	60
3.1.1	Forme générale.....	60
3.1.2	Liaisons internes.....	62
3.1.3	Objectivité.....	62
3.1.4	Matériaux élastiques.....	64
3.2	ISOTROPIE et ANISOTROPIE	65
3.2.1	Matériaux isotropes.....	65
3.2.2	Solides anisotropes.....	66
3.2.3	Fonctions isotropes.....	67
3.2.4	Matériau élastique isotrope.....	68
3.3	GENERALITES sur les MILIEUX VISQUEUX	69
3.3.1	Forme générale du modèle de Kelvin-Voigt viscoélastique.....	69
3.3.2	Exemple de fluides visqueux et « plastiques ».....	70
3.4	LOIS DIFFERENTIELLES	72
3.4.1	Dérivées convectives.....	73
3.4.2	Dérivée de Jaumann et référentiel corotationnel.....	75
3.4.3	Lois de type taux.....	78
3.4.4	Hypoélasticité.....	79
3.4.5	Viscoélasticité.....	80
3.5	FLUIDES VISQUEUX NON-NEWTONIENS (Exemples)	86
3.5.1	Contraintes viscométriques.....	87
3.5.2	Ecoulement dans un canal.....	90
3.5.3	Ecoulements de Poiseuille et de Couette.....	93
3.5.4	Ecoulements viscométriques.....	96
<b>4</b>	<b>THERMODYNAMIQUE ET HYPERELASTICITE</b>	<b>97</b>
4.1	LA THERMODYNAMIQUE DES MILIEUX CONTINUS	97
4.1.1	Rappel du premier principe.....	97
4.1.2	Deuxième principe, inégalité de Clausius-Duheim.....	98
4.1.3	Bilans énergétiques.....	100
4.2	L'HYPERELASTICITE	101
4.2.1	Loi de comportement générale.....	101
4.2.2	Matériau isotrope.....	102
4.2.3	Séparation Dilatation - Distorsion.....	104
4.2.4	Matériaux hyperélastiques anisotropes.....	105
4.2.5	Exemples hyperélastiques.....	106
4.3	THERMODYNAMIQUE RATIONNELLE	117
4.3.1	Application à l'hyperélasticité.....	117
4.3.2	Cas du matériau viscoélastique de Kelvin-Voigt.....	118
4.4	THERMODYNAMIQUE DES PROCESSUS IRREVERSIBLES LINEAIRES	119
4.4.1	Potentiels de dissipation.....	119
4.4.2	Matériaux hyperélastiques avec la TPI.....	120
4.4.3	Cas des matériaux viscoélastique de Kelvin-Voigt en TPI.....	122
4.4.4	Milieux avec variables internes scalaires.....	124
4.4.5	Configuration intermédiaire.....	125
4.5	THERMODYNAMIQUE DES PROCESSUS IRREVERSIBLES NON-LINEAIRES	127
4.5.1	Potentiel de dissipation.....	127

4.5.2	Principe du travail maximal .....	129
<b>5</b>	<b>PLASTICITE ET ENDOMMAGEMENT</b>	<b>133</b>
5.1	FORMULATION GENERALE	133
5.1.1	Taux de déformation plastique .....	133
5.1.2	Formulation en vitesse de contrainte .....	134
5.1.3	Matrice élasto-plastique continue .....	136
5.1.4	Intégration élasto-plastique implicite .....	138
5.1.5	Ecrouissage isotrope, cinématique et anisotropie .....	141
5.1.6	Chargement radial et loi intégrée .....	146
5.2	PLASTICITE SEULE	149
5.2.1	Formules de Prandtl-Reuss .....	149
5.2.2	Exemples .....	152
5.2.3	Striction diffuse et striction localisée .....	156
5.3	ENDOMMAGEMENT DUCTILE	159
5.3.1	Modèles découplés .....	159
5.3.2	Modèle thermodynamique couplé .....	161
5.3.3	Modèles poreux couplés .....	165
5.3.4	Endommagement des plaques composites .....	168
<b>6</b>	<b>FORMULATIONS NON-LOCALES</b>	<b>174</b>
6.1	LE PHENOMENE DE LOCALISATION	174
6.1.1	La localisation .....	174
6.1.2	Les méthodes de régularisation .....	175
6.2	METHODES NON-LOCALES	178
6.2.1	Formulation intégrale .....	178
6.2.2	Formulation à gradient explicite .....	179
6.2.3	Formulation à gradient implicite .....	180
6.3	ELASTO-PLASTICITE AVEC ENDOMMAGEMENT NON-LOCAL	180
6.3.1	La variable d'endommagement non-locale .....	180
6.3.2	Implémentation de la méthode implicite .....	181
6.3.3	Exemple numérique .....	183
	<b>ANNEXE</b>	<b>188</b>
	Exemple du codage en FORTRAN de 2 routines UMAT pour ABAQUS	189
	Exemple 2 : UMAT en intégration élasto-plastique explicite avec correction	198

# 1 MOUVEMENT ET LOIS DE CONSERVATION

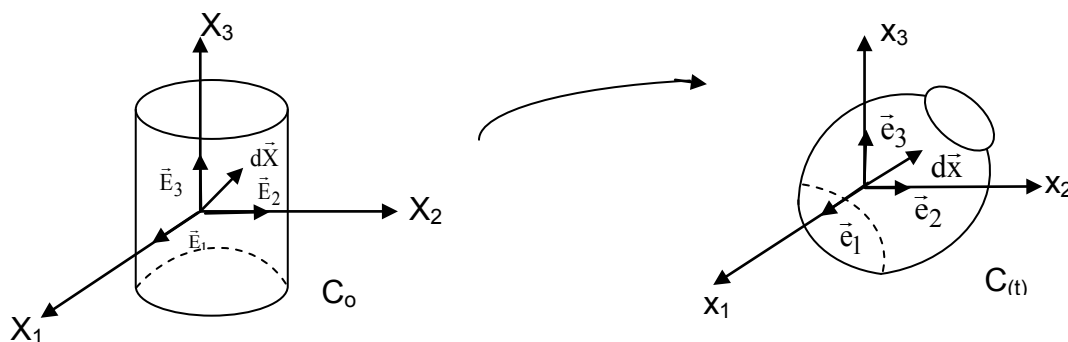
## 1.1 DESCRIPTION DU MOUVEMENT

### 1.1.1 Formulations d'Euler et de Lagrange

Il y a deux possibilités de **repérage** d'une **particule** :

- Description **eulérienne** : la particule est repérée par sa position  $x$  à l'instant  $t$
- Description **lagrangienne** : elle est repérée par sa position  $0$ , ou plus généralement par une position de référence  $X$ .

Le **mouvement** sera défini par la fonction  $x(X, t)$  qui donne la position  $x$  à l'instant  $t$  de la particule référencée par  $X$ , et définit donc la transformation faisant passer de la configuration de référence  $C_0$  à la configuration actuelle  $C(t)$ .



Ces deux configurations seront repérées dans deux systèmes de coordonnées que nous noterons :

$X_i = (X_1, X_2, X_3)$  système de **coordonnées matérielles**  
dans la configuration de référence initiale  $C_0$

$x_i = (x_1, x_2, x_3)$  système de **coordonnées spatiales**  
dans la configuration actuelle déformée  $C(t)$

Ces deux systèmes seront supposés **cartésiens orthonormés** et on leur appliquera les conventions de notation habituelles (sommation, dérivation).

★ Remarque 1 : Dans les applications il est souvent commode de repérer  $C_0$  et  $C(t)$  dans le **même système** de coordonnées, c'est-à-dire d'**identifier**  $\bar{e}_i$  et  $\bar{E}_i$ . Cependant pour le développement de la théorie, il est préférable de conserver cette distinction.

★ Remarque 2 : Les coordonnées matérielles  $X_i$  définissent un système cartésien orthonormé sur la configuration de référence  $C_0$ , mais elles définissent aussi un système de coordonnées **curvilignes** sur la configuration actuelle  $C(t)$ .

### 1.1.2 Le tenseur gradient F

Pour caractériser la déformation, on étudie la transformation d'un vecteur matériel :

$$\vec{dX} \rightarrow \vec{dx}$$

La transformation s'écrit :  $x_i = x_i(X_i, t)$

En différentiant on a :  $dx_i = \frac{\partial x_i}{\partial X_j} dX_j$

De même on a :  $dX_I = \frac{\partial X_I}{\partial x_j} dx_j$

On définit alors le tenseur gradient F tel que :

$$(1) \quad \boxed{\vec{dx} = F \vec{dX}} \quad \text{ou :} \quad dx_i = F_{ij} dX_j \quad \text{avec} \quad F_{ij} = \frac{\partial x_i}{\partial X_j}$$

On a alors :  $\vec{dX} = F^{-1} \vec{dx}$

ou :  $dX_I = F_{ij}^{-1} dx_j$  avec  $F_{ij}^{-1} = \frac{\partial X_I}{\partial x_j}$

F, **application linéaire tangente**, permet de caractériser les **diverses transformations**.

Si comme nous l'avons évoqué plus haut, on utilise le même repère dans la configuration actuelle et la configuration de référence, il sera commode d'introduire le vecteur déplacement.

$$(2) \quad \boxed{x_i(X, t) = X_i + u_i(X, t)}$$

Le tenseur gradient sera alors :

$$(3) \quad F_{ij} = \delta_{ij} + \frac{\partial u_i}{\partial X_j} \quad \delta_{ij}: \text{symbole de Kronecker} \quad \delta_{ij} = 1 \text{ si } i = j \\ = 0 \text{ si } i \neq j$$

#### Transformation de l'élément de volume

On considère un élément de volume  $dv_0$  de la configuration de référence  $C_0$ , qui se transforme en un élément  $dv$  de la configuration actuelle. On démontre que :

Le Jacobien de la transformation est :

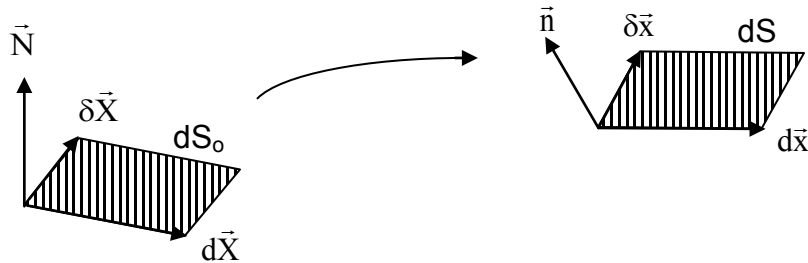
$$(4) \quad \boxed{J = \frac{D(x_1, x_2, x_3)}{D(X_1, X_2, X_3)} = \det F = \det \left| \frac{\partial x}{\partial X} \right|}$$

et la transformation d'un élément de volume s'écrit :

$$(5) \quad \boxed{dv = J dv_0}$$

**Transformation de l'élément de surface**

On considère de la même façon la transformation d'un élément de surface  $dS_0$  de  $C_0$  en un élément de surface  $dS$  de  $C(t)$ .



Si  $\vec{N}$  et  $\vec{n}$  sont les vecteurs unitaires normaux aux surfaces  $S_0$  et  $S$  respectivement, on peut démontrer la formule de Nanson :

$$(6) \quad \vec{n} dS = J F^{-1T} \vec{N} dS_0$$

où  $F^{-1T}$  est la transposée de l'inverse de  $F$ .

**Dem. :** on a  $\vec{n} dS = \vec{dx} \wedge \delta \vec{x}$  soit pour la ième composante,  $n_i dS = \epsilon_{ijk} dx_j \delta x_k$   
avec  $\epsilon_{ijk}$  symboles de permutation,

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} +1 \text{ si } i, j, k, \text{ permutation de } 1, 2, 3 & (123) (231) (312) \\ -1 \text{ si } i, j, k, \text{ permutation impaire de } 1, 2, 3 & (132) (213) (321) \\ 0 \text{ si deux indices répétés} \end{cases}$$

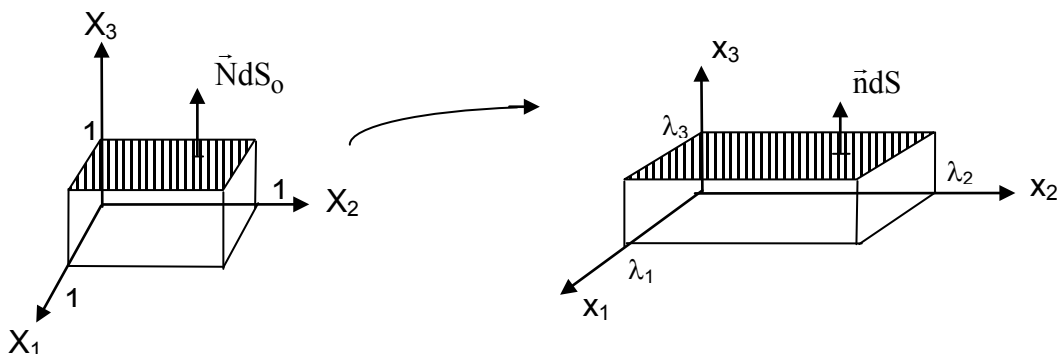
Or on a :  $dx_j = F_{jL} dX_L$   
 $\delta x_k = F_{kM} \delta X_M$

Donc :  $n_i dS = \epsilon_{ijk} F_{jL} F_{kM} dX_L \delta X_M$

$$F_{iP} n_i dS = \underbrace{\epsilon_{ijk} F_{iP} F_{jL} F_{kM}}_{= \epsilon_{PLM} \det F} dX_L \delta X_M = J N_P DS_0$$

ou encore :  $F^T n ds = J N DS_0$

**Exemple :** déformation homogène triaxiale du cube unitaire :





Les équations de la transformation sont :

$$\begin{aligned} x_1 &= \lambda_1 X_1 \\ x_2 &= \lambda_2 X_2 \\ x_3 &= \lambda_3 X_3 \end{aligned}$$

le tenseur gradient est :  $F = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}$  et  $J = \det F = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3$

Transformation de l'élément de volume :

$$\left. \begin{aligned} dv_0 &= 1 \\ dv &= \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \end{aligned} \right\} \Rightarrow dv = J dv_0$$

Transformation de l'élément de surface perpendiculaire à  $X_3$  :

$$\left. \begin{aligned} dS_0 &= 1 \\ dS &= \lambda_1 \lambda_2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \vec{n} dS = \lambda_1 \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{et } J F^{-t} \vec{N} dS_0 = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \begin{bmatrix} 1/\lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/\lambda_3 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \lambda_1 \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

On vérifie donc bien les égalités (5) et (6).

## 1.2 LOI DE CONSERVATION EN GENERAL

### 1.2.1 Qu'est-ce qu'une loi de conservation

D'une manière générale, les lois de la physique expriment un bilan d'une quantité A.

$$(7) \quad \boxed{\frac{d}{dt} \iiint_D A dv = \iint_{\partial D} \alpha dS + \iiint_D B dv}$$

Le premier terme correspond au **taux de variation** de la quantité de A contenue dans le domaine matériel D, cette variation provenant d'une part des **échanges avec l'extérieur** à travers la frontière  $\partial D$  du domaine D (densité surfacique  $\alpha$ ), d'autre part de la **production interne** de la quantité A dans le domaine D, désignée B.

Ainsi A pourra être la masse volumique, la quantité de mouvement, le moment cinétique, l'énergie totale.

$$A = \rho ; \quad A = \rho \vec{V} ; \quad A = \rho \cdot OM \wedge \vec{V} ; \quad A = \rho \left( e + \frac{1}{2} V^2 \right) \quad \dots$$

Il est nécessaire de préciser le domaine D considéré, et son évolution au cours du temps.

Cette loi de conservation prend deux formes équivalentes, selon que l'on utilise une description eulérienne ou lagrangienne.

**Forme Eulérienne**

$$(8) \quad \frac{d}{dt} \iiint_D Adv = \iint_{\partial D} \alpha dS + \iiint_D Bdv$$

On a affaire ici à une **dérivée particulière** d'une intégrale de volume, et le domaine considéré est un domaine matériel D(t).

★ Remarque : **Dérivée matérielle**  $\frac{d}{dt} [f(x, t)] = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial t}$

**Forme Lagrangienne**

$$(9) \quad \frac{\partial}{\partial t} \iiint_{D_0} A_0 dv_0 = \iint_{\partial D_0} \alpha_0 dS_0 + \iiint_{D_0} B_0 dv_0$$

Car en variables lagrangiennes la **dérivée matérielle** coïncide avec la **dérivée partielle**.

$$\frac{d}{dt} [f(X, t)] = \frac{\partial f}{\partial t} \quad \text{car } X = \text{constante}$$

**Exemple :** loi de conservation de la masse

Nous noterons les masses volumiques dans les configurations actuelles et de référence, respectivement par  $\rho$  et  $\rho_0$  :  $dm = \rho dv = \rho_0 dv_0$

↪ **Forme eulérienne**

$$(10) \quad \frac{d}{dt} \iiint_D \rho dv = 0 = \frac{dM}{dt} \quad M = \text{constante}$$

en effet :  $\alpha = 0$  car on a une paroi matérielle imperméable  
 $B = 0$  par conservation

↪ **Forme lagrangienne**

$$(11) \quad \frac{\partial}{\partial t} \iiint_{D_0} \rho_0 dv_0 = 0$$

**1.2.2 Le vecteur flux**

Pour pouvoir utiliser la loi de conservation générale (7), on explicite en mathématique la dérivée particulière d'une intégrale de volume qui est égale à :

$$(12) \quad \boxed{\frac{d}{dt} \iiint_D Adv = \iiint_D \frac{\partial A}{\partial t} dv + \iint_{\partial D} A \vec{V} \cdot \vec{n} dS}$$

L'égalité précédente exprime que la variation de l'intégrale provient d'une part de la variation de la quantité intégrée et d'autre part de la variation du domaine d'intégration où on considère que le domaine continu se déplace à la vitesse  $\vec{V}$  entre les instants  $t$  et  $t + dt$ .

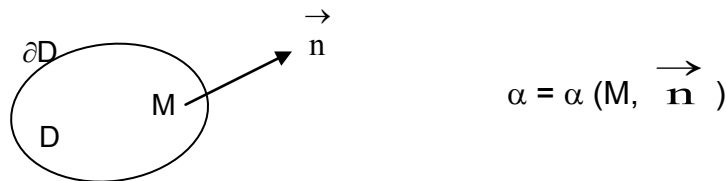
On peut d'autre part démontrer en mathématiques le théorème suivant, sur la transformation d'intégrales : si  $\varphi$  est une fonction continue et à dérivée continue dans  $D$ , et si  $\partial D$  admet un plan tangent continu par morceaux, alors on a :

$$(13) \quad \iiint_D \text{grad } \varphi \, dv = \iint_{\partial D} \varphi \, \vec{n} \, dS$$

ou 
$$\iiint_D \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \, dv = \iint_{\partial D} \varphi \, n_i \, dS$$

Ces deux résultats vont permettre de transformer en intégrales de volume tous les termes de la loi de conservation eulérienne (8).

Pour cela on fait une hypothèse analogue au postulat de Cauchy, à savoir que la densité surfacique  $\alpha$  ne dépend du domaine  $D$  que par la normale extérieure en  $M$  à  $D$ .



Dans ce cas, on démontre qu'il existe donc un vecteur flux à associer à la loi de conservation tel que :

$$(14) \quad \alpha \left( M, -\vec{n} \right) = - \alpha \left( M, \vec{n} \right)$$

Il existe alors un vecteur flux  $\vec{a}$  (exemple du vecteur contrainte) associé à la loi de conservation tel que

$$(15) \quad \alpha(\vec{n}) = a_i n_i = \vec{a} \cdot \vec{n}$$

La formule eulérienne (8) se réduit donc à :

$$(16) \quad \boxed{\frac{d}{dt} \iiint_D A \, dv = \iint_{\partial D} \vec{a} \cdot \vec{n} \, dS + \iiint_D B \, dv}$$

La forme lagrangienne (9) de la loi de conservation peut se traiter de la même manière en introduisant un vecteur flux lagrangien  $\vec{a}_o$ .

$$\alpha_o = \vec{a}_o \cdot \vec{N}$$

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t} \iiint_{D_o} A_o \, dv_o = \iint_{\partial D_o} \vec{a}_o \cdot \vec{N} \, dS_o + \iiint_{D_o} B_o \, dv_o}$$

Les deux formes **eulérienne** et **lagrangienne** sont deux écritures de la **même réalité physique** et les quantités  $A_0$ ,  $\vec{a}_0$ , et  $B_0$  sont reliées aux quantités  $A$ ,  $\vec{a}$  et  $B$  par les relations suivantes :

$$\begin{aligned} Adv &= A_0 dv_0 \Rightarrow A_0 = A J \\ Bdv &= B_0 dv_0 \Rightarrow B_0 = B J \\ \alpha dS &= \alpha_0 dS_0 = \vec{a}_0 \cdot \vec{N} dS_0 \\ \text{or } \alpha dS &= \vec{a} \cdot \vec{n} dS \Rightarrow \vec{a}_0 = J F^{-1} \vec{a} \\ &= \vec{a} \cdot J F^{-1T} \vec{N} dS_0 \\ &= J F^{-1} \vec{a} \cdot \vec{N} dS_0 \end{aligned}$$

En résumé, on a donc :

$$(17) \quad \begin{cases} A_0 = A J \\ B_0 = B J \\ \vec{a}_0 = J F^{-1} \vec{a} \end{cases}$$

### 1.2.3 Forme locale de la loi de conservation

On a la dérivée partielle d'une intégrale de volume (équ.(12)) :

$$\frac{d}{dt} \iiint_D A dv = \iiint_D \frac{\partial A}{\partial t} dv + \iint_{\partial D} A \vec{V} \cdot \vec{n} dS$$

En utilisant le théorème de la divergence, on a :

$$\iint_{\partial D} A \vec{V} \cdot \vec{n} dS = \iiint_D \text{div}(A \vec{V}) dv = \iiint_D (A V_i)_{,i} dv$$

( )<sub>,i</sub> signifiant  $\partial ( ) / \partial x_i$

D'autre part la loi de conservation s'exprime par :

$$\frac{d}{dt} \iiint_D A dv = \iint_{\partial D} \alpha dS + \iiint_D B dv$$

en utilisant le vecteur flux  $\vec{a}$  :

$$\iint_{\partial D} \alpha dS = \iint_{\partial D} \vec{a} \cdot \vec{n} dS = \iint_{\partial D} a_i n_i dS = \iiint_D a_{i,i} dv$$

en égalant les deux expressions on a :

$$\iiint_D \frac{\partial A}{\partial t} dv + \iiint_D (A V_i)_{,i} dv = \iiint_D a_{i,i} dv + \iiint_D B dv$$

$$\iiint_D \left[ \frac{\partial A}{\partial t} + (A V_i)_{,i} - a_{i,i} - B \right] dv = 0$$

Cette équation étant vérifiée, quel que soit le domaine D considéré, on obtient la forme locale Eulérienne :

$$(18) \quad \boxed{\frac{\partial A}{\partial t} + (A V_i)_{,i} - a_{i,i} - B = 0}$$

De même la forme locale Lagrangienne est :

$$(19) \quad \boxed{\frac{\partial A_o}{\partial t} - a_{oI,I} - B_o = 0}$$

Les deux formes précédentes expriment la **même réalité physique** et sont donc strictement équivalentes. Mais on peut aussi le démontrer directement à partir des équations (17).

Démonstration :  $\frac{\partial A_o}{\partial t} - a_{oI,I} - B_o = 0$

Avec les éq.(17) dans (19) on doit avoir :

$$\frac{\partial(AJ)}{\partial t} = (JF_{ki}^{-1} a_i)_{,k} + BJ \quad A_o = AJ \quad a_{o_k} = JF_{ki}^{-1} a_i$$

ce qui revient à vérifier cette relation.

Dans la suite de la démonstration on utilisera les formules sur le déterminant d'une matrice, dans l'espace à 3 dimensions

$$(F^{-1})_{Ji} = \frac{1}{2 \det F} \varepsilon_{imn} \varepsilon_{JPQ} F_{mP} F_{nQ}$$

$$F_{iK} (F^{-1})_{Kj} = \delta_{ij}$$

Avant d'expliciter le calcul nous allons établir la formule générale :

$$(20) \quad \boxed{d(\det A) = \det A \operatorname{tr}(dA A^{-1})} \quad \operatorname{tr} ( ) = \text{trace de } ( )$$

qui nous servira plus loin.

$$\operatorname{Tr} (A) = A_{ij} \delta_{ij} = A_{ii} = A_{11} + A_{22} + A_{33}$$

Démonstration :

$$\det A = \frac{1}{6} \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{mpq} A_{im} A_{jp} A_{kq}$$

$$d(\det A) = \frac{1}{2} \underbrace{\varepsilon_{ijk} \varepsilon_{mpq} A_{im} A_{jp}}_{\det A A^{-1}_{ik}} dA_{kq}$$

$$= \det A \operatorname{tr}(dA A^{-1})$$

l'application de cette formule à  $J = \det F$  donne :

$$\frac{\partial J}{\partial t} = J \operatorname{tr} \left( \frac{\partial F}{\partial t} F^{-1} \right) = J \frac{\partial^2 x_i}{\partial t \partial X_K} \frac{\partial X_K}{\partial x_i} = J V_{i,i} = J \operatorname{div} \vec{V}$$

de même :

$$J_{,K} = \frac{\partial J}{\partial X_K} = J F_{jM,K} F_{Mj}^{-1}$$

Pour calculer  $(F_{Ki}^{-1})_{,K}$  on se sert de :

$$F_{Ki}^{-1} F_{iM} = \delta_{KM}$$

$$\Rightarrow (F_{Ki}^{-1} F_{iM})_{,K} = 0$$

$$\Rightarrow (F_{Ki}^{-1})_{,K} F_{iM} = - F_{Kj}^{-1} F_{jM,K}$$

On a donc :

$$(J F_{Ki}^{-1})_{,K} = J_{,K} F_{Ki}^{-1} + J (F_{Ki}^{-1})_{,K}$$

$$= J F_{jM,K} F_{Mj}^{-1} F_{Ki}^{-1} - J F_{jM,K} F_{Mi}^{-1} F_{Kj}^{-1} = 0$$

Puisque :

$$F_{jM,K} = \frac{\partial^2 x_j}{\partial X_M \partial X_K} = F_{jK,M}$$

On obtient donc à partir de la forme locale lagrangienne, en transformant la dérivée lagrangienne  $\frac{\partial}{\partial t}$  en dérivée eulérienne  $\frac{d}{dt}$  : avec  $\frac{\partial A_0}{\partial t} = \frac{d(AJ)}{dt}$  soit :

$$J \frac{dA}{dt} + A \frac{\partial J}{\partial t} = J F_{Ki}^{-1} a_{i,K} + \underbrace{(J F_{Ki}^{-1})_{,K}}_0 a_i + BJ$$

$$\Rightarrow J \frac{dA}{dt} + A J V_{K,K} = \frac{\partial X_K}{\partial x_i} J \frac{\partial a_i}{\partial X_K} + BJ = J \frac{\partial a_i}{\partial x_i} + BJ = J a_{i,i} + BJ$$

$$\Rightarrow \frac{\partial A}{\partial t} + (A V_i)_{,i} - a_{i,i} - B = 0$$

on retrouve bien (18)

car :

$$\frac{dA}{dt} = \frac{\partial A}{\partial t} + A_{,i} V_i$$

### 1.3 MILIEUX CONTINUS CLASSIQUES

A partir de la loi de conservation :

$$\frac{d}{dt} \iiint_D A \, dv = \iint_S \alpha \, dS + \iiint_D B \, dv$$

On va suivre pour chaque grandeur physique le plan précédent :

1. construction d'un vecteur flux  $\alpha = \vec{a} \cdot \vec{n}$  (exemple vecteur contrainte)
2. forme locale

Il faudrait rajouter également les équations aux discontinuités mais elles ne seront pas présentées dans ce polycopié au nombre de pages limitées.

#### 1.3.1 La loi de conservation de la masse

La loi de la conservation de la masse se traduit par :

$$(21) \quad \frac{dm}{dt} = 0$$

Cette loi est une loi universelle au moins dans le cadre de la **mécanique classique** (non relativiste). La seule hypothèse sous-jacente à cette écriture concerne l'homogénéité du matériau (un constituant unique).

m est la masse d'un domaine matériel, soit :  $m = \iiint_D \rho \, dv = \iiint_{D_0} \rho_0 \, dv_0$

On a donc :  $A = \rho$  et  $\alpha, \vec{a}$  et B nuls.

$$* \text{ forme locale} \quad (22) \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + (\rho V_i)_{,i} = 0 = \frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \vec{V} \quad (\text{Euler})$$

$$(23) \quad \frac{\partial \rho_0}{\partial t} = 0 \quad (\text{Lagrange})$$

Cas particuliers des milieux incompressibles :

$$\begin{aligned} \rho_0 = \rho = \text{cte} \\ dv_0 = dv = J dv_0 \quad \Rightarrow \quad J = \det F = 1 \end{aligned}$$

Forme locale  $\operatorname{div} \vec{V} = 0$

L'équation de conservation de la masse permet d'écrire la forme locale Eulérienne d'une loi de conservation sous la forme :

$$(24) \quad \rho \frac{d}{dt} \left( \frac{A}{\rho} \right) = B + a_{i,i}$$

Démonstration :

$$\begin{aligned} \rho \frac{d}{dt} \left( \frac{A}{\rho} \right) &= \rho \left\{ \frac{1}{\rho} \frac{dA}{dt} - \frac{1}{\rho^2} A \frac{d\rho}{dt} \right\} \\ &= \frac{dA}{dt} - A \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} \\ &= \frac{dA}{dt} + A \operatorname{div} \vec{V} \\ &= - (A V_i)_{,i} + a_{i,i} + B + A \operatorname{div} \vec{V} + A_{,i} V_i \\ &= a_{i,i} + B \end{aligned}$$

1.3.2 Loi fondamentale de la dynamique

La loi fondamentale de la dynamique s'exprime par :  $\frac{d}{dt}[C] = [F^{ext}]$

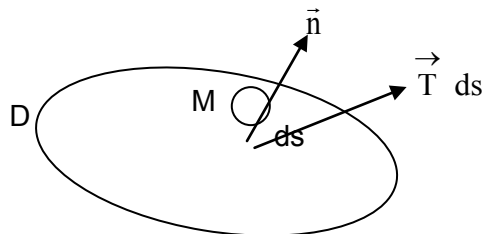
$[C]$             torseur cinétique  
 $[F^{ext}]$         torseur des efforts extérieurs

et elle conduit à deux lois de conservation vectorielle (résultante et moment). Pour expliciter ces lois il faut préciser la schématisation des efforts extérieurs. Nous supposons que ceux-ci se décomposent en :

- effort à distance caractérisé par une densité massique  $\vec{f}$  (en général la pesanteur  $\vec{f} = \vec{g}$ )
- effort de contact schématisé par  $\vec{T}$  :

**Postulat de Cauchy**

- les efforts exercés sur une partie D d'un milieu continu par le complémentaire de D peuvent être schématisés par une répartition surfacique de forces.
- cette densité surfacique ne dépend du domaine considéré que par sa normale extérieure.



$$\vec{T} = \vec{T}(M, n)$$

Cette schématisation des efforts extérieurs conduit à la **mécanique des milieux continus classique** mais d'autres schématisations sont possibles.

En particulier on peut introduire, en plus des densités de forces massique  $\vec{f}$  et surfaciques  $\vec{T}$ , des densités de couple (matériaux avec des couples de contraintes).

★ **Remarque** : nous ne nous intéressons ici qu'à la forme eulérienne de la loi fondamentale. La forme lagrangienne sera envisagée plus loin (chapitre 2.1.1.). Compte-tenu de ces hypothèses nous explicitons A,  $\alpha$  et B :

Conservation de la quantité de mouvement :

$$\frac{d}{dt} \iiint_D \rho \vec{V} dv = \iint_S \vec{T} dS + \iiint_D \rho \vec{f} dv$$

Le flux associé au vecteur contrainte  $\vec{T}$  est le tenseur classique des contraintes  $\sigma_{ij}$  :

$$T_i = \sigma_{ij} n_j \quad \text{ou} \quad \vec{T} = \sigma \cdot \vec{n}$$

$\sigma$  tenseur des contraintes de Cauchy



On obtient alors directement :

\* forme locale si on note  $\gamma_i = \frac{dV_i}{dt}$  l'accélération

$$(25) \quad \boxed{\rho \gamma_i = \rho f_i + \sigma_{ij,j}} \quad (\text{d'après (24)})$$

Conservation du moment cinétique (moment par rapport à 0)

$$(26) \quad \frac{d}{dt} \iiint_D \rho \vec{OM} \wedge \vec{V} dv = \iint_S \vec{OM} \wedge \vec{T} dS + \iiint_D \rho \vec{OM} \wedge \vec{f} dv$$

Pour le moment cinétique on a donc :

$$\begin{aligned} A &= \rho \varepsilon_{ijk} x_j V_k & \alpha &= \varepsilon_{ijk} x_j T_k \\ \alpha &= a_i n_i & \Rightarrow & & a_i &= \varepsilon_{ijk} x_j \sigma_{kl} \\ B &= \rho \varepsilon_{ijk} x_j f_k \end{aligned}$$

Compte-tenu de l'équation du mouvement, la forme locale de cette équation donne la symétrie du tenseur des contraintes :  $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$ .

Démonstration :

$$\begin{aligned} \rho \frac{d}{dt} \left( \frac{A}{\rho} \right) &= B + a_{i,i} & \text{devient ici :} \\ \rho \frac{d}{dt} (\varepsilon_{ijk} x_j V_k) &= (\varepsilon_{ijk} x_j \sigma_{kl})_{,l} + \rho \varepsilon_{ijk} x_j f_k \\ \Rightarrow \quad \cancel{\rho \varepsilon_{ijk} V_j V_k} + \rho \varepsilon_{ijk} x_j \gamma_k &= \varepsilon_{ijk} \delta_{jl} \sigma_{kl} + \varepsilon_{ijk} x_j \sigma_{kl,l} + \rho \varepsilon_{ijk} x_j f_k \end{aligned}$$

Le premier terme disparaît car  $\varepsilon_{ijk}$  est antisymétrique en j et k.

La forme locale de l'équation de conservation de la quantité de mouvement est donc:

$$\begin{aligned} \text{d'où} \quad \rho \gamma_k &= \rho f_k + \sigma_{kl,l} \\ \rho \varepsilon_{ijk} x_j \gamma_k &= \rho \varepsilon_{ijk} x_j f_k + \varepsilon_{ijk} x_j \sigma_{kl,l} \end{aligned}$$

Il reste donc :  $\varepsilon_{ijk} \delta_{jl} \sigma_{kl} = 0$

$$\text{soit} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\sigma_{ij} = \sigma_{ji}}$$

### 1.3.3 Premier principe de la thermodynamique

Le premier principe de la thermodynamique, **ou loi de conservation de l'énergie**, exprime que la variation de l'énergie totale (énergie interne + énergie cinétique) est égale à la somme de la puissance des efforts extérieurs développée sur le système et de la quantité de chaleur apportée au système par unité de temps :

$$(27) \quad \boxed{\frac{d}{dt} [E + K] = P^{\text{ext}} + \dot{Q}}$$

Pour déterminer la forme locale, on va exprimer chacun des termes de l'équation précédente :

Energie cinétique (28) 
$$K = \iiint_D \frac{1}{2} \rho V^2 dv$$

L'**énergie interne** E est une fonction extensive (l'énergie interne de l'ensemble de deux systèmes est la somme des énergies internes de chacun des systèmes).

On peut donc écrire :

(29) 
$$E = \iiint_D \rho e dv$$

où e est l'**énergie interne spécifique** ou énergie interne par unité de masse.

**Puissance des efforts extérieurs**  $P^{(ext)}$

(30) 
$$P^{(ext)} = \iiint_D \rho f_i V_i dv + \iint_S T_i V_i dS$$

On suppose que les échanges de chaleur sont de deux types : surfaciques (conduction) et volumiques (apport de chaleur de l'extérieur dans le système : rayonnement ...),

La quantité taux de chaleur  $\dot{Q}$  sera donc écrite sous la forme : (rayonnement + conduction)

(31) 
$$\dot{Q} = \iiint_D \rho r dv + \iint_S h dS$$

r est une donnée du problème par unité de temps.

Le premier principe (27) s'écrit donc :

$$\frac{d}{dt} \iiint_D \rho \left( e + \frac{1}{2} V^2 \right) dv = \iiint_D \rho (f_i v_i + r) dv + \iint_S (T_i V_i + h) dS$$

Ce qui est bien une loi de conservation telle que définie auparavant avec :

$$A = \rho \left( e + \frac{1}{2} V^2 \right)$$

$$\alpha = T_i V_i + h$$

$$B = \rho (f_i V_i + r)$$

On a :  $\alpha = T_i V_i + h = \sigma_{ij} n_j V_j + h = a_j n_j \Rightarrow h = (-\sigma_{ij} V_j + a_j) n_j = -q_j n_j$

(32) 
$$h = - \vec{q} \cdot \vec{n}$$

où  $\vec{q}$  est le vecteur flux de chaleur caractérisant les échanges de chaleur par conduction.

On a donc :  $a_j = \sigma_{ij} V_j - q_j$

La forme locale de l'équation de conservation de l'énergie est alors :

$$\rho (\dot{e} + V_i \gamma_i) = (f_i V_i + r) + (\sigma_{ij} V_i - q_j)_{,j}$$

$$\rho \dot{e} + (\rho \gamma_i - \sigma_{ij,j} - \rho f_i) V_i = \rho r + \sigma_{ij} V_{i,j} - q_{j,j}$$

Or, on sait d'après la forme locale de la loi de conservation de la quantité de mouvement (25), que :

$$\rho \gamma_i = \sigma_{ij,j} + \rho f_i$$

Il reste donc finalement

(33) 
$$\rho \dot{e} = \rho r + \sigma_{ij} V_{i,j} - q_{j,j}$$

### 1.3.4 Synthèse

Les différentes **lois de conservations**, en formulation eulérienne :

$$\frac{d}{dt} \iiint_D A dv = \iint_S \alpha dS + \iiint_D B dv \quad \text{avec} \quad \alpha = \vec{a} \cdot \vec{n}$$

peuvent donc être résumées à l'aide du tableau suivant :

Conservation de	A	$\alpha$	$\vec{a}$	B
Masse	$\rho$	0	0	0
Quantité de mvt	$\rho V_i$	$T_i$	$\sigma_{ij}$	$\rho f_i$
Moment cinétique	$\rho \varepsilon_{ijk} x_j V_k$	$\varepsilon_{ijk} x_j \sigma_{kl}$	$\varepsilon_{ijk} x_j \sigma_{kl}$	$\rho \varepsilon_{ijk} x_j f_k$
Energie	$\rho \left( e + \frac{1}{2} V^2 \right)$	$T_i V_i + h$	$\sigma_{ij} V_j - q_j$	$\rho f_i V_i + \rho r$

## 1.4 PUISSANCES VIRTUELLES

### 1.4.1 Théorème des puissances virtuelles :

On part de la forme locale de la conservation de la quantité de mouvement :

$$(25) \quad \rho \gamma_i = \sigma_{ij,j} + \rho f_i$$

On la multiplie par  $V_i^*$ , **champ de vitesses virtuelles** :

$$\rho \gamma_i V_i^* = \sigma_{ij,j} V_i^* + \rho f_i V_i^*$$

et l'on somme sur le domaine D :

$$\begin{aligned} \iiint_D \rho \gamma_i V_i^* dv &= \iiint_D (\sigma_{ij,j} V_i^* + \rho f_i V_i^*) dv \\ \iiint_D \sigma_{ij,j} V_i^* dv &= \iiint_D (\sigma_{ij} V_i^*)_{,j} dv - \iiint_D \sigma_{ij} V_{i,j}^* dv \\ &= \iint_S \sigma_{ij} V_i^* n_j dS - \iiint_D \sigma_{ij} V_{i,j}^* dv \quad \text{en utilisant le théorème de la divergence} \end{aligned}$$

On obtient alors le **théorème des puissances virtuelles** :

$$(34) \quad \underbrace{\iiint_D \rho \gamma_i V_i^* dv}_{P^{*(acc)}} = \underbrace{\iiint_D \rho f_i V_i^* dv + \iint_S T_i V_i^* dS}_{P^{*(ext)}} - \underbrace{\iiint_D \sigma_{ij} V_{i,j}^* dv}_{P^{*(int)}}$$

$$(35) \quad P^{*(acc)} = P^{*(ext)} + P^{*(int)}$$

Dans le champ de vitesses virtuelles, la puissance virtuelle des quantités d'accélération est égale à la somme de la puissance virtuelle des efforts extérieurs (efforts à distance et efforts de contact) et de la puissance virtuelle des efforts intérieurs.

Ce théorème est valable pour tout champ de vitesses virtuelles et en prenant le champ de vitesse réel  $V_i^* = V_i$ , on obtient le théorème de l'énergie cinétique et **du fait de la conservation de la masse** on peut écrire:

$$\iiint_D \rho \gamma_i V_i dv = \iiint_D \rho \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (V^2) dv = \frac{d}{dt} \iiint_D \frac{1}{2} \rho V^2 dv = \frac{dK}{dt}$$

$$\Rightarrow \quad (36) \quad \boxed{\frac{dK}{dt} = P^{(ext)} + P^{(int)}}$$

La dérivée par rapport au temps de l'énergie cinétique est égale à la puissance des efforts extérieurs et intérieurs.

En combinant avec le **premier principe de la thermodynamique** (27) :

$$\frac{d}{dt} (E + K) = P^{(ext)} + \dot{Q} ; \text{ on obtient : } \frac{dE}{dt} = \dot{Q} - P^{(int)}$$

La forme locale associée à cette forme redonnerait directement (33).

### 1.4.2 Remarques sur les puissances virtuelles :

Pour tout **système de solides rigides**, la loi fondamentale équivaut aux principes des puissances virtuelles (mécanique analytique).

Cette démarche peut s'étendre à la mécanique des milieux continus. En postulant le principe des puissances virtuelles :

$$(35) \quad P^{*(acc)} = P^{*(ext)} + P^{*(int)}$$

pour tout champ de vitesses virtuelles.

On peut montrer que l'on peut **reconstruire l'ensemble de la MMC** à partir de cet énoncé.

Pour construire un cadre dynamique en mécanique analytique, il faut donc :

1. choisir une « description cinématique » c'est-à-dire un champ  $V^*$  de vitesses virtuelles,
2. choisir la forme des différentes puissances avec les hypothèses suivantes :

- a.  $P^{(acc)} = \frac{dK}{dt}$  pour le mouvement réel
- b.  $P^{*(ext)} = P^{*(ext \text{ à distance})} + P^{*(ext \text{ de contact})}$
- c.  $P^{*(int)} = 0$  pour **le mouvement rigidifiant**

3. en déduire les équations du mouvement et les conditions aux limites.

## 2 CONTRAINTES ET DEFORMATIONS

### 2.1 DESCRIPTION DES CONTRAINTES

#### 2.1.1 Flux de contraintes

L'étude des grandes déformations impose la distinction entre grandeurs **eulériennes et lagrangiennes**. Nous avons vu au chapitre 1 (1.3.2) que l'équation de conservation de la quantité de mouvement, en résultante, prenait deux formes :

\* Ecriture **eulérienne**

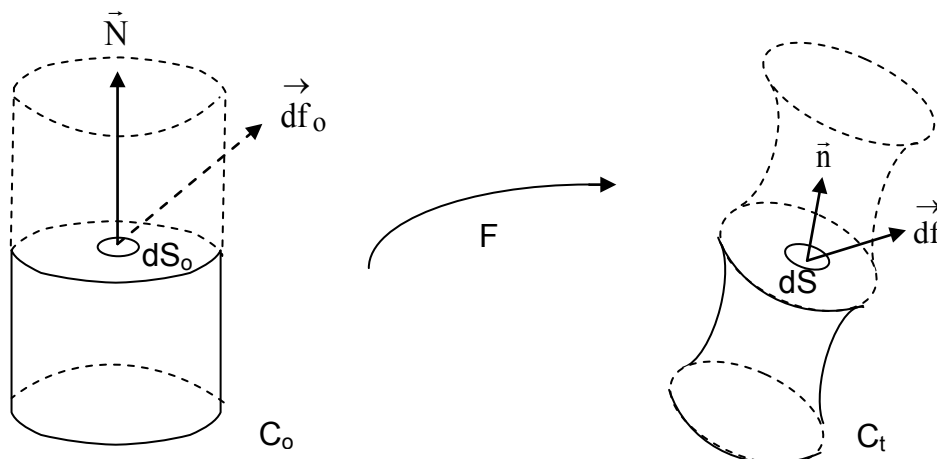
$$(1) \quad \frac{d}{dt} \iiint_D \rho v_i dv = \iint_{\partial D} T_i dS + \iiint_D \rho f_i dv$$

\* Ecriture **lagrangienne**

$$(2) \quad \frac{d}{dt} \iiint_{D_0} \rho_0 v_i dv_0 = \iint_{\partial D_0} T_i^0 dS_0 + \iiint_{D_0} \rho_0 f_i dv_0$$

La première forme traduit la conservation de grandeurs eulériennes (vitesse, contraintes, forces par unité de masse) dans la configuration eulérienne  $C(t)$ . Donc le tenseur des contraintes  $\sigma = T$  défini par  $T_i = T_{ij}n_j$  est un **tenseur eulérien**. Nous notons désormais  $T$  le tenseur que nous notions auparavant  $\sigma$ , ce changement de notation sera justifié au §2.1.4.

La seconde forme traduit la conservation de ces mêmes grandeurs eulériennes, mais dans la configuration lagrangienne  $C_0$ . Donc le tenseur (pi)  $\Pi$  défini par  $T_i^0 = \Pi_{ij}N_j$  est un tenseur mixte, puisqu'il lie les composantes, eulériennes par définition, du **vecteur contrainte**, aux composantes lagrangiennes du vecteur unitaire normal à  $dS_0$ .



$$(3) \quad \boxed{\begin{cases} \mathbf{T}_i = T_{ij} n_j \\ \mathbf{T}_i^o = \Pi_{ij} N_j \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d\mathbf{f}_i = T_{ij} n_j dS \\ d\mathbf{f}_i = \Pi_{ij} N_j dS_o \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \vec{d\mathbf{f}} = \vec{T} \vec{n} dS \\ \vec{d\mathbf{f}} = \vec{\Pi} \vec{N} dS_o \end{cases}}$$

\* T désigne le **tenseur des contraintes de Cauchy**. Nous avons vu au ch. 1 que l'écriture de la conservation du moment cinétique conduisait à la symétrie du tenseur  $T_{ij} = T_{ji}$ .

\*  $\Pi$  est le **premier tenseur de Piola Kirchoff** (PK1) ou tenseur de Boussinesq. Il n'est pas symétrique  $\Pi_{ij} \neq \Pi_{ji}$

Exprimons alors la conservation de la quantité de mouvement à l'aide de ces deux tenseurs :

\* Dans  $C_t$  l'équation (1) nous donne :

$$\iiint_D \rho f_i dv + \iint_{\partial D} T_{ij} n_j dS = \iiint_D \rho \gamma_i dv$$

On en déduit l'écriture eulérienne : (4)  $\boxed{\frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j} + \rho f_i = \rho \gamma_i}$

\* Dans  $C_o$  l'équation (2) nous donne :

$$\iiint_{D_o} \rho_o f_i dv_o + \iint_{\partial D_o} \Pi_{ij} N_j dS_o = \iiint_{D_o} \rho_o \gamma_i dv_o$$

On en déduit **l'écriture mixte** : (5)  $\boxed{\frac{\partial \Pi_{ij}}{\partial X_j} + \rho_o f_i = \rho_o \gamma_i}$

Ces deux équations sont deux **formes équivalentes** de **l'équation du mouvement**. Dans le cas statique ou quasi-statique, l'accélération disparaît pour redonner les équations d'équilibre :

$$(6) \quad T_{ij,j} + \rho f_i = 0$$

$$(7) \quad \Pi_{ij,j} + \rho_o f_i = 0$$

Quant à l'équation de conservation du moment cinétique, qui dans sa version eulérienne conduit, comme nous l'avons vu plus haut, à la symétrie du tenseur de Cauchy, elle donne sous sa forme lagrangienne :

$$\frac{d}{dt} \iiint_{D_o} \rho_o \varepsilon_{ijk} x_j \gamma_k dv_o = \iiint_{D_o} \rho_o \varepsilon_{ijk} x_j f_k dv_o + \iint_{\partial D_o} \rho_o \varepsilon_{ijk} x_j \Pi_{kL} N_L dS_o$$

Écriture à nouveau mixte, car on écrit en lagrangien la conservation d'une quantité eulérienne. La forme locale associée donne simplement :

$$(8) \quad F_{jL} \Pi_{kL} = F_{kL} \Pi_{jL} \quad \text{ou} \quad \mathbf{F} \Pi \mathbf{T} = \Pi \mathbf{F} \mathbf{T} = \mathbf{J} \mathbf{T}$$

### 2.1.2 Les tenseurs des contraintes

Nous allons construire, à partir du tenseur mixte non symétrique  $\Pi$ , un tenseur exclusivement lagrangien et **symétrique**. Pour cela nous introduisons artificiellement un vecteur  $\vec{df}_0$ , transformé de  $\vec{df}$  par le tenseur gradient inverse  $F^{-1}$  :  $\vec{df}_0 = F^{-1} \vec{df}$  et  $\vec{df} = F \vec{df}_0$

Le vecteur  $\vec{df}_0$  ainsi construit n'a aucune signification physique, la notion de force n'ayant de sens que sur la configuration déformée. Cependant, cette transposition de  $\vec{df}$  dans  $C_0$  présente l'avantage de permettre l'écriture d'une relation lagrangienne entre  $\vec{df}_0$  et  $\vec{N}$  :

$$(9) \quad \boxed{\vec{df}_0 = S \cdot \vec{N} dS_0} \quad \text{ou} \quad df_{0i} = S_{ij} N_j dS_0$$

S est le **second tenseur de Piola Kirchoff (PK2)**, ou tenseur de Piola Lagrange.

\* On introduit d'autre part le tenseur eulérien  $\tau = JT$ , appelé tenseur des contraintes de Kirchoff ; c'est un tenseur symétrique qui joue un rôle important pour la formulation variationnelle des problèmes en grande déformation.

Compte-tenu des définitions précédentes et de l'expression de la transformation d'un élément de surface  $\vec{n} dS = JF^{-1T} \vec{N} dS_0$ , on peut lier les quatre tenseurs des contraintes :

$$\begin{aligned} \vec{df} &= \Pi \vec{N} dS_0 = \Pi J^{-1} F^T \vec{n} dS = T \vec{n} dS \\ \Rightarrow T &= J^{-1} \Pi F^T \\ \vec{df}_0 &= F^{-1} \vec{df} = F^{-1} \Pi \vec{N} dS_0 = S \vec{N} dS_0 \\ \Rightarrow S &= F^{-1} \Pi \end{aligned}$$

donc 
$$S = F^{-1} J T F^{-1T} \quad \text{et} \quad T = J^{-1} F S F^T$$

On obtient en résumé :

$$(10) \quad \boxed{\begin{aligned} \tau &= JT = \Pi F^T = F S F^T \\ S &= F^{-1} \Pi = F^{-1} \tau F^{-1T} = JF^{-1} T F^{-1T} \end{aligned}}$$

Ces équations montrent que les tenseurs T,  $\tau$  et S sont symétriques tandis que  $\Pi$  ne l'est pas.

Nous nous retrouvons donc, pour décrire les contraintes, avec quatre tenseurs  $\tau$ , T,  $\Pi$  et S, chacun ayant ses avantages et ses inconvénients. Néanmoins  $\tau$  et S n'ont pas de signification physique, tandis que T et  $\Pi$  caractérisent directement les efforts appliqués. Ce sont donc eux qui interviendront dans l'écriture des conditions aux limites de type statique, comme on le verra plus loin et dans les exercices.

**Exemple : Invariance des contraintes de PK2 dans une rotation de solide rigide**

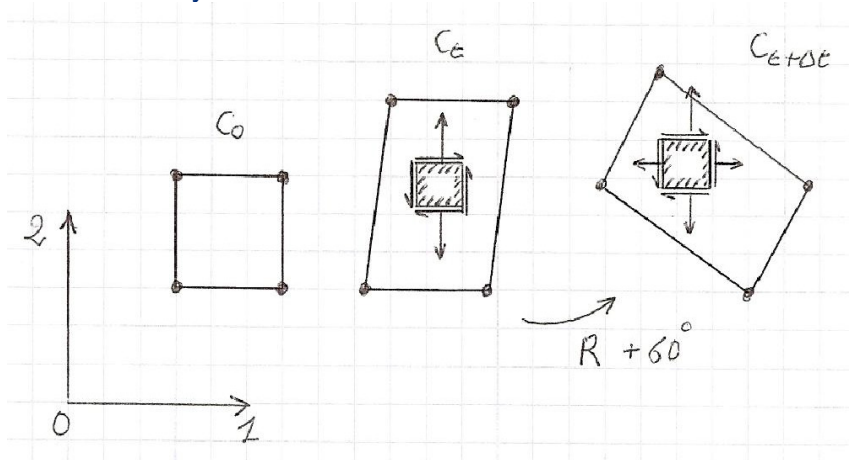
Soit entre la configuration initiale  $C_0$  et la configuration à l'instant  $t$   $C_t$  le gradient de la déformation donné par :

$$F_t = \begin{bmatrix} 1 & 0.2 \\ 0 & 1.5 \end{bmatrix} \text{ et un état de contrainte vrai de Cauchy par : } T_t = \begin{bmatrix} 0 & 1000 \\ 1000 & 2000 \end{bmatrix}$$

et entre les configurations à  $t$  et  $t+\Delta t$  uniquement une rotation  $R$  de  $\theta=+60^\circ$  défini par la matrice :

$$R = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{bmatrix}$$

Contraintes de Cauchy et de PK2 à  $t+\Delta t$  ?



A  $t$  et  $t+\Delta t$  on a les contraintes de Cauchy  $T$  avec :

$$df_t = T_t n_t dS_t \text{ et } df_{t+\Delta t} = T_{t+\Delta t} n_{t+\Delta t} dS_{t+\Delta t} \text{ or dans la rotation } df_{t+\Delta t} = R df_t$$

$$n_{t+\Delta t} = R n_t \text{ mais le scalaire element de surface : } dS_{t+\Delta t} = dS_t$$

d'où en identifiant on a :

$$T_{t+\Delta t} = R T_t R^T = \begin{bmatrix} 634 & -1370 \\ -1370 & 1370 \end{bmatrix}$$

Pour PK2 à  $t$  :

$$S_t = \det|F_t| |F_t^{-1} T_t F_t^{-T}| = \begin{bmatrix} -346 & 733 \\ 733 & 1330 \end{bmatrix}$$

Pour PK2 à  $t+\Delta t$  :

$$S_{t+\Delta t} = \det|F_{t+\Delta t}| |F_{t+\Delta t}^{-1} T_{t+\Delta t} F_{t+\Delta t}^{-T}|$$

or dans la rotation :

$$F_{t+\Delta t} = R F_t \quad \det|F_{t+\Delta t}| = \det|R| \det|F_t| = \det|F_t| \quad F_{t+\Delta t}^{-1} = F_t^{-1} R^T \quad F_{t+\Delta t}^{-T} = R F_t^{-T}$$

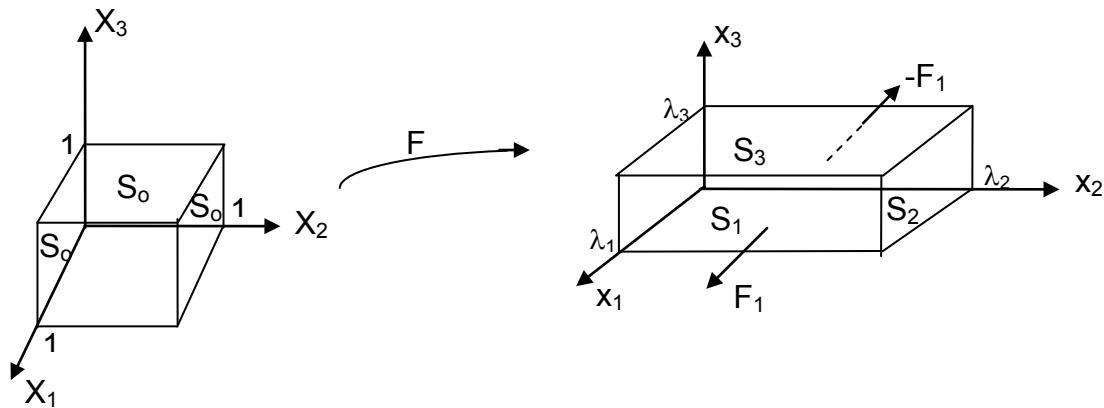
et comme

$$R R^T = R^T R = 1 \text{ il vient en reportant :}$$

$$S_{t+\Delta t} = S_t = \begin{bmatrix} -346 & 733 \\ 733 & 1330 \end{bmatrix}$$



2.1.3 Exemple : Contraintes et déformation homogène triaxiale



$$\begin{cases} x_1 = \lambda_1 X_1 \\ x_2 = \lambda_2 X_2 \\ x_3 = \lambda_3 X_3 \end{cases} \Rightarrow F = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad J = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3$$

$T_{11} = \sigma_1 = \frac{F_1}{S_1}$  désigne **la contrainte vraie** (« true stress » en anglais) puisque  $S_1$  est la surface en configuration déformée.

$\Pi_{11} = \frac{\sigma_1 J}{\lambda_1} = \sigma_1 \lambda_2 \lambda_3 = \frac{F_1}{S_0}$  désigne **la contrainte nominale** (« engineering stress » en anglais) puisque  $S_0$  est la surface avant déformation. C'est elle que l'on mesure simplement dans un essai de traction. Pour PK2 et Kirchhoff :

$$\left. \begin{aligned} S_{11} &= \frac{\sigma_1 J}{\lambda_1^2} = \frac{F_1}{S_0 \lambda_1} \\ \tau_{11} &= J \sigma_1 \end{aligned} \right\} \text{ Ces deux tenseurs n'ont pas de signification physique.}$$

2.1.4 Conditions aux limites

On utilise pour exprimer les conditions aux limites de type statique, l'un ou l'autre des tenseurs  $T$  ou  $\Pi$ . Une des difficultés majeures en grandes déformations réside en effet dans le fait que les conditions aux limites de type statique font intervenir la manière dont les efforts appliqués varient avec la géométrie du solide, c'est-à-dire la technologie d'application des déformations.

On rencontre trois cas importants :

a. Dans le cas d'une **charge morte**, c'est-à-dire lorsque les efforts appliqués sont donnés par unité de surface **sur la configuration non déformée** les conditions aux limites sont alors exprimées sous la forme :

$$(11) \quad T_i^d = \Pi_{ij} N_j$$

C'est le cas le plus courant et le plus commode à étudier, car la configuration de référence  $C_0$  est connue.

b. Dans le cas où les efforts sont donnés par unité de surface **dans la configuration déformée** (exemple du formage hydraulique où les efforts sont appliqués par l'intermédiaire d'un fluide sous pression), les conditions aux limites sont données sous la forme :

$$(12) \quad -p^d n_i = T_{ij} n_j$$

c. Dans le cas des surfaces libres, on a  $p^d = 0$  et  $T_i^d = 0$ . On pourra donc indifféremment écrire les conditions aux limites avec l'un ou l'autre des tenseurs  $T$  ou  $\Pi$ . Bien évidemment toutes ces difficultés disparaissent en petites perturbations. Nous montrerons au paragraphe 2.2.5 que les quatre tenseurs  $\tau$ ,  $T$ ,  $S$  et  $\Pi$  coïncident alors au premier ordre pour redonner le tenseur des contraintes classique  $\sigma$ , qui est en réalité le tenseur de Cauchy  $T$ , mais que nous noterons dans ce cas  $\sigma$  pour souligner le fait que l'on est en petites perturbations.

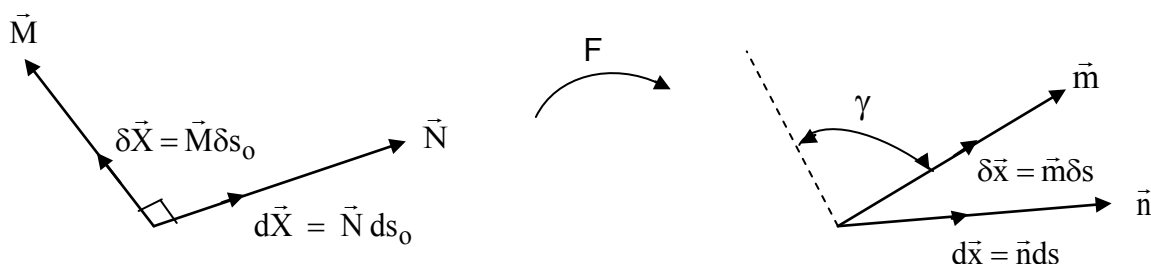
## 2.2 DESCRIPTION DES DEFORMATIONS

Le **tenseur gradient**  $F$  décrit le **mouvement local** du solide. Pour définir sa **déformation**, c'est-à-dire ses **changements de forme**, il faut, comme en petites perturbations, éliminer la rotation. On peut donc :

- \* soit définir directement les déformations (paragraphe 2.2.1.),
- \* soit utiliser une décomposition permettant d'isoler la rotation en bloc du solide de la déformation pure (paragraphe 2.2.2.), c'est la décomposition polaire de  $F=RU=VR$ .

### 2.2.1 Les tenseurs de déformation

Pour caractériser les changements de forme, il faut caractériser les **variations de longueur** et les **variations d'angle**, soit, en fait, les variations de produit scalaire.



On définit :

\* **l'allongement dans la direction**  $\vec{N}$   $\lambda(\vec{N}) = \frac{ds}{ds_0}$  et  $\epsilon(\vec{N}) = \frac{ds - ds_0}{ds_0}$

\* **le glissement** dans les directions perpendiculaires  $\vec{M}$  et  $\vec{N}$  :  $\gamma\left(\begin{matrix} \vec{M}, \vec{N} \end{matrix}\right) = \frac{\Pi}{2} - \left(\begin{matrix} \vec{m}, \vec{n} \end{matrix}\right)$

Explicitons le produit scalaire  $\vec{dx} \cdot \vec{\delta x}$  à partir des **vecteurs fibres matérielles**  $\vec{dX}$  et  $\vec{\delta X}$  :

$$\begin{aligned} \vec{dx} \cdot \vec{\delta x} &= dx_i \cdot dx_i = (F_{ij} dX_j) (F_{ik} \delta X_k) \\ &= (F_{ij} F_{ik}) (\delta X_k dX_j) \\ &= C_{JK} dX_J \delta X_K \\ \text{avec } C_{JK} &= F_{iJ} F_{iK} = F_{ji}^t F_{iK} \quad \text{symétrique} \end{aligned}$$

Ainsi (13)  $\vec{dx} \cdot \vec{\delta x} = d\vec{X} \cdot \mathbf{C} \cdot \vec{\delta X}$

Avec (14)  $\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \mathbf{F}$  tenseur des dilatations de Cauchy-Green droit (F à droite)

la variation du produit scalaire s'exprime alors par :

$$\vec{dx} \cdot \vec{\delta x} - d\vec{X} \cdot \vec{\delta X} = 2 d\vec{X} \cdot \mathbf{E} \cdot \vec{\delta X} \quad \text{où} \quad E_{IJ} = \frac{1}{2} (C_{IJ} - \delta_{IJ})$$

On définit donc le tenseur de Green-Lagrange E par :

(15)  $\mathbf{E} = \frac{1}{2} (\mathbf{C} - \mathbf{1})$

\* C est le **tenseur des dilatations**, ou **tenseur de Cauchy-Green droit**. C'est un tenseur lagrangien, symétrique.

\* E est le tenseur des déformations de **Green-Lagrange**.

Si l'on introduit le **vecteur déplacement**  $\vec{u}$ , il vient :  $x_i = X_i + u_i(X_i, t)$

Donc :  $F_{iJ} = \frac{\partial x_i}{\partial X_J} = \delta_{iJ} + \frac{\partial u_i}{\partial X_J}$

d'où :  $E_{IJ} = \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial u_I}{\partial X_J} + \frac{\partial u_J}{\partial X_I} + \frac{\partial u_K}{\partial X_I} \cdot \frac{\partial u_K}{\partial X_J} \right]$

Cette expression est souvent utilisée pour introduire dans une théorie essentiellement linéaire quelques éléments de non-linéarité (théorie des plaques de Von Karman, problème de flambage, par exemple).

De façon tout à fait symétrique, on peut expliciter le produit scalaire  $\vec{dX} \cdot \vec{\delta X}$  en fonction des vecteurs  $\vec{dx}$  et  $\vec{\delta x}$  :

$$\begin{aligned} \vec{dX} \cdot \vec{\delta X} &= dX_I \cdot \delta X_I = \left( F_{Ij}^{-1} dx_j \right) \left( F_{Ik}^{-1} dx_k \right) \\ &= \left( F_{Ij}^{-1} F_{Ik}^{-1} \right) dx_j \delta x_k \\ &= B_{jk}^{-1} dx_j \delta x_k \end{aligned}$$

$$B_{jk}^{-1} = F_{Ij}^{-1} F_{Ik}^{-1} = F_{jI}^{-1T} F_{Ik}^{-1} \quad B = \left( F^{-T} F^{-1} \right)^{-1} = F F^T$$

Ainsi : (16)  $\vec{dX} \cdot \vec{\delta X} = \vec{dx} \cdot B^{-1} \cdot \vec{\delta x}$

Avec (17)  $B = F \cdot F^T$

C'est le tenseur des dilatations de Cauchy-Green gauche (F est à gauche)  
La variation du produit scalaire s'exprime alors :

$$\vec{dx} \cdot \vec{\delta x} - \vec{dX} \cdot \vec{\delta X} = 2 \vec{dx} \cdot A \cdot \vec{\delta x} \quad \text{où} \quad A_{ij} = \frac{1}{2} \left( \delta_{ij} - B_{ij}^{-1} \right)$$

On définit donc le tenseur A par la relation :

$$(18) \quad A = \frac{1}{2} \left( 1 - B^{-1} \right)$$

- \* B est le **tenseur de Cauchy-Green gauche**. C'est un tenseur eulérien, symétrique.
- \* A est le **tenseur des déformations d'Almansi**.

On obtient ainsi la relation entre les tenseurs A et E :

$$(19) \quad A = F^{-1T} E F^{-1} \quad \text{ou} \quad E = F^T A F$$

en composantes :  $A_{ij} = F_{Ki}^{-1} F_{Lj}^{-1} E_{KL}$

Exprimons alors l'allongement et le glissement à l'aide de l'un de ces deux tenseurs, par exemple le tenseur de Cauchy Green droit C:

$$* \quad ds = \left( \vec{dx} \cdot \vec{dx} \right)^{1/2} = \left( C_{IJ} dX_I dX_J \right)^{1/2} = \left[ \vec{N} C \vec{N} \right]^{1/2} ds_0$$

soit

$$\lambda(\vec{N}) = \frac{ds}{ds_0} = \sqrt{\vec{N} C \vec{N}}$$

$$(20) \quad \varepsilon \left( \vec{N} \right) = \frac{ds - ds_0}{ds_0} = \sqrt{\vec{N} C \vec{N}} - 1$$

en particulier dans la direction  $X_1$  on a :  $\varepsilon \left( \vec{E}_1 \right) = \sqrt{C_{11}} - 1 = \sqrt{1 + 2 E_{11}} - 1$

car en composantes avec  $\vec{N} \Rightarrow N^T = [1 \ 0 \ 0]$

\*  $\cos(\vec{dx}, \vec{\delta x}) = \frac{\vec{dx} \cdot \vec{\delta x}}{ds \delta s}$  d'où pour l'angle complémentaire :

$$(21) \quad \gamma(\vec{M}, \vec{N}) = \text{Arcsin} \left( \frac{\vec{N} \cdot \vec{C} \cdot \vec{M}}{\sqrt{\vec{N} \cdot \vec{C} \cdot \vec{N}} \sqrt{\vec{M} \cdot \vec{C} \cdot \vec{M}}} \right)$$

On peut aussi écrire : 
$$\gamma(\vec{M}, \vec{N}) = \text{Arcsin} \left[ \frac{2 \vec{M} \cdot \vec{E} \cdot \vec{N}}{(1 + \epsilon(\vec{M})) (1 + \epsilon(\vec{N}))} \right]$$

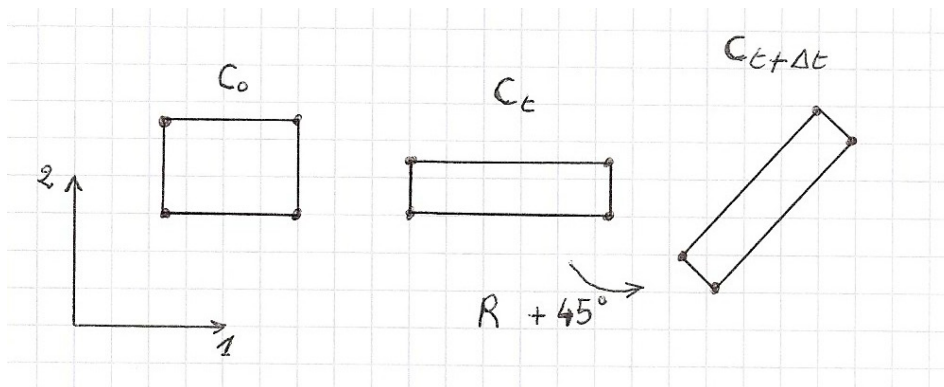
On a par exemple dans les deux directions  $X_1$  et  $X_2$  :

$$\gamma(\vec{E}_1, \vec{E}_2) = \text{Arcsin} \left( \frac{C_{12}}{\sqrt{C_{11} C_{22}}} \right) = \text{Arcsin} \left( \frac{2 E_{12}}{\sqrt{1 + 2E_{11}} \sqrt{1 + 2E_{22}}} \right)$$

Ainsi les composantes diagonales de  $E$  caractérisent **les allongements** dans la direction des axes, alors que les composantes non diagonales caractérisent **les glissements** dans les directions des axes dans la configuration initiale.

Exemple :

*Déformations biaxiales et rotation d'un élément :*



Soit le gradient de la déformation entre les configurations  $C_0$  et  $C_t$  :  $F_t = \begin{bmatrix} 1.5 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{bmatrix}$

et une rotation  $R$  de  $+45^\circ$  entre les configurations à  $t$  et  $t+\Delta t$ , on a à  $t$  :

$$C_t = F_t^T F_t = \begin{bmatrix} 2.25 & 0 \\ 0 & 0.25 \end{bmatrix} \text{ et Green-Lagrange } E_t = \frac{1}{2} [C_t - 1] = \begin{bmatrix} 0.625 & 0 \\ 0 & -0.375 \end{bmatrix}$$

et comme  $dx_t = F_t dX$   $dx_{t+\Delta t} = R dx_t$   $dx_{t+\Delta t} = F_{t+\Delta t} dX$   $F_{t+\Delta t} = R F_t$  et

$$R R^T = R^T R = 1$$

on a bien l'invariance dans la rotation :

$$C_{t+\Delta t} = C_t = \begin{bmatrix} 2.25 & 0 \\ 0 & 0.25 \end{bmatrix} \quad E_{t+\Delta t} = E_t = \begin{bmatrix} 0.625 & 0 \\ 0 & -0.375 \end{bmatrix}$$

★ *Remarque* : sur la figure l'élément reste bien rectangle, pas de distorsion d'angle droit ici, on dit que l'on a un état de déformation biaxiale (2D)

### 2.2.2 Décomposition polaire

Théorème de décomposition polaire :

On peut écrire de manière unique :

$$(22) \quad F = R U = V R$$

où

- F est un tenseur gradient de la transformation quelconque régulier
- U et V sont deux tenseurs symétriques définis positifs
- R est un tenseur orthogonal :  $R R^T = R^T R = 1$

Et on définit :

- R est le **tenseur de rotation**
- U est le **tenseur des déformations pures droit**
- V est le **tenseur des déformations pures gauche**

U est un tenseur lagrangien, V est un tenseur eulérien et R est un tenseur mixte. On a :

$$F_{iK} = R_{iJ} U_{JK} = V_{ij} R_{jK}$$

Calculons U et V :

$$(23) \quad C = F^T F = U^T R^T R U = U^T U$$

Nous allons montrer que U est le tenseur  $C^{1/2}$ , c'est-à-dire le tenseur ayant **mêmes directions propres** que C, et pour **valeurs propres** les **racines positives** des valeurs propres de C notées  $\lambda_i^2$  et **vecteurs propres** associés  $N_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) on notera  $X' = [N_1, N_2, N_3]$  la matrice dont les **colonnes** sont les **composantes des vecteurs propres normés** :

$$(24) \quad B = F F^T = V R R^T V^T = V V^T$$

De même V est le tenseur  $B^{1/2}$ , c'est-à-dire le tenseur ayant les **mêmes directions propres** que B notée  $n_i$ , et pour valeurs propres les racines carrées des valeurs propres de B qui sont **les mêmes** que C mais pas les vecteurs propres sauf cas particuliers.

Cette construction se généralise à tout tenseur F. Les tenseurs B et C étant **symétriques**, définis et positifs, B et C sont **diagonalisables**. R s'obtient directement en écrivant :

$$R = F U^{-1} = V^{-1} F$$

**Diagonalisation** de C et de B :

De l'élongation  $\lambda$  :  $N^T C N = \lambda^2 = \lambda^2 N^T N$  on a le système homogène  $[C - \lambda^2 I] N = 0$

qui aura des solutions non triviales  $\neq 0$  si son déterminant est nul. Les racines de l'équation caractéristique sont réelles car  $C$  est symétrique et sont les élongations principales au carré, les vecteurs propres associés sont les directions principales dans la configuration initiale.

D'où :

$$U^T U [N_1, N_2, N_3] - [N_1 \lambda_1^2, N_2 \lambda_2^2, N_3 \lambda_3^2] = U^T U X' - X' [\lambda_i^2] = 0$$

or les vecteurs propres étant normés :  $X' X'^T = X'^T X' = I$  d'où :

$$U^T U = X' \lambda_i X'^T X' \lambda_i X'^T = U^2$$

Le tenseur des **déformations pures à droite** est égale à :

$$U = X' \lambda_i X'^T = U^T$$

De la même manière (à faire en exercice), avec  $B = FF^T$  on obtient le système homogène  $[B - \lambda^2 I]n = 0$ , donc les mêmes valeurs propres que  $C$  mais les vecteurs propres  $n_i$  qui sont les directions principales des élongations dans la configuration déformée. En notant la matrice orthogonale  $x' = [n_1, n_2, n_3]$  on obtient de la même façon que pour  $C$ , le tenseur des **déformations pures à gauche** :

$$V = x' \lambda_i x'^T = V^T$$

Avec les vecteurs de la base  $\vec{e}_1 = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$ ,  $\vec{e}_2 = \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix}$ ,  $\vec{e}_3 = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix}$  on a la **rotation R** :

$$N_i = X' e_i \quad n_i = x' e_i \quad n_i = x' X'^T N_i \quad n_i = R N_i \quad \text{d'où} \quad \boxed{R = x' X'^T}$$

Les **directions principales** qui se déduisent bien par la **rotation R**

D'autre part :

$$(25) \quad \boxed{V = R U R^T}$$

$$(26) \quad \boxed{B = R C R^T}$$

Le théorème de décomposition polaire permet de **séparer** dans  $F$  la **déformation pure** et la **rotation**.

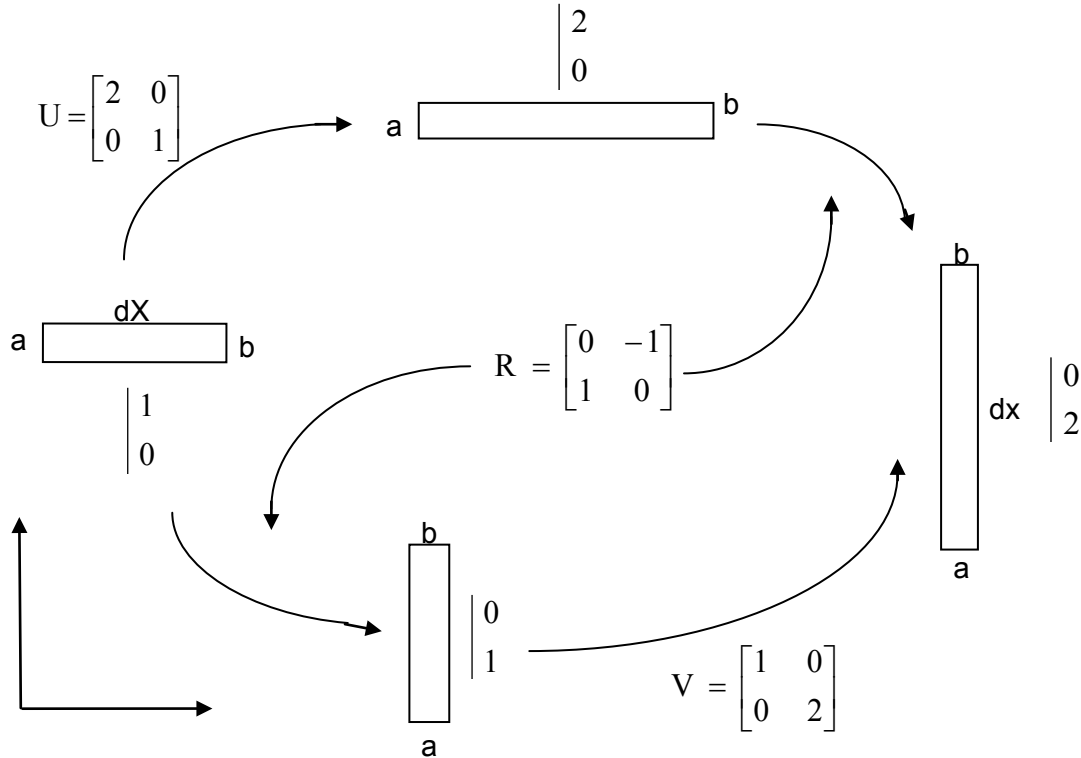
Résumé : Calcul des éléments principaux de  $C$  ou  $B$  avec  $\lambda_i$  matrice diagonale

d'où

$$\begin{array}{ll} C = X' \lambda_i^2 X'^T & B = x' \lambda_i^2 x'^T \\ U = X' \lambda_i X'^T & V = x' \lambda_i X'^T \\ x' = R X' & \\ F = x' \lambda_i X'^T & \\ R = x' X'^T & \end{array}$$

On peut illustrer cette décomposition par les exemples suivants :

**Exemple élémentaire de  $F=RU=VR$  :**



Exemple :

Soit la matrice du gradient de la transformation en 2D:  $[F] = \begin{bmatrix} -3/4 & -5/4 \\ 5/4 & 3/4 \end{bmatrix}$

Le tenseur des élongations de Cauchy-Green **droit** est :  $C = F^T F = \frac{1}{16} \begin{bmatrix} 34 & 30 \\ 30 & 34 \end{bmatrix}$

dont les **valeurs propres** sont les **élongations principales** au **carré** et les **vecteurs propres** les **directions principales** dans la **configuration initiale** soit :

$$\lambda_1^2 = 4 \quad \lambda_2^2 = \frac{1}{4} \quad \text{soit :} \quad \lambda_1 = 2 \quad \lambda_2 = \frac{1}{2}$$

$$N_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad N_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{Bmatrix} -1 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

Le tenseur des déformations pures à droite  $U$  est :

$$X' = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad U = X' \lambda_i X'^T = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$$

On peut calculer directement la **rotation** avec  $R = FU^{-1}$



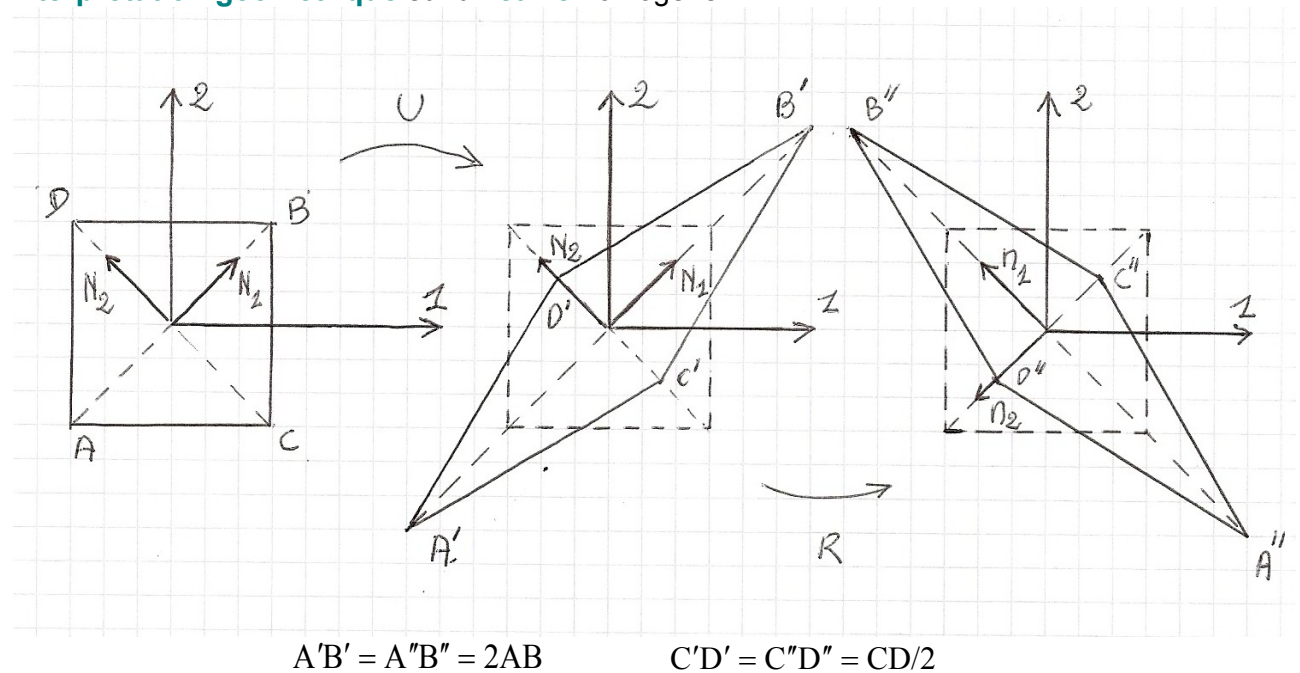
$$U^{-1} = X' / \lambda_i X'^T = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 5 \end{bmatrix} \quad \text{d'où} \quad R = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{rotation de } +\frac{\pi}{2}$$

d'où les **directions principales des élongations** dans la **configuration déformée** :

$$n_1 = RN_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad n_2 = RN_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

On obtient la même chose en partant de Cauchy-Green gauche  $B = FF^T$  (à vérifier en exercice)

**Interprétation géométrique** sur un **carré** homogène :



### 2.2.3 Les mesures de déformation

La déformation totale  $F$  se décompose donc en une rotation  $R$  suivie d'une « déformation pure »  $V$ , ou en une « déformation pure »  $U$  suivie d'une rotation  $R$ . Par rapport au système d'axes initial  $X_1X_2X_3$ , la déformation pure se traduit par des variations de longueurs (liées aux composantes diagonales de  $C$ ) et des variations d'angles (liées aux composantes non diagonales de  $C$ ). Cependant, les tenseurs  $C$  et  $U$ ,  $B$  et  $V$  étant symétriques, on peut les diagonaliser et, **dans les repères propres** correspondants  $OX'_3 X'_2 X'_3$  et  $Ox'_3 x'_2 x'_3$ , les déformations pures ne se traduisent que par des variations de longueurs, sans variations d'angles.

De la décomposition polaire de  $F$ , on déduit que les déformations seront décrites par  $V$  ou  $B$  dans la configuration actuelle, et par  $U$  ou  $C$  dans la configuration initiale, **c'est une question de point de vue**.

Plus généralement, pour décrire les déformations, Hill a proposé de définir une **double famille** de **mesures** :

En configuration Lagrangienne $C_0$	En configuration eulérienne $C_t$
$e_\alpha = \frac{1}{\alpha} [U^\alpha - 1] \quad \alpha \neq 0$	$\overline{e}_\alpha = \frac{1}{\alpha} [V^\alpha - 1] \quad \alpha \neq 0$
$e_0 = \text{Log } U = \frac{1}{2} \text{Log } C$	$\overline{e}_0 = \text{Log } V = \frac{1}{2} \text{Log } B$
Exemples :	Exemples :
$E_1 = U - 1$	$\overline{e}_1 = V - 1$
$e_2 = E \quad \text{Green-Lagrange}$	$\overline{e}_{-2} = A \quad \text{Euler-Almansi}$

Le tenseur  $h = \overline{e}_0 = \text{Log } V = \frac{1}{2} \text{Log } B$ , dit **tenseur de Henky**, ou **tenseur des déformations logarithmiques**, joue parfois un rôle particulier (plasticité, visco-plasticité).

On remarque que l'on a, entre ces deux familles, la relation :

$$(27) \quad \overline{e}_\alpha = R e_\alpha R^T \quad \text{pour tout } \alpha$$

avec

$$\text{Log } U = X' \text{Log } \lambda_i X'^T \quad \text{et} \quad \text{Log } V = x' \text{Log } \lambda_i x'^T$$

Où  $\text{Log } \lambda_i$  est la **matrice diagonale des Log** (népériens) des **allongements principaux**.

### 2.2.4 Exemples et remarques

a. **Exemple 1** : mouvement de **solide rigide** :

$$\vec{x}(\vec{X}, t) = \vec{C}(t) + Q(t)\vec{X} = \text{translation} + \text{rotation en bloc}$$

Q est un tenseur orthogonal :  $Q Q^T = Q^T Q = 1$

Le tenseur gradient est donc :  $F = Q = \frac{\partial x}{\partial X}$

d'ou

$$\begin{cases} R = Q \\ B = C = 1 \\ U = V = 1 \\ E = A = 0 \end{cases}$$

b. **Exemple 2** : déformation **triaxiale** :

$$\begin{cases} x_1 = \lambda_1 X_1 \\ x_2 = \lambda_2 X_2 \\ x_3 = \lambda_3 X_3 \end{cases} \quad F = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} U = V = F \\ R = 1 \end{matrix}$$

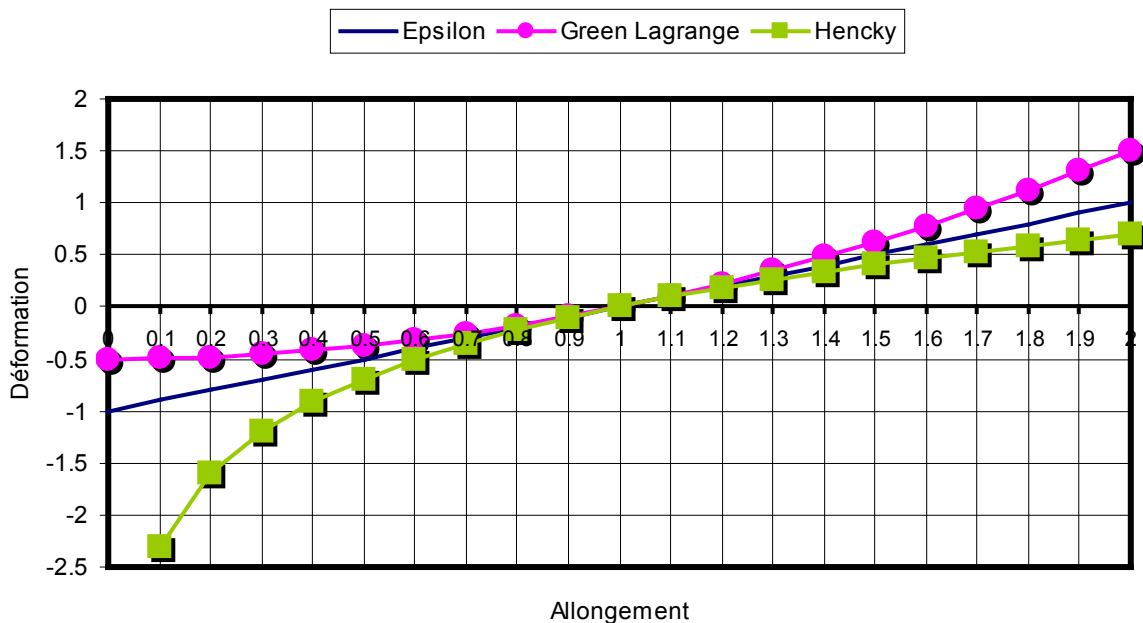
$$B = C = \begin{pmatrix} \lambda_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3^2 \end{pmatrix}$$

Tous les tenseurs seront diagonaux, et la première composante des principaux tenseurs de déformation sera : si on note  $\lambda_1 = \frac{\ell}{\ell_0}$  **allongement principal suivant 1** et  $\varepsilon_1 = (\ell - \ell_0)/\ell_0$

$$E_1 = \frac{1}{2}(\lambda_1^2 - 1) = \varepsilon_1 + \frac{1}{2} \varepsilon_1^2$$

$$A_1 = \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{1}{\lambda_1^2} \right) = (1 + \varepsilon_1)^{-2} \left[ \varepsilon_1 + \frac{1}{2} \varepsilon_1^2 \right]$$

$$h_1 = \text{Log } \lambda_1 = \log(1 + \varepsilon_1) = \int_{\ell_0}^{\ell} \frac{d\ell}{\ell}$$



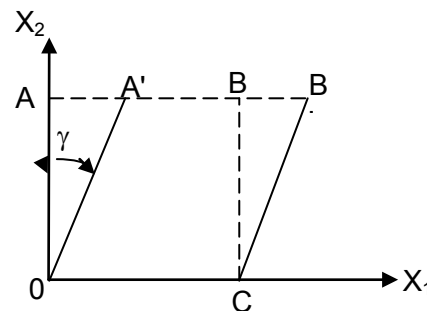
c. **Exemple 3 : glissement simple :**

$$x_1 = X_1 + \gamma(t) X_2$$

$$x_2 = X_2$$

$$x_3 = X_3$$

J = 1 car la déformation est isovolume.



$$F = \begin{pmatrix} 1 & \gamma & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1+\gamma^2 & \gamma & 0 \\ \gamma & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & \gamma & 0 \\ \gamma & 1+\gamma^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Green-Lagrange :

$$E = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\gamma}{2} & 0 \\ \frac{\gamma}{2} & \frac{\gamma^2}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On remarque, en particulier l'existence d'une composante  $E_{22} = \frac{\gamma^2}{2}$ , absente en petites déformations, et qui physiquement correspond à l'allongement du segment OA.

Les tenseurs R, U, V et autres mesures se calculent, mais leurs expressions ne sont pas particulièrement simples, on pourra le faire en exercice. Les **élongations principales au carré** sont :

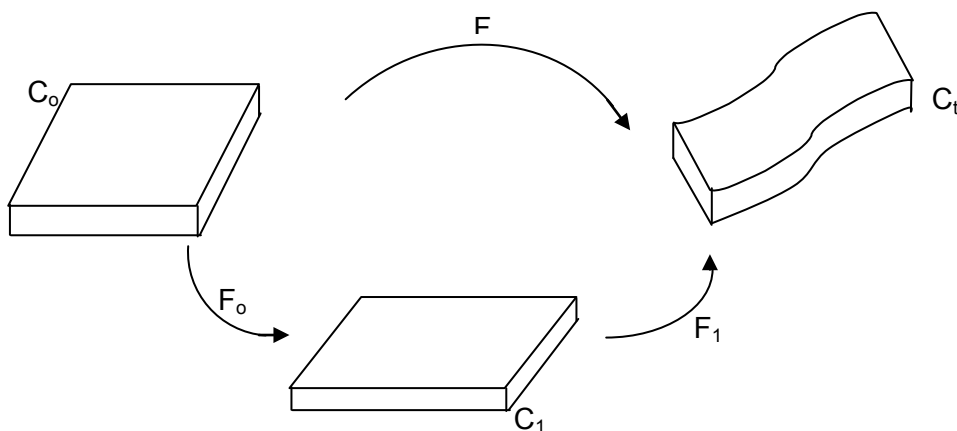
$$\lambda_1^2 = \left[ 2 + \gamma^2 + \gamma\sqrt{4 + \gamma^2} \right] / 2 \quad \lambda_2^2 = \left[ 2 + \gamma^2 - \gamma\sqrt{4 + \gamma^2} \right] / 2 \quad \lambda_3^2 = 1$$

On obtient par exemple après quelques calculs, la **rotation propre R**:

$$R = \frac{1}{\sqrt{1 + \gamma^2 / 4}} \begin{bmatrix} 1 & \gamma/2 & 0 \\ -\gamma/2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{1 + \gamma^2 / 4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \tan \theta = -\frac{\gamma}{2}$$

d. **Composition des déformations :**

Considérons à présent le cas d'un solide soumis successivement à deux déformations. Par exemple, partant d'une configuration de référence  $C_0$ , une tôle est laminée, la conduisant dans une configuration  $C_1$  à partir de laquelle elle est emboutie.



La composition de ces deux déformations conduit à une composition multiplicative des tenseurs gradient de déformation :  $F = F_1 F_0$ . Cependant, les règles de composition pour les autres tenseurs ne sont pas directes.

$$dx_1 = F_0 dX \qquad dx_t = F_1 dx_1 \qquad dx_t = F dX = F_1 F_0 dX$$

Mais par exemple :

$$E = \frac{1}{2} (F^T F - 1) = \frac{1}{2} (F_0^T F_1^T F_1 F_0 - 1)$$

or  $2 E_1 = F_1^T F_1 - 1$

donc  $E = \frac{1}{2} (F_0^T (2 E_1 + 1) F_0 - 1)$

$$E = \frac{1}{2} F_0^T (2 E_1) F_0 + \frac{1}{2} (F_0^T F_0 - 1)$$

d'où la relation :  $E = E_0 + F_0^T E_1 F_0 \neq E_0 + E_1$

Ce résultat est **logique**. En effet le tenseur de Green-Lagrange E mesure la déformation dans la configuration de départ, donc dans C<sub>0</sub> pour E<sub>0</sub>, C<sub>1</sub> pour E<sub>1</sub> et C<sub>0</sub> pour E. Avant d'ajouter les tenseurs, il est donc nécessaire de « transporter » E<sub>1</sub> dans la configuration C<sub>0</sub>. Ce type de raisonnement est fondamental en grandes déformations : chaque fois que l'on utilise un tenseur, il faut conserver présent à l'esprit sa configuration de définition.

On a de même :  $U \neq U_1 U_0, \quad V \neq V_1 V_0, \quad R \neq R_1 R_0, \quad \text{etc.}$

### 2.2.5 Petites perturbations (linéarisation)

Considérant l'écriture :  $x_i = X_i + u_i(X_i, t)$ , il vient  $F_{ij} = \delta_{ij} + \frac{\partial u_i}{\partial X_j}$

Sous forme tensorielle : (28)  $F = 1 + H$

L'hypothèse des **petites perturbations** se décompose en deux idées :

- \* le déplacement u<sub>i</sub> **est petit**. On peut donc identifier C<sub>0</sub> et C<sub>t</sub>, d'où X<sub>i</sub> et x<sub>i</sub>.
- \*  $H \ll 1$  le tenseur gradient de déplacement est petit.

Ces deux hypothèses reviennent donc à imposer à la fois de **petites déformations** et de **petites rotations**. Calculons alors **l'expression linéarisée** des différents tenseurs :

$$C = F^T F = (1 + H^T) (1 + H) = 1 + H + H^T + 2^\circ \text{ ordre}$$

Soit ε la partie symétrique de H : (29)  $\varepsilon = \frac{1}{2} (H + H^T)$

Alors :  $C = 1 + 2 \varepsilon = 1 + 2 H^s$   $H^s$  partie symétrique de H

Un calcul identique donnerait :  $B = 1 + 2 \varepsilon$

$$U = C^{1/2} = (1 + 2 \varepsilon)^{1/2} \cong 1 + \varepsilon$$

$$V = B^{1/2} = (1 + 2 \varepsilon)^{1/2} \cong 1 + \varepsilon$$

$$R = F U^{-1} = (1 + H) (1 + \varepsilon)^{-1} = (1 + H) (1 - H^s)$$

Soit  $\omega$  la partie antisymétrique de  $H$  :

(30)

$$\omega = \frac{1}{2} (H - H^T)$$

Alors :  $R = 1 + \omega = 1 + H^A$

La décomposition de  $H$  en parties symétriques  $H^S$  et antisymétriques  $H^A$  fait donc apparaître les tenseurs  $\varepsilon$  et  $\omega$  classiques en petites déformations :

$$(31) \quad \begin{cases} \varepsilon_{IJ} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_I}{\partial X_J} + \frac{\partial u_J}{\partial X_I} \right) \\ \omega_{IJ} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_I}{\partial X_J} - \frac{\partial u_J}{\partial X_I} \right) \end{cases}$$

Explicitons les différents tenseurs de déformation :

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2} (C - 1) = \varepsilon \\ A &= \frac{1}{2} (1 - B^{-1}) = \varepsilon \\ e_\alpha &= \frac{1}{\alpha} (U^\alpha - 1) = \frac{1}{\alpha} ((1 + \varepsilon)^\alpha - 1) = \varepsilon \\ \bar{e}_\alpha &= \frac{1}{\alpha} (V^\alpha - 1) = \frac{1}{\alpha} ((1 + \varepsilon)^\alpha - 1) = \varepsilon \\ e_o &= \text{Log } U = \text{Log } (1 + \varepsilon) = \varepsilon \\ \bar{e}_o &= \text{Log } V = \text{Log } (1 + \varepsilon) = \varepsilon \\ h &= \frac{1}{2} \text{Log } B = \frac{1}{2} \text{Log } (1 + 2\varepsilon) = \varepsilon \end{aligned}$$

Tous ces tenseurs s'identifient donc au **tenseur infinitésimal des déformations  $\varepsilon$** .

Explicitons de même les tenseurs des **contraintes** :

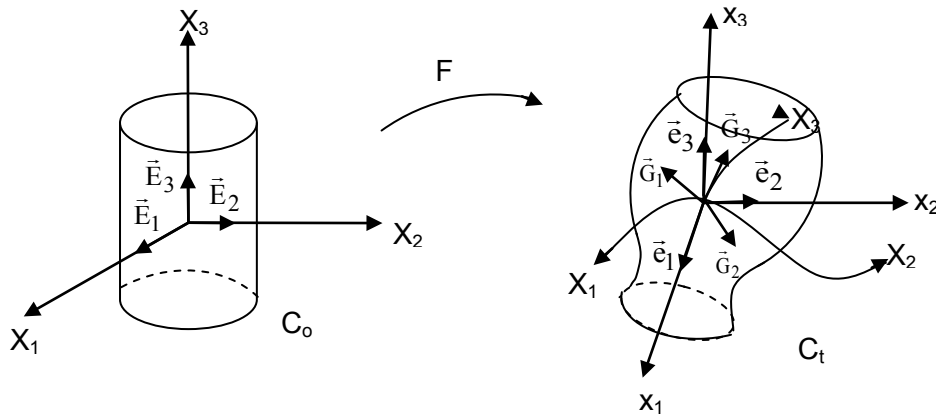
$$\begin{aligned} \tau &= J T = (1 + \text{tr } H) T = T \\ \Pi &= \tau F^{-1} T = T (1 - H^T) = T \\ S &= F^{-1} \Pi = (1 - H^T) T = T \end{aligned}$$

Les trois tenseurs des contraintes  $\tau$ ,  $\Pi$  et  $S$  s'identifient donc, en petites perturbations, au tenseur des contraintes de Cauchy  $T$ , que nous notons habituellement  $\sigma$ .

### 2.2.6 Coordonnées matérielles

Dans tout ce qui précède, nous avons basé la représentation sur les deux configurations  $C_0$  et  $C_t$ , de chaque grandeur dans un **même repère cartésien orthonormé**. Il existe une autre manière de voir, qui ne considère que des grandeurs définies dans  $C_t$ , mais repérées **par deux systèmes de coordonnées** : les **coordonnées spatiales**  $x_i$  (vecteurs de base  $\vec{e}_i$ ), et les **coordonnées matérielles (entraînées)**  $X_I$  (vecteurs de base  $\vec{G}_I$  base dite "**convective**").

Le système de coordonnées  $X_i$  a été introduit comme un système cartésien orthonormé pour la configuration de référence  $C_0$ . Mais lorsque le solide se **déforme**, les axes  $X_i$  définissent sur  $C_t$  un système de **coordonnées curvilignes** appelées « **coordonnées matérielles entraînées** », car elles **suivent la matière**.



Si nous adoptons ce système de coordonnées matérielles, nous devons distinguer les tenseurs **covariants** et les tenseurs **contravariants**, donc prêter attention à la position **haute** ou **basse** des indices.

Dans  $C_0$  
$$d\vec{X} = \frac{\partial \vec{X}}{\partial X^M} dX^M = \vec{E}_M dX^M$$

Dans  $C_t$  
$$d\vec{x} = \frac{\partial \vec{x}}{\partial x^i} dx^i = \vec{e}_i dx^i \quad \text{mais aussi} \quad d\vec{x} = \frac{\partial \vec{x}}{\partial X^M} dX^M = \vec{G}_M dX^M$$

$\vec{G}_M$  **vecteurs de base covariants dite base convective**

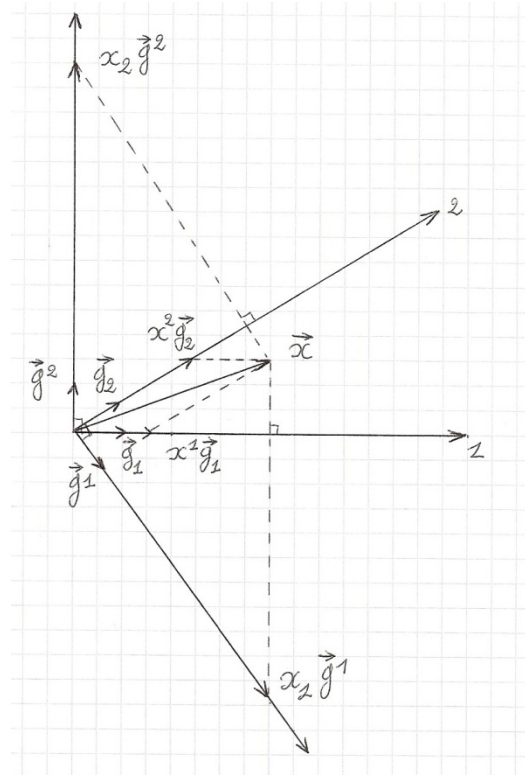
La relation  $x_i = x_i(X_i, t)$  ne définit plus la déformation de  $C_0$  à  $C_t$ , mais le passage des coordonnées **matérielles**  $X_i$  aux **coordonnées spatiales**  $x_i$  à l'instant  $t$ . Nous définissons alors localement la **base covariante** par :  $\vec{G}_I = F \vec{E}_I$ . Ainsi  $d\vec{x} = dx^i \vec{e}_i = dX^I \vec{G}_I$ .

On peut alors écrire :  $dx^i = \frac{\partial x^i}{\partial X^J} dX^J = F_J^i dX^J$  et  $\vec{G}_J = F_J^i \vec{e}_i$ , de sorte que les composantes  $F_J^i$  de  $F$  définissent la matrice de passage de la base spatiale  $(\vec{e}_i)$  à la base matérielle  $(\vec{G}_I)$ .

On définit de même **la base contravariante**  $(\vec{G}^I)$ , duale de  $(\vec{G}_I)$ , par :  $\vec{G}_I \vec{G}^J = \delta_I^J$  et

$\vec{G}^I = F_i^{-II} \vec{e}^i$ , ou  $\vec{e}^i = \vec{e}_i$ , puisque le système de **coordonnées spatiales**  $x_i$  est supposé orthonormé (mais pas nécessairement). En fait ce formalisme se construit sur le **tenseur métrique** : Voir sur la figure ci-après un exemple 2D en repère rectiligne (1,2) et un vecteur  $\vec{x}$

Rappels sur le tenseur métrique et de quelques règles de calcul :



La base **contravariante** ou **duale** est définie par les produit scalaires des vecteurs de base:

$$\vec{g}^i \cdot \vec{g}_j = \delta_j^i$$

et le **tenseur métrique** par ses composantes 2 fois covariantes et 2 fois contravariantes :

$$\vec{g}_i \cdot \vec{g}_j = g_{ij} = g_{ji} \qquad \vec{g}^i \cdot \vec{g}^j = g^{ij} = g^{ji}$$

si bien que le vecteur  $\vec{x}$  a deux représentations possibles par ses composantes covariantes sur la base contravariante ou par ses composantes contravariantes sur la base covariante (figure):

$$\vec{x} = x_i \vec{g}^i = x^j \vec{g}_j$$

★ **Remarque :** Ceci constitue la **vraie convention d'Einstein** où un **indice haut** et **bas** est nécessairement un indice de **sommation**.

Conséquences :

par exemple  $\vec{x} \cdot \vec{g}_1 = x_i \vec{g}^i \cdot \vec{g}_1 = x_i \delta_1^i = x_1$

mais aussi  $\vec{x} \cdot \vec{g}_1 = x^i \vec{g}_i \cdot \vec{g}_1 = x^i g_{i1} = x_1$

On dit parfois que les composantes du tenseur métrique sont des « **ascenseurs** » d'**indices**

Si on pose en faisant apparaître le **produit vectoriel** et le **produit mixte** :

$$\vec{g}^1 = k(\vec{g}_2 \wedge \vec{g}_3) \qquad \vec{g}_1 \cdot \vec{g}^1 = 1 = k \vec{g}_1 \cdot (\vec{g}_2 \wedge \vec{g}_3) = k(\vec{g}_1, \vec{g}_2, \vec{g}_3) \quad \text{d'où...} \vec{g}^1 = \frac{\vec{g}_2 \wedge \vec{g}_3}{(\vec{g}_1, \vec{g}_2, \vec{g}_3)}$$

On note par exemple avec la première composante :  $\|\vec{g}_1\|^2 = \vec{g}_1 \cdot \vec{g}_1 = g_{11}$

ou encore :  $\|\vec{x}\| = \sqrt{\vec{x} \cdot \vec{x}} = \sqrt{g_{ij} x^i x^j} = \sqrt{g^{ij} x_i x_j} = \sqrt{x_j x^j}$

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = \|\vec{x}\| \|\vec{y}\| \cos \varphi$$



**Composantes physiques** (covariantes ou contravariantes) d'un vecteur  $\vec{x}$  :

On a par exemple: 
$$\vec{x} = x^i \vec{g}_i = x^i \frac{\vec{g}_i}{\|\vec{g}_i\|} \frac{\|\vec{g}_i\|}{\|\vec{g}_i\|} = x^{*i} \frac{\vec{g}_i}{\|\vec{g}_i\|} \quad x^{*i} = x^i \sqrt{g_{ii}}$$

**Relations** avec les **composantes cartésiennes** notées  $x'_m$  où la position haute et basse des indices n'a pas d'importance sur ces composantes cartésiennes:

$$\begin{aligned} \vec{x} &= x^i \vec{g}_i = x_j \vec{g}^j = x'_m \vec{e}_m \\ x^i \vec{g}_i \cdot \vec{g}^j &= x^j = x'_m (\vec{e}_m \cdot \vec{g}^j) \end{aligned}$$

**Produit scalaire** de deux **vecteurs**  $\vec{a}$  et  $\vec{b}$  :

$$\begin{aligned} \vec{a} \cdot \vec{b} &= (a_\alpha \vec{g}^\alpha) \cdot (b^\beta \vec{g}_\beta) = a_\alpha b^\beta \delta_\beta^\alpha = a_\alpha b^\alpha \\ \vec{a} \cdot \vec{b} &= (a_\alpha \vec{g}^\alpha) \cdot (b_\beta \vec{g}^\beta) = a_\alpha b_\beta g^{\alpha\beta} \\ \vec{a} \cdot \vec{b} &= (a^\alpha \vec{g}_\alpha) \cdot (b^\beta \vec{g}_\beta) = a^\alpha b^\beta g_{\alpha\beta} \end{aligned}$$

**Produit tensoriel** de deux **vecteurs**  $\vec{x}$  et  $\vec{y}$ , c'est un **tenseur du 2ème ordre** :

$\mathbf{T} = \vec{x} \otimes \vec{y}$  tel que par exemple :

$$\mathbf{T} = (x^i \vec{g}_i) \otimes (y^j \vec{g}_j) = x^i y^j (\vec{g}_i \otimes \vec{g}_j) = T^{ij} (\vec{g}_i \otimes \vec{g}_j)$$

qui est défini ici par ces composantes **2 fois contravariantes**. Mais il y a 3 autres possibilités, par ses composantes **2 fois covariantes** et ses composantes **mixtes** :

$$\mathbf{T} = T_{ij} (\vec{g}^i \otimes \vec{g}^j) = T^i_j (\vec{g}_i \otimes \vec{g}^j) = T_i^j (\vec{g}^i \otimes \vec{g}_j)$$

**Produit contracté** (ici à droite) :  $\vec{x} = \mathbf{T} \cdot \vec{a}$

$$\vec{x} = \mathbf{T} \cdot \vec{a} = T^{ij} (\vec{g}_i \otimes \vec{g}_j) \cdot a^k \vec{g}_k = T^{ij} a^k (\vec{g}_i \otimes \vec{g}_j) \cdot \vec{g}_k = T^{ij} a^k g_{jk} \vec{g}_i = T^{ij} a_j \vec{g}_i = x^i \vec{g}_i$$

d'où la composante contravariante :  $x^i = T^{ij} a_j$

★ Remarque :  $\vec{x} = \vec{a} \cdot \mathbf{T} = \mathbf{T} \cdot \vec{a}$  que si le tenseur T est symétrique (à vérifier en exercice).

**Symétrie** d'un **tenseur du 2ème ordre** :

Si on a :  $T^{ij} = T^{ji}$  alors  $T_{ij} = g_{im} g_{jn} T^{mn} = g_{im} g_{jn} T^{nm} = T_{ji}$

De même en mixtes :  $T^i_j = g_{jm} T^{im} = g_{jm} T^{mi} = T^i_j$

**Composantes physiques** d'un **tenseur du 2ème ordre** :

$$\mathbf{T} = T^{ij} (\vec{g}_i \otimes \vec{g}_j) = T^{ij} \sqrt{g_{ii}} \sqrt{g_{jj}} \left( \frac{\vec{g}_i}{\sqrt{g_{ii}}} \otimes \frac{\vec{g}_j}{\sqrt{g_{jj}}} \right) \quad T^{*ij} = T^{ij} \sqrt{g_{ii}} \sqrt{g_{jj}}$$

**Eléments principaux** d'un **tenseur du 2ème ordre** :

**Valeurs propres** et **vecteurs propres à droite** par exemple :  $\mathbf{T} \cdot \vec{a} = \lambda \vec{a}$

$$(\mathbf{T} - \lambda \mathbf{1})\vec{a} = \mathbf{0} \quad (\mathbf{T}_j^i - \lambda \delta_j^i)(\vec{g}_i \otimes \vec{g}^j) \cdot (a^k \vec{g}_k) = \mathbf{0}$$

$$(\mathbf{T}_j^i - \lambda \delta_j^i)a^j \vec{g}_i = \mathbf{0}$$

Système homogène et on retrouve dans ce cas l'équation caractéristique habituelle :

$$\det(\mathbf{T}_j^i - \lambda \delta_j^i) = 0$$

mais autrement avec les composantes covariantes ou contravariantes le tenseur métrique reste, par exemple :

$$(\mathbf{T}^{ij} - \lambda g^{ij})a_i \vec{g}_j = \mathbf{0}$$

On revient à la **Mécanique des Milieux Continus**, où les vecteurs covariants et contravariants de la base matérielle dans la configuration actuelle définissent les tenseurs métriques :

$$g_{MN} = \vec{G}_M \cdot \vec{G}_N$$

$$g^{MN} = \vec{G}^M \cdot \vec{G}^N$$

$$\delta_M^N = \vec{G}_M \cdot \vec{G}^N$$

On a les **diverses représentations** du gradient de la transformation F :

$$F = \frac{\partial x^i}{\partial X^J} (\vec{e}_i \otimes E^J) = F_J^i (\vec{e}_i \otimes \vec{E}^J) = \frac{\partial X^K}{\partial X^J} (\vec{G}_K \otimes \vec{E}^J) = (\vec{G}_J \otimes \vec{E}^J)$$

d'où  $F^T = (\vec{E}^J \otimes \vec{G}_J) \quad F^{-1} = (\vec{E}_J \otimes \vec{G}^J) \quad F^{-T} = (\vec{G}^J \otimes \vec{E}_J)$

On vérifie bien que :

$$\vec{G}_I = F \cdot \vec{E}_I = (\vec{G}_J \otimes \vec{E}^J) \cdot \vec{E}_I = \vec{G}_J \delta_I^J = \vec{G}_I$$

$$\vec{G}^I = F^{-T} \cdot \vec{E}^I = (\vec{G}^J \otimes \vec{E}_J) \cdot \vec{E}^I = \vec{G}^J \delta_J^I = \vec{G}^I$$

La **mesure** :  $d\vec{x} \cdot d\vec{x} - d\vec{X} \cdot d\vec{X} = (g_{MN} - \delta_{MN}) dX^M dX^N$  permet de définir :

$$E = \frac{1}{2} (g_{MN} - \delta_{MN}) (\vec{E}^M \otimes \vec{E}^N) \quad \text{Green Lagrange ou}$$

$$A = \frac{1}{2} (g_{MN} - \delta_{MN}) (\vec{G}^M \otimes \vec{G}^N) \quad \text{Euler-Almansi}$$

et on a bien (exercice)  $E = F^T A F$ .

Par exemple on a :  $C = F^T F = (\vec{E}^J \otimes \vec{G}_J) (\vec{G}_I \otimes \vec{E}^I) = g_{JI} (\vec{E}^J \otimes \vec{E}^I)$

$$B = F F^T = \delta^{JI} (\vec{G}_J \otimes \vec{G}_I)$$

Ainsi les composantes  $g_{JI}$  peuvent être considérées comme étant :

- les composantes cartésienne du tenseur C sur la base cartésienne  $\vec{E}_I$  de  $C_0$  (point de vue utilisé jusqu'à présent et dans la suite).

- les composantes matérielles covariantes du tenseur métrique dans  $C_t$ . De la même manière on aurait pour le tenseur des contraintes de Kirchoff :

$$\boldsymbol{\tau} = \tau^{ij} \vec{e}_i \otimes \vec{e}_j = \Pi^{IJ} \vec{e}_I \otimes \vec{G}_J = S^{IJ} \vec{G}_I \otimes \vec{G}_J$$

Ainsi les composantes  $S^{IJ}$  sont :

- les composantes de  $S$  sur la base cartésienne orthonormée  $\vec{E}_I$  de  $C_0$
- les composantes matérielles contravariantes du tenseur  $\tau$ .

Dans ce polycop nous avons préféré travailler en **repère orthonormé sur différents tenseurs**, plutôt que sur « **moins** » de tenseurs exprimés dans différents repères, car cela simplifie le formalisme et minimise l'outillage géométrique nécessaire. Néanmoins, il est possible de construire toute la Mécanique des Milieux Continus en **coordonnées matérielles entraînées**, et c'est un point de vue que l'on trouvera dans certains ouvrages, ce qui peut être avantageux pour traiter certains problèmes (sur les coques par exemple). Cependant il est nécessaire d'utiliser également les notions de **dérivation vectorielle** d'un vecteur par un autre ou de tenseurs entre eux ce qui introduit les **dérivées covariantes, contravariantes** ou **mixtes** d'un maniement plus délicat (ou plus expérimenté !).

**Exemple avec le glissement simple déjà vu précédemment :**

On choisit comme base matérielle entraînée la base cartésienne initiale d'où :

$$\vec{g}_1(0) = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \vec{g}_2(0) = \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad \text{qui devient : } \vec{g}_1(t) = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \vec{g}_2(t) = \begin{Bmatrix} \gamma \\ 1 \end{Bmatrix}$$

Avec  $\vec{g}^i \cdot \vec{g}_j = \delta_j^i$  on obtient :  $\vec{g}^1(t) = \begin{Bmatrix} 1 \\ -\gamma \end{Bmatrix} \quad \vec{g}^2(t) = \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \end{Bmatrix}$

D'où :  $\mathbf{g}_{ij}(t) = \begin{bmatrix} 1 & \gamma \\ \gamma & 1 + \gamma^2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{g}^{ij}(t) = \begin{bmatrix} 1 + \gamma^2 & -\gamma \\ -\gamma & 1 \end{bmatrix}$

Les composantes **covariantes** apparaissent bien comme les composantes **cartésiennes** de  $C$  sur la base cartésienne de la configuration initiale.

Ainsi :  $\frac{1}{2}[\mathbf{g}_{ij} - \delta_{ij}] = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & \gamma \\ \gamma & \gamma^2 \end{bmatrix}$  sont les composantes **cartésiennes de Green-**

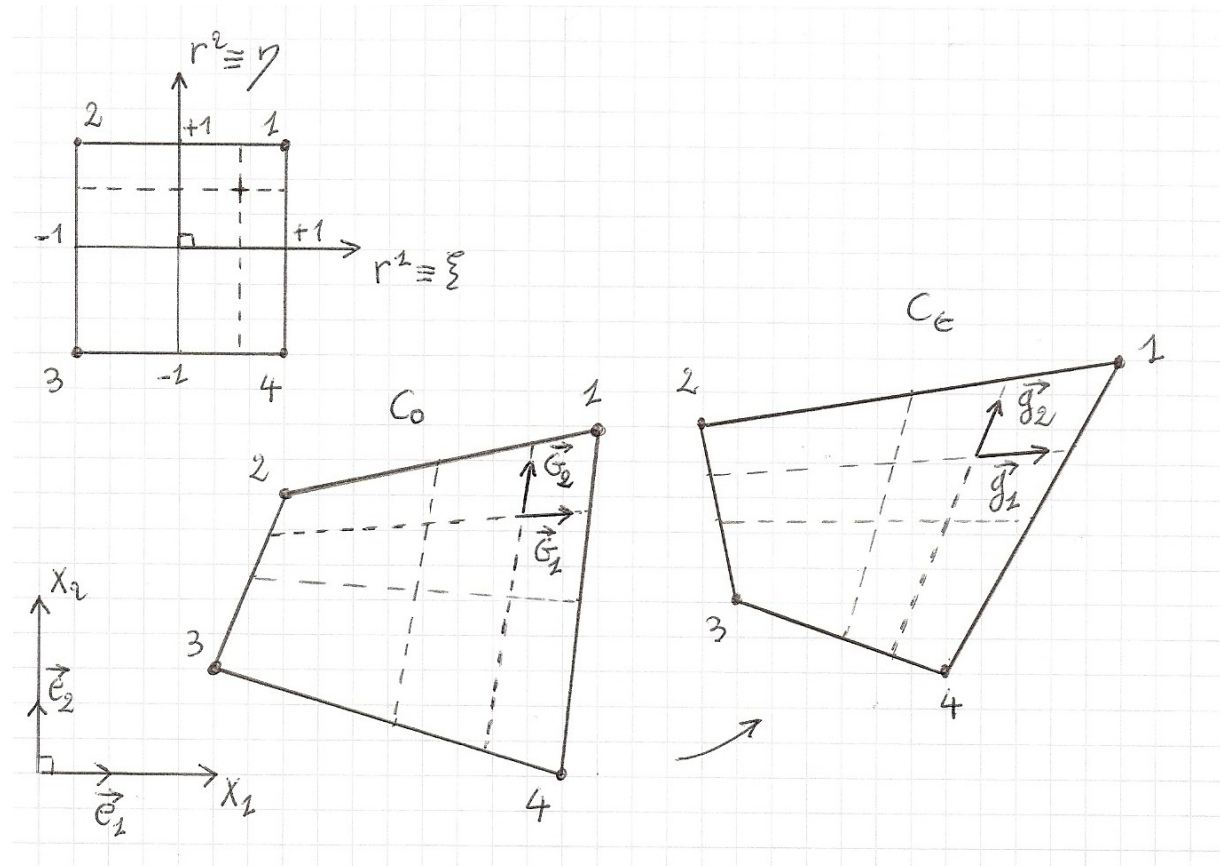
**Lagrange** mais aussi les composantes **2 fois covariantes d'Euler-almansi** sur la base **contravariante**

On peut établir les **composantes mixtes** du tenseur d'Euler-Almansi (symétrique) avec :

$$\mathbf{A}_j^k = \mathbf{A}_{jm} \mathbf{g}^{mk} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -\gamma^2 & \gamma \\ \gamma & 0 \end{bmatrix}$$

qui a pour valeurs propres :  $\lambda_i = \frac{1}{2} [\gamma^2 \pm \sqrt{\gamma^2(\gamma^2 + 4)}]$

**Exemple** : Utilisation de coordonnées matérielles sur un élément fini à 4 noeuds



Un **élément fini** isoparamétrique est une forme géométrique plus ou moins « simple » défini par un jeu de **fonctions de forme** qui **paramètre l'élément réel à tout instant** sur l'élément de **base** (ou **parent**) qui est ici un **carré** bi-unitaire en coordonnées cartésiennes dites **naturelles** ou **intrinsèques** qui vont constituer sur **l'élément réel** le système de coordonnées **matérielles entraînés** (voir figure ci-dessus), ce qui peut être intéressant pour « **suivre** » des fibres réelles dans l'élément (fibres, renforts, ...).

On a les **bases covariantes** en un point de l'élément (un poin de Gauss d'intégration par exemple) dans la configuration initiale  $C_0$  et actuelle  $C_t$  avec :

$$\bar{G}_i = \frac{\partial \bar{X}}{\partial r^i} \quad \bar{g}_i = \frac{\partial \bar{x}}{\partial r^i} = \bar{G}_i + \frac{\partial \bar{u}}{\partial r^i}$$

où  $r^1 = \xi$  et  $r^2 = \eta$  notation habituelle des éléments finis pour les coordonnées **intrinsèques** c'est-à-dire **matérielles**.

La paramétrage du Q4 est classiquement donné par (voir cours éléments-finis) :

$$X_i = \sum_{k=1}^4 N_k(\xi, \eta) X_i^{(k)} \quad \text{où } k \text{ est un indice de numéro de noeud}$$

avec le jeu de fonctions de formes :

$$\begin{aligned} N_1(\xi, \eta) &= \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 + \eta) & N_2(\xi, \eta) &= \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 + \eta) \\ N_3(\xi, \eta) &= \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 - \eta) & N_4(\xi, \eta) &= \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 - \eta) \end{aligned}$$

si bien que les composantes des **vecteurs covariants** se calculent aisément pour tous points (  $\xi, \eta$  ) par exemple pour le point de Gauss (  $1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}$  ) de la figure.

$$\vec{G}_1 = \frac{\partial X_1}{\partial \xi} \vec{e}_1 + \frac{\partial X_2}{\partial \xi} \vec{e}_2 \qquad \vec{G}_2 = \frac{\partial X_1}{\partial \eta} \vec{e}_1 + \frac{\partial X_2}{\partial \eta} \vec{e}_2$$

de même car c'est un isoparamétrage :

$$\vec{g}_1 = \frac{\partial x_1}{\partial \xi} \vec{e}_1 + \frac{\partial x_2}{\partial \xi} \vec{e}_2 \qquad \vec{g}_2 = \frac{\partial x_1}{\partial \eta} \vec{e}_1 + \frac{\partial x_2}{\partial \eta} \vec{e}_2$$

Les composantes 2 fois covariantes de Green-lagrange peuvent alors se calculer :

$$E = \frac{1}{2} (g_{ij} - G_{ij}) (\vec{G}^i \otimes \vec{G}^j) = E_{ij} (\vec{G}^i \otimes \vec{G}^j)$$

On peut associer un **comportement** avec les composantes 2 fois contravariantes de PK2 tel que :

$$S^{ij} = M^{ijkl} E_{kl}$$

**L'intérêt** étant que le module de comportement M constant ou non par ses composantes 4 fois contravariantes dans la **base matérielle** des  $\vec{G}_i$  est facilement **identifiable expérimentalement** (fibres, fils, renforts,...). Ainsi dans le cas de constantes, l'énergie de déformation élastique par unité de volume dans Co s'écrira :

$$W = \frac{1}{2} S^{ij} E_{ij} = \frac{1}{2} S : E$$

★ **Remarque** : correspondance avec les composantes **cartésiennes**

$$S = S^{ij} (\vec{G}_i \otimes \vec{G}_j) = s'_{mn} (\vec{e}_m \otimes \vec{e}_n)$$

d'où :  $S^{ij} = s'_{mn} (\vec{e}_m \cdot \vec{G}^i) (\vec{e}_n \cdot \vec{G}^j)$  de même  $E_{ij} = e'_{mn} (\vec{e}_m \cdot \vec{G}_i) (\vec{e}_n \cdot \vec{G}_j)$

Par exemple si on a  $\vec{G}_1 = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \end{Bmatrix}$   $\vec{G}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix}$  avec  $s'_{11} = 100$   $s'_{12} = 60$   $s'_{22} = 200$

et  $e'_{11} = 0.1$   $e'_{12} = 0.2$   $e'_{22} = 0.3$

Avec  $\vec{G}^i \cdot \vec{G}_j = \delta_j^i$  on obtient la base contravariante :  $\vec{G}^1 = \begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \end{Bmatrix}$   $\vec{G}^2 = \begin{Bmatrix} 0 \\ \sqrt{2} \end{Bmatrix}$

D'où :  $S^{11} = 180$   $S^{12} = -140\sqrt{2}$   $S^{22} = 400$   
 $E_{11} = 0.1$   $E_{12} = 3/(10\sqrt{2})$   $E_{22} = 0.4$

$$W = \frac{1}{2} S^{ij} E_{ij} = \frac{1}{2} s'_{mn} e'_{mn} = 47$$

## 2.3 VITESSES DE DEFORMATIONS

### 2.3.1 Tenseur taux de déformation et taux de rotation

Pour caractériser les vitesses, on introduit le vecteur vitesse  $\vec{V}$ , dérivée matérielle par rapport au temps du vecteur position  $\vec{x}(X_i, t)$ , et que l'on peut considérer comme :

- \* fonction de  $X_i$  (description lagrangienne)
- \* fonction de  $x_i$  (description eulérienne)

$$d\vec{x} = \dot{F} d\vec{X} = \dot{F} F^{-1} d\vec{x} = L d\vec{x} \quad \text{car} \quad d\dot{\vec{X}} = 0$$

On introduit ainsi le **tenseur gradient de vitesse**  $L$  défini par :

$$(32) \quad L = \dot{F} F^{-1}$$

$$(33) \quad \dot{F}_{iJ} = \frac{\partial}{\partial t} F_{iJ} = \frac{\partial V_i}{\partial X_J} \quad \boxed{d\dot{x}_i = L_{ij} dx_j}$$

$$L_{ij} = \frac{\partial V_i}{\partial x_j} = \frac{\partial V_i}{\partial X_k} \frac{\partial X_k}{\partial x_j} = \dot{F}_{iK} F_{Kj}^{-1}$$

La décomposition de  $L$  en partie symétrique et antisymétrique permet de définir le **tenseur taux de déformation**  $D$  et le **tenseur taux de rotation**  $W$  :

$$(34) \quad \boxed{\begin{aligned} D &= L^S = \frac{1}{2} (L + L^T) \\ W &= L^A = \frac{1}{2} (L - L^T) \end{aligned}}$$

$$D_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial V_i}{\partial x_j} + \frac{\partial V_j}{\partial x_i} \right) \quad W_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial V_i}{\partial x_j} - \frac{\partial V_j}{\partial x_i} \right)$$

Le tenseur  $W$  correspond au rotationnel du champ des vitesses  $\vec{V}$ , et décrit donc la **vitesse de rotation du solide**, tandis que  $D$  décrit la **vitesse de déformation**. En effet on peut écrire :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (\vec{dx} \cdot \vec{\delta x}) &= \dot{\vec{dx}} \cdot \vec{\delta x} + \vec{dx} \cdot \dot{\vec{\delta x}} \\ &= L \vec{dx} \cdot \vec{\delta x} + \vec{dx} \cdot L \vec{\delta x} = 2 \vec{dx} \cdot D \vec{\delta x} \end{aligned}$$

D'autre part, on a :

$$\vec{dx} \cdot \vec{\delta x} - d\vec{X} \cdot \vec{\delta X} = 2 d\vec{X} \cdot E \cdot \vec{\delta X}$$

par différentiation, il vient :

$$\frac{d}{dt} (\vec{dx} \cdot \vec{\delta x}) = 2 d\vec{X} \cdot \dot{E} \cdot \vec{\delta X}$$

Ainsi la vitesse de déformation est donnée dans  $C_0$  par  $\dot{E}$ , et dans  $C_t$  par  $D$ , ces deux tenseurs étant « transportés » l'un de l'autre par la relation :

$$(35) \quad \boxed{\dot{E} = F^T D F = \frac{1}{2} \dot{C}}$$

Les dérivés par rapport au temps des tenseurs lagrangiens décrivant la déformation sont donc directement reliées au tenseur des taux de déformation. Il n'en va pas de même pour les tenseurs eulériens, comme le montrent les calculs suivants :

$$\dot{B} = \dot{F} F^T + F \dot{F}^T = L F F^T + F F^T L^T = LB + BL^T$$

$$\dot{A} = -\frac{1}{2} \dot{B}^{-1} = \frac{1}{2} B^{-1} \dot{B} B^{-1} = \frac{1}{2} (B^{-1} L + L^T B^{-1})$$

De même, contrairement à ce que l'on pourrait croire, les tenseurs taux de déformation D et taux de rotation W ne sont pas directement reliés aux dérivées temporelles des tenseurs de déformation pure ou de rotation. Le calcul montre en effet que (à faire en exercice):

$$\dot{R} \neq W \quad \text{et} \quad \dot{U} \neq D$$

Dans un **mouvement de corps rigide** :

$$\vec{x}(X, t) = \vec{C}(t) + Q(t) \vec{X} \quad \text{avec} \quad Q Q^T = Q^T Q = 1$$

Dans ce cas  $F = Q \Rightarrow L = W = \dot{Q} Q^T$   
 $Q Q^T = 1 \Rightarrow \dot{Q} Q^T = -Q \dot{Q}^T$

Le tenseur L est bien antisymétrique, et D = 0.

**Réciproquement** : on peut montrer que si D est identiquement nul, alors W est constant, et le corps a un mouvement de solide rigide.

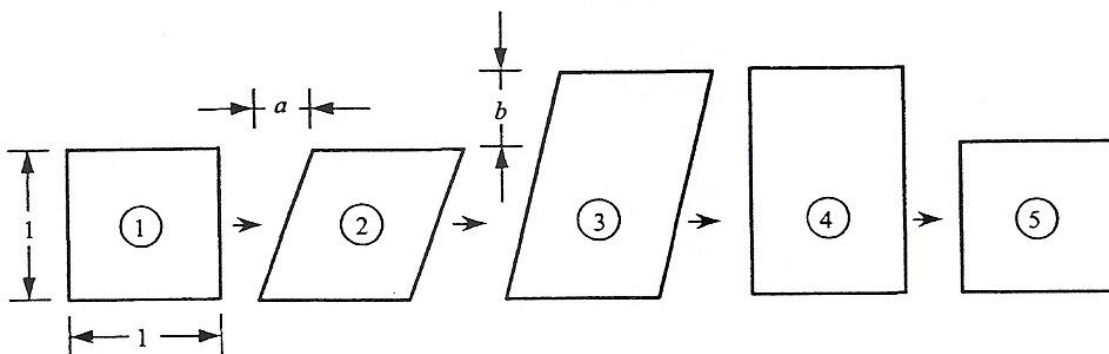
Enfin on remarquera qu'en **petites perturbations** :

$$D = \frac{1}{2} (L + L^T) = \frac{1}{2} (\dot{F} F^{-1} + F^{-1T} \dot{F}^T)$$

$$D = \frac{1}{2} (\dot{H}(1-H) + (1-H^T) \dot{H}^T) = \frac{1}{2} (\dot{H} + \dot{H}^T)$$

On a donc : (36)  $D = \dot{\epsilon}$

**Exemple** : L'intégrale du taux de déformation D dépend du chemin de déformation suivi, ce n'est donc pas une très bonne mesure de déformation totale



Sur le chemin de déformation ci-dessus de la configuration de 1 à 5, toute mesure de **déformation totale** devrait être **nulle**.

En « réactualisant » d'une configuration à l'autre (voir paragraphe suivant), on calcule le gradient de la déformation relatif, paramétré sur un intervalle de temps entre 0 et 1, et on en déduit pour chaque étape le gradient de vitesse, le taux de déformation et la vitesse de Green-Lagrange. A la fin on intègre sur les 4 étapes le taux de déformation et la vitesse de Green-Lagrange.

Ainsi :

**De 1 à 2 :**  $x = X + atY$  et  $y = Y$  pour  $0 \leq t \leq 1$  (c'est le glissement) d'où :

$$F = \begin{bmatrix} 1 & at \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad F^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -at \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \dot{F} = \begin{bmatrix} 0 & -a \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad L = \dot{F}F^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$D = \frac{1}{2}[L + L^T] = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & a \\ a & 0 \end{bmatrix} \quad \dot{E} = F^T D F = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & a \\ a & 2a^2 t \end{bmatrix}$$

**De 2 à 3 :**  $x = X + aY$  et  $y = (1 + bt)Y$  pour  $0 \leq t \leq 1$ , on obtient pour D (le faire pour  $\dot{E}$ ) :

$$D = \frac{1}{1 + bt} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}$$

**De 3 à 4 :**  $x = X + a(1 - t)Y$  et  $y = (1 + b)Y$  pour  $0 \leq t \leq 1$  :

$$D = \frac{1}{2(1 + b)} \begin{bmatrix} 0 & -a \\ -a & 0 \end{bmatrix}$$

**De 4 à 5 :**  $x = X$  et  $y = (1 + b - bt)Y$  pour  $0 \leq t \leq 1$  :

$$D = \frac{1}{1 + b - bt} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -b \end{bmatrix}$$

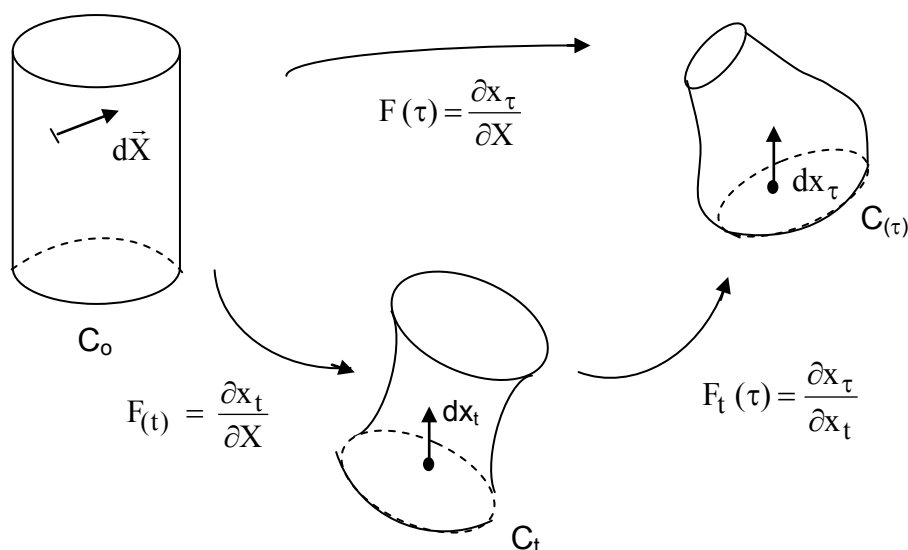
et ensuite en sommant les 4 intégrales de D dt sur  $0 \leq t \leq 1$  on a :

$$\sum \int_0^1 D dt = \frac{ab}{2(1 + b)} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ qui est du 2ème ordre par } ab \text{ mais pas nul}$$

tandis que l'on doit trouver pour la vitesse de Green-Lagrange (à faire en exercice):

$$\sum \int_0^1 \dot{E} dt = E = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

### 2.3.2 Description lagrangienne réactualisée



Pour que le **taux de rotation** (respectivement de déformation) apparaisse comme la dérivée par rapport au temps du **tenseur de rotation** R (respectivement de la déformation pure U ou V), il faut faire intervenir une nouvelle description, la description **lagrangienne**



**réactualisée.** On prend comme configuration de référence, la configuration actuelle à l'instant  $t$ .

On peut alors écrire : (37)  $F(\tau) = F_t(\tau) F(t)$   
 $F_t(\tau) = F(\tau) F^{-1}(t)$

En introduisant le **gradient relatif** de déformation  $F_t(\tau)$ , gradient de la déformation subie par le matériau entre les instants  $t$  et  $\tau$ .

On a donc :

$$\vec{dx}_\tau = F_t(\tau) \vec{dx}_t$$

On peut définir à partir de  $F_t(\tau)$ , les mêmes tenseurs que ceux introduits aux paragraphes 2.2.1 et 2.3.1. En particulier :

- \*  $F_t(\tau) = R_t(\tau) U_t(\tau) = V_t(\tau) R_t(\tau)$
- \*  $C_t(\tau) = F_t^t(\tau) F_t(\tau)$
- \*  $B_t(\tau) = F_t(\tau) F_t^T(\tau)$  etc.
- \*  $L_t(\tau) = \dot{F}_t(\tau) F_t^{-1}(\tau)$  (F(t) pas fonction de  $\tau$  pour  $\tau > t$ )
- \*  $D_t(\tau) = \left[ \dot{F}_t(\tau) F_t^{-1}(\tau) \right]^S = \frac{1}{2} [L_t(\tau) + L_t^T(\tau)]$
- \*  $W_t(\tau) = \left[ \dot{F}_t(\tau) F_t^{-1}(\tau) \right]^A = \frac{1}{2} [L_t(\tau) - L_t^T(\tau)]$

En faisant à la limite  $t = \tau$ , il vient :

$$F_t(t) = R_t(t) = U_t(t) = W_t(t) = 1$$

On peut alors montrer que :

$$L(t) = \frac{\partial}{\partial t} (F_t(\tau)) |_{\tau=t}$$

car  $\dot{F}(t) = \frac{\partial}{\partial t} (F_t(\tau)) F(t)$  d'une part

et  $\dot{F}(t) = L(t) F(t)$  d'autre part où :

$$D(t) = \frac{\partial}{\partial t} (U_t(\tau)) |_{\tau=t}$$

$$W(t) = \frac{\partial}{\partial t} (R_t(\tau)) |_{\tau=t}$$

Mais L, D et W apparaissent comme des dérivées temporelles des tenseurs F, U et R que dans cette **description lagrangienne réactualisée**. Autrement on retombe sur les difficultés évoquées au paragraphe 2.3.1.

### 2.3.3 Dualités contraintes-déformations

Nous avons vu au paragraphe 2.1.1 que les équations d'équilibre s'écrivaient :

$$\text{Avec PK1} \quad \frac{\partial \Pi_{ij}}{\partial X_j} + \rho_0 f_i = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j} + \rho f_i = 0 \quad \text{avec Cauchy}$$

On obtient le **théorème des puissances virtuelles** en multipliant ces deux égalités par le champ de vitesses virtuelles  $V_i^*$ , et en intégrant sur le domaine  $D_0$  ou  $D$ . Il vient :

$$\begin{aligned} & \iiint_{D_0} \Pi_{ij} \frac{\partial V_i^*}{\partial X_j} dv_0 = \iiint_{D_0} \rho_0 f_i V_i^* dv_0 + \iint_{\delta D_0} \Pi_{ij} N_j V_i^* dS_0 \\ \text{ou} & \quad \iiint_D T_{ij} D_{ij}^* dv = \iiint_D \rho f_i V_i^* dv + \iint_{\delta D} T_{ij} n_j V_i^* dS \\ \text{car} & \quad T_{ij} = T_{ji} \quad \text{et} \quad dv = J dv_0 = \frac{\rho_0}{\rho} dv_0 \end{aligned}$$

Par ailleurs, un calcul direct permet de transformer  $T_{ij} D_{ij}$  :

$$J T_{ij} D_{ij} = \tau_{ij} D_{ij} = F_{iK} S_{KL} F_{Lj}^T D_{ij} \quad (\tau = F S F^T)$$

Mais  $\dot{E} = F^T D F$  et donc  $D = F^{-1T} E F^{-1}$

Alors  $J T_{ij} D_{ij} = F_{iK} S_{KL} F_{jL} F_{Ki}^{-1} \dot{E}_{KL} F_{Lj}^{-1} = S_{KL} \dot{E}_{KL}$

En résumé, on peut exprimer **la puissance des efforts intérieurs** de trois façons différentes :

Avec  $V_i^* = V_i$  réelle.

$$\begin{aligned} P^{(int)} &= - \iiint_D T_{ij} D_{ij} dv = - \iiint_D T : D dv \\ (38) \quad &= - \iiint_{D_0} \Pi_{ij} \dot{E}_{ij} dv_0 = - \iiint_{D_0} \Pi : \dot{E} dv_0 \\ &= - \iiint_{D_0} S_{IJ} \dot{E}_{IJ} dv_0 = - \iiint_{D_0} S : \dot{E} dv_0 \end{aligned}$$

On a adopté **la notation** :  $A : B$  pour la quantité  $\text{tr} (A B^T) = A_{ij} B_{ij}$ .

Ce produit scalaire (ou contracté) entre deux tenseurs possède la propriété caractéristique suivante :

$$A : B C = A C^T : B = B^T A : C$$

Ainsi, il ressort que les tenseurs  $T$ ,  $\Pi$  et  $S$  sont respectivement **duaux** des tenseurs cinématiques  $D$ ,  $F$  et  $E$ .

$$S : \dot{E} = S : F^T D F = S F^T : F^T D = F S F^T : D = \tau : D$$

De même :

$$\tau : D = \tau : \frac{1}{2} [L + L^T] = \tau : L = \Pi F^T : L = \Pi : LF = \Pi : \dot{F}$$

La **puissance massique des efforts intérieurs** est donnée par :

$$W^{(int)} = -\frac{1}{\rho_0} S : \dot{E} = -\frac{1}{\rho_0} \Pi : \dot{F} = -\frac{1}{\rho} T : D$$

D'où les égalités :

(39)

$$\tau : D = \Pi : \dot{F} = S : \dot{E}$$

Contraintes      Vitesses de déformation

En petites perturbations, ces trois grandeurs s'identifient à

$\sigma : \dot{\epsilon}$

Cette dualité joue en grandes déformations un rôle important.

## 2.4 LES FORMES DE RESOLUTION

### 2.4.1 Forme incrémentale Lagrangienne Totale

Pour les codes de calculs **par éléments finis** en version **implicite**, c'est-à-dire où **l'équilibre du maillage doit être vérifié à la fin de chaque pas de temps où d'incrément**, il faut construire un formalisme incrémentale (pas de temps fini) qui fournira directement le schéma **itératif de Newton** entre **les incréments** à  $t$  et  $t+\Delta t$ . Si les calculs s'effectuent sur la **configuration initiale**, ce sera le schéma **Lagrangien Total**, autrement si c'est sur la configuration qui vient d'être obtenue à  $t$ , ce sera le schéma **Lagrangien Réactualisé**.

Ainsi du tableau de **dualité contrainte-déformation** du paragraphe précédent, on peut écrire **l'énergie virtuelle de déformation** en terme de contrainte de PK2 et de variation virtuelle de déformation de Green-Lagrange tel que :

Si on note le **champ de déplacement virtuel** :

$$\delta \bar{u} = \bar{v}^* \delta t$$

On a l'énergie virtuelle de déformation avec :

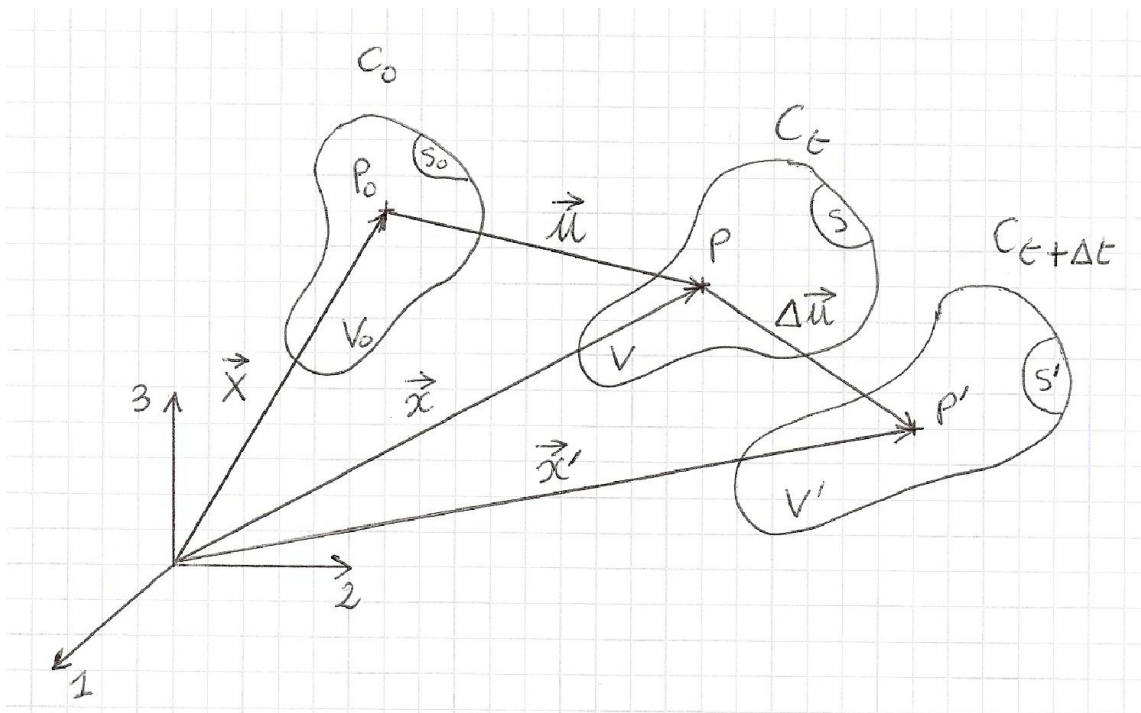
$$\delta U = \iiint_{V_0} S : \delta E dV_0$$

E déformation de Green-Lagrange qui a pour **variation virtuelle**  $\delta E$  dont on rappelle que **virtuel** veut dire **perturbation** autour d'une position équilibrée, continue, arbitraire, différente de zéro et compatible avec les liaisons :

$$E = \frac{1}{2} [F^T F - I] = \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial u}{\partial X} + \left( \frac{\partial u}{\partial X} \right)^T \right] + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial X} \right)^T \left( \frac{\partial u}{\partial X} \right)$$

en notant que :  $F = 1 + \frac{\partial u}{\partial X}$        $\dot{F} = \frac{\partial \dot{u}}{\partial X}$        $\delta F = \frac{\partial \delta u}{\partial X}$

on a :  $\delta E = \dot{E} \delta t = \frac{1}{2} [F^T \delta F + \delta F^T F]$



Expression de **l'énergie virtuelle de déformation** à  $t+\Delta t$  :

$$\delta U_{t+\Delta t} = \delta U_t + \Delta(\delta U)$$

d'où : 
$$\Delta(\delta U) = \iiint_{V_0} [\Delta S : \delta E + S : \Delta(\delta E)] dV_0$$

On **linéarise** (pour la résolution numérique) en écrivant:

$$\Delta(\delta E) = \frac{1}{2} [\Delta F^T \delta F + \delta F^T \Delta F]$$

D'où : 
$$S : \frac{1}{2} [\Delta F^T \delta F + \delta F^T \Delta F] = \frac{1}{2} (S + S^T) : (\delta F^T \Delta F) = S : \delta F^T \Delta F$$

Donc l'énergie virtuelle de déformation à  $t+\Delta t$  :

$$\delta U_{t+\Delta t} = \iiint_{V_0} [(S + \Delta S) : \delta E + S : \delta F^T \Delta F] dV_0$$

Pour le **travail virtuel du chargement extérieur** à  $t+\Delta t$  (on se limite ici à **la statique** mais la **dynamique** s'introduirait à ce niveau avec le travail virtuel des **forces d'inertie d'accélération** et d'**amortissement**) :

$$\delta W_{t+\Delta t} = \iint_{S_0} \delta u^T (t_0 + \Delta t_0) dS_0 + \iiint_{V_0} \delta u^T \rho_0 (f + \Delta f) dV_0$$

L'équilibre à  $t+\Delta t$  s'écrit :

$$\delta U_{t+\Delta t} = \delta W_{t+\Delta t}$$

soit l'écriture prête pour le schéma itératif de Newton :

(40)

$$\iiint_{V_0} [\Delta S : F^T \delta F + S : \delta F^T \Delta F] dV_0 = \iint_{S_0} \delta u^T (t_0 + \Delta t_0) dS_0 + \iiint_{V_0} [\delta u^T \rho_0 (f + \Delta f) - S : F^T \delta F] dV_0$$

où encore en développant en composantes :

$$\iiint_{V_0} [\Delta S_{IJX_{k,I}} \delta u_{k,J} + S_{IJ} \Delta u_{k,I} \delta u_{k,J}] dV_0 = \iint_{S_0} \delta u_i (t_{0i} + \Delta t_{0i}) dS_0 - \iiint_{V_0} [\delta u_i \rho_0 (f_i + \Delta f_i) - S_{IJX_{k,I}} \delta u_{k,J}] dV_0$$

(Rappel : les indices après la virgule en lettres **majuscules** signifient dérivées par rapport aux **coordonnées initiales X**)

Après l'introduction d'une **loi de comportement** en terme de l'incrément de contrainte de PK2 et de l'incrément (linéarisé) de déformation de Green-Lagrange c'est-à-dire :

$$\Delta S = \hat{f}(E, t) : \Delta E$$

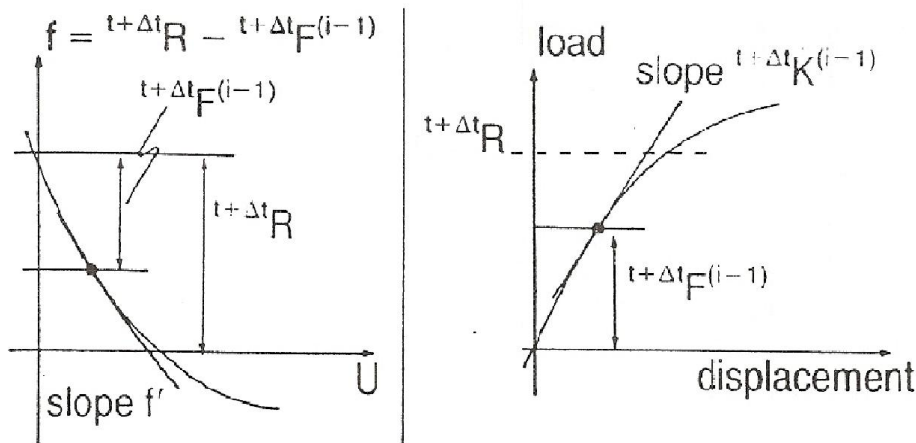
loi qui est bien **objective** (invariante dans une rotation de solide rigide) car entre tenseurs lagrangiens (voir exemples dans les chapitres suivants), la **discrétisation spatiale** par **éléments finis** des expressions ci-dessus donne (voir cours éléments finis):

$$\{\delta u\}^T [K_E + K_G] \{\Delta u\} = \{\delta u\}^T \{R_{ext} - F_{int}\}$$

où  $[K_E]$  est la **matrice tangente de comportement** et  $[K_G]$  la matrice **géométrique** qui **disparaît** dans le cas **des petites perturbations**. Soit  $[K_T] = [K_E + K_G]$  la matrice de raideur tangente globale et  $\{R_{ext}\}$  les forces nodales équivalentes **extérieures** de **toutes natures** et  $\{F_{int}\}$  les forces nodales équivalentes aux contraintes.

Dans les **codes de calculs implicites**, dans un incrément  $\Delta t$ , le **schéma itératif** de Newton-Raphson se résume à l'équation et aux figures ci-dessous:

$$(41) \quad [K_T] \{\Delta u\}^{(i)} = \{{}^{t+\Delta t} R_{ext} - {}^{t+\Delta t} F_{int}^{(i-1)}\} = f$$



jusqu'à ce que le **résidu « f »** (le **second membre**) soit suffisamment **petit** (au sens d'une norme), l'équilibre est ainsi vérifié à  $t + \Delta t$  et on applique un nouvel incrément. En formulation Lagrangienne Totale, les calculs se font donc sur le maillage initial.

La généralisation à la **dynamique** est immédiate avec les **forces d'inertie d'accélération**, voire d'amortissement vues comme forces extérieures qui passées au premier membre donnent le **schéma implicite** d'intégration en temps avec (i) l'indice d'itération :

$$\left[ \mathbf{M} \right]^{t+\Delta t} \{ \ddot{\mathbf{u}} \}^{(i)} + \left[ \mathbf{K}_T \right] \{ \Delta \mathbf{u} \}^{(i)} = \left\{ {}^{t+\Delta t} \mathbf{R}_{\text{ext}} - {}^{t+\Delta t} \mathbf{F}_{\text{int}}^{(i-1)} \right\}$$

où M est la matrice de masse cohérente avec les fonctions de forme des éléments (mais pas nécessairement).

✦ **Remarque** : Sur le système ci-dessus, il y a beaucoup de schémas d'intégration possibles en **espace** et en **temps**.

Cependant la dynamique permet également d'écrire la forme discrétisée de **l'équation du mouvement à l'instant t** :

$$\left[ \mathbf{M} \right]^t \{ \ddot{\mathbf{u}} \} = \left\{ {}^t \mathbf{R}_{\text{ext}} - {}^t \mathbf{F}_{\text{int}} \right\}$$

qui avec une matrice de **masse diagonale** M est à la base des **codes de calculs explicites** après discrétisation en temps de l'accélération par différences finies.

### 2.4.2 Forme incrémentale Lagrangienne Réactualisée

Si on considère maintenant la configuration à l'instant t comme **configuration de référence**, voir ce qui a été dit au **paragraphe 2.3.2**, x s'identifie à X à t par **réactualisation des nœuds** du maillage d'où :

$$\mathbf{F}(t) = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{X}} = \mathbf{I} ; \text{ S et T sont confondus à t mais attention pas leurs incréments de t à } t + \Delta t$$

(voir paragraphe suivant) si bien que l'expression (40) devient :

$$(42) \quad \iiint_V \left[ \Delta \mathbf{S} : \delta \mathbf{F}_t + \mathbf{T} : \delta \mathbf{F}_t^T \Delta \mathbf{F}_t \right] dV = \iint_S \delta \mathbf{u}^T (t + \Delta t) dS + \iiint_V \left[ \delta \mathbf{u}^T \rho (f + \Delta f) - \mathbf{T} : \delta \mathbf{D} \right] dV$$

car la configuration à  $t$  étant la référence on a :  $\delta D = \frac{1}{2} [\delta F_t + \delta F_t^T]$  variation virtuelle du taux de déformation (voir paragraphe 2.3.2) et de la symétrie des contraintes de Cauchy  $T$ .  
 Ecriture de (42) en composantes :

$$(43) \quad \boxed{\iiint_V [\Delta S_{ij} \delta u_{i,j} + T_{ij} \Delta u_{k,i} \delta u_{k,j}] dV = \iint_S \delta u_i (t_i + \Delta t_i) dS + \iiint_V [\delta u_i \rho (f_i + \Delta f_i) - T_{ij} \delta u_{i,j}] dV}$$

(Rappel : les indices après la virgule en lettres **minuscules** signifient dérivées par rapport aux **coordonnées actuelles**  $x$ )

**⚠ Attention :**

On introduit maintenant une loi de comportement en terme de l'incrément de contrainte de PK2 **référéncé à  $t$**  et de l'incrément du taux de déformation :

$$\Delta S_t = f(D, t) : \Delta D$$

Si toutes les règles de transformation entre les différents tenseurs sont respectées, le système numérique itératif (41) **est le même** entre les formulations Lagrangienne Totale et Réactualisée, ce n'est que **la façon de le calculer qui change**. C'est par **commodité** en fonction surtout de la loi de comportement que l'on choisira une formulation plutôt que l'autre, par exemple hyperélasticité en Lagrange Totale et élastoplasticité en Lagrange Réactualisé

### 2.4.3 Forme en vitesse Lagrangienne Réactualisée

Du fait de la symétrie des tenseurs des contraintes PK2 et Cauchy, le premier membre de (42) ou (43) peut encore s'écrire :

$$\Delta(\delta U) = \delta(\Delta U) = \iiint_V [\Delta S_{ij} + T_{ik} \Delta u_{j,k}] \delta u_{j,i} dV$$

et on peut faire apparaître le gradient de vitesse  $L$  en divisant l'expression incrémentale précédente par  $\Delta t \rightarrow 0$  d'où la formulation en vitesse:

$$(44) \quad \delta(\dot{U}) = \iiint_V [\dot{S} + T.L^T] : \delta L^T dV$$

On peut exprimer la vitesse de PK2 référencée à  $t$  en fonction de la vitesse de Cauchy de la manière suivante :

Le tenseur des contraintes de PK2 qui mesure l'état de contrainte à  $t + \Delta t$  mais référencé à  $t$  s'écrit :

$$S^{t+\Delta t} = T + \dot{S} \Delta t$$

pour un temp  $t'$  compris entre  $t$  et  $t + \Delta t$ , on a la dérivée de ce tenseur avec :

$$\dot{S} = \frac{\partial}{\partial t'} (S^{t+t'}) = \frac{\partial}{\partial t'} [JF^{-1} . T . F^{-T}]_{t+t'}$$

avec 
$$\frac{\partial}{\partial t'} [JF^{-1} . T . F^{-T}]_{t+t'} = \dot{J}F^{-1}TF^{-T} + J\dot{F}^{-1}TF^{-T} + JF^{-1}\dot{T}F^{-T} + JF^{-1}T\dot{F}^{-T}$$

Compte tenu que  $\dot{J} = TrD$        $\dot{F} = L.F$        $\dot{F}^{-1} = -F^{-1}\dot{F}F^{-1}$

Avec  $t' \rightarrow 0$  on a  $J \rightarrow 1$  et  $F \rightarrow I$ , il reste en définitive :

$$(45) \quad \boxed{\dot{S} = \dot{T} + T \operatorname{tr} D - L \cdot T - T \cdot L^T = \dot{T}_{TR}}$$

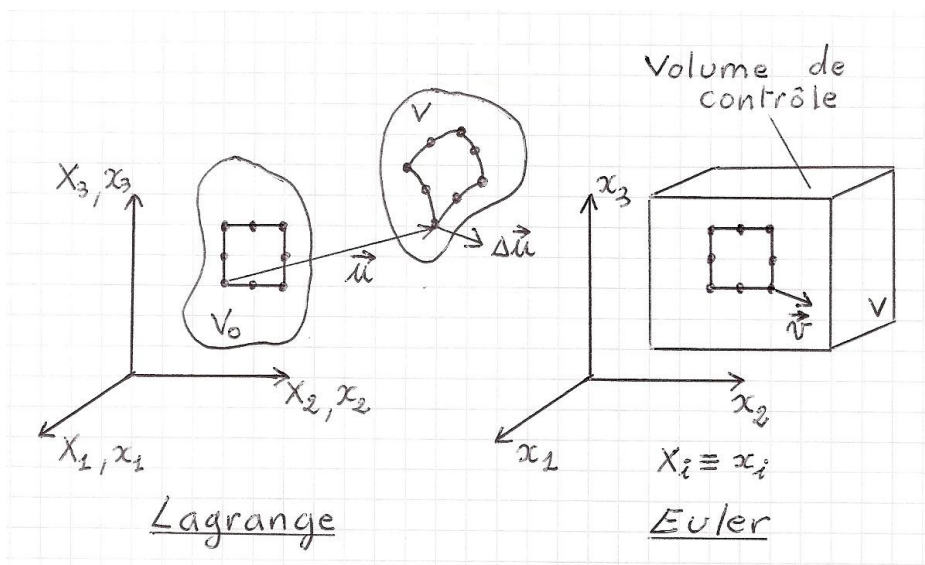
La dérivée de PK2 **référéncé à t** est parfois appelée **dérivée de « Truesdell » de Cauchy**

$$(46) \quad \delta(\dot{U}) = \delta(P_{int}) = \iiint_V [\dot{T} + T \operatorname{tr}(D) - L \cdot T] : \delta L^T dV = \delta(P_{ext})$$

En composantes :  $\delta(\dot{U}) = \iiint_V [\dot{T}_{ij} + T_{ij} v_{k,k} - v_{i,k} T_{kj}] \delta v_{j,i} dV = \delta(P_{ext})$

La variation virtuelle de la puissance intérieure est intéressante pour l'étude des **instabilités**

### 2.4.4 Forme Eulérienne



La forme de résolution **Eulérienne** est l'approche essentielle de la **Mécanique des Fluides mais pas uniquement** où du fait de certaines **lois de comportement** (voir chapitres suivants) on peut s'intéresser qu'à la **vitesse des particules** (mais également à la pression, température,...). Pour pouvoir exprimer l'**équilibre** et la **conservation de la masse** des particules, on utilise un **volume de contrôle** avec un **maillage fixe** d'éléments finis (ou de différences finies). Comme vu au chapitre 1 (1.2.1), ici la dérivée totale (ou particulaire, ou matérielle) d'une quantité par rapport au temps contient le terme de transport :

$$\frac{D}{Dt}(\cdot) = \frac{\partial}{\partial t}(\cdot) + v_j \frac{\partial}{\partial x_j}(\cdot)$$

alors qu'en **Lagrange** ce n'est que la dérivée partielle (car les  $\vec{X}$  fixes), on suit la particule dans son mouvement. En **Lagrange**, la **conservation de la masse** se traduit par le

déterminant du gradient de la transformation F :  $\frac{\rho_0}{\rho} = \det[F]$

alors qu'en **Euler** on a (chapitre 1) :

$$\frac{D}{Dt}(\rho) + \rho \frac{\partial v_i}{\partial x_i} = 0$$



avec la condition  $\frac{\partial v_i}{\partial x_i} = 0$  si le fluide est **incompressible**.

Ainsi **l'équation local du mouvement** avec les **contraintes vraies de Cauchy** T et des forces par unité de volume f :

En **Lagrange** :

$$\frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j} + f_i = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}$$

En **Euler** :

$$\frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j} + f_i = \rho \frac{D}{Dt}(v_i)$$

La **discrétisation spatiale** dans la **forme Eulérienne** s'appuie directement sur le **principe des vitesses virtuelles** à l'instant t tel que :

$$\int_V T_{ij} \delta D_{ij} dV = \int_V \left[ f_i - \rho \frac{D}{Dt}(v_i) \right] \delta v_i dV + \int_S t_i \delta v_i dS$$

avec la variation virtuel du **taux de deformation**  $\delta D_{ij} = \frac{1}{2} [\delta v_{i,j} + \delta v_{j,i}]$

et typiquement une **loi de comportement** entre **contraintes vraies de Cauchy** et le **taux de déformation** (voir chapitre 3 suivant sur l'objectivité du taux de déformation), par exemple pour un **fluide visqueux** :

$$T_{ij} = -p \delta_{ij} + 2\mu D_{ij} \quad \text{ou bien} \quad T_{ij} = -p \delta_{ij} \quad \text{cas du fluide parfait}$$

La **difficulté** avec la formulation Eulérienne est que si le domaine d'étude change ce qui est le cas des **écoulements à surface libre**, il faudrait créer un nouveau volume de contrôle à chaque instant. Cette **limitation** de la formulation Eulérienne est **efficacement résolue** avec une formulation dite « **Arbitrary Lagrange Eulerian** », **ALE dans les codes de calculs**, où pour faire simple, les neuds du maillage sur la surface libre sont complètement Lagrangiens pour la décrire, les nœuds du domaine fluide pouvant être complètement Eulériens ou « réactualisés » de **manière arbitraire**. Ce formalisme est à la base de la résolution des problèmes **d'interaction « fluide-structure »**, voir les ouvrages spécialisés.

**Exemple** : *Illustration des points de vue Lagrangien et Eulérien*

Si on considère le cas uniaxial d'une particule dans un tuyau tel que son mouvement soit décrit par l'équation :

$$x = \phi(X, t) = -5 + \sqrt{25 + 10X + X^2 + 4t}$$

En **Lagrange** :

$$x = X + u$$

$$v = \frac{dx}{dt} = \frac{du}{dt} = \frac{2}{[25 + 10X + X^2 + 4t]^{1/2}} \quad \text{et} \quad \frac{d^2u}{dt^2} = \frac{-4}{[25 + 10X + X^2 + 4t]^{3/2}}$$

qui sont la **vitesse** et **l'accélération** de la particule de **coordonnée initiale** X (son étiquette en somme) à un **instant donné** t.

En **Euler** :

comme ici  $x + 5 = \sqrt{25 + 10X + X^2 + 4t}$

On voit que :

$$v = \frac{du}{dt} = \frac{2}{x+5} \qquad \frac{d^2u}{dt^2} = \frac{-4}{(x+5)^3}$$

qui sont la **vitesse** et l'**accélération** de la particule quand elle **passse la coordonnée spatiale** x.

✶ Remarque : on vérifie aussi que  $\frac{Dv}{Dt} = \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial x} v$  donne bien l'accélération

$$\frac{Dv}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{2}{x+5} \right) + \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{2}{x+5} \right) \right] \left( \frac{2}{x+5} \right) = 0 - \frac{4}{(x+5)^3}$$

où ici la dérivée locale de la vitesse est nulle.

### 2.4.5 Résolution dynamique explicite

Les grands codes de calcul ont une version « dynamique explicite » basée sur l'intégration temporelle directe de l'**équation du mouvement** discrétisée :

$$[M]\{\dot{u}\} + [C]\{\dot{u}\} = \{R_{ext} - F_{int}\}$$

où les **forces nodales interne** à t au second membre peuvent se calculer sur une **base lagrangienne totale** où **réactualisée**. La matrice de **masse** M est indépendante de la configuration (conservation de la masse), la matrice d'**amortissement** aussi si  $C=\alpha M$  mais c'est un peu moins vrai avec un amortissement de type  $C=\alpha M + \beta K$ .

Généralement, la discrétisation temporelle est en **différences finies centrées** :

$$\begin{aligned} \{\dot{u}\} &= \frac{1}{2\Delta t} \{u^{t+\Delta t} - u^{t-\Delta t}\} \\ \{\ddot{u}\} &= \frac{1}{\Delta t^2} \{u^{t+\Delta t} - 2u^t + u^{t-\Delta t}\} \end{aligned}$$

d'où :

$$\left[ \frac{1}{\Delta t^2} M + \frac{1}{2\Delta t} C \right] \{u^{t+\Delta t}\} = \{R\}$$

avec :

$$\{R\} = \{R_{ext}\} - \{F_{int}\} + \frac{2}{\Delta t^2} [M]\{u\} - \left[ \frac{1}{\Delta t^2} M - \frac{1}{2\Delta t} C \right] \{u^{t-\Delta t}\}$$

Si les matrices de masse et d'amortissement sont **diagonales (masses concentrées)** alors on a une **relation scalaire de récurrence** pour chaque degré de liberté i à t+Δt:

$$\boxed{u_i^{t+\Delta t} = \left( \frac{1}{\frac{m_{ii}}{\Delta t^2} + \frac{c_{ii}}{2\Delta t}} \right) R_i^t}$$

où la masse diagonale correspondante  $m_{ii} > 0$  doit être positive mais  $c_{ii}$  peut être nul.

Pour le début du calcul à  $t=0$ , on peut utiliser les **valeurs initiales** de **vitesse** et d'**accélération** :

$${}^{-\Delta t}\{\mathbf{u}\} = {}^0\{\mathbf{u}\} - \Delta t {}^0\{\dot{\mathbf{u}}\} + \frac{\Delta t^2}{2} {}^0\{\ddot{\mathbf{u}}\}$$

**Condition de stabilité :**

Le schéma **d'intégration explicite** est **stable** si le pas de temps satisfait à la condition dite de Courant-Friedrichs-Lewy :

$$\Delta t \leq \Delta t_{\text{crit}} = \frac{2}{\omega_n}$$

où  $\omega_n = 2\pi f_n$  est **la plus grande pulsation propre du maillage** obtenue à partir du système homogène avec la raideur élastique :

$$[M]\{\ddot{\mathbf{u}}\} + [K]\{\mathbf{u}\} = 0$$

Si on considère le **nième harmonique** sous la forme :  $\{\mathbf{u}_n\} = \{\phi_n\}e^{i\omega_n t}$  on a la solution propre :

$$[K - \omega_n^2 M]\{\phi_n\} = \{0\} \quad \text{soit} \quad \det[K - \omega_n^2 M] = 0$$

Si on l'applique à l'élément barre à 2 nœuds avec la matrice de raideur élastique et des masses concentrées :

$$[K] = \frac{EA}{\ell} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad [M] = \rho V \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix}$$

on obtient :

$$\omega_1^2 = 0 \quad \omega_2^2 = \frac{4E}{\rho \ell^2} \quad \text{soit en définitive pour la barre: } \Delta t_{\text{crit}} = \ell \sqrt{\frac{\rho}{E}}$$

Cette relation simple est très souvent utilisée par **approximation** et **pondération** sur un maillage de toute nature où  $\ell$  est la **plus petite distance entre 2 nœuds du maillage** et à plus forte raison avec un comportement non élastique linéaire.

## 3 LOIS DE COMPORTEMENT

### 3.1 THEORIE GENERALE

#### 3.1.1 Forme générale

La loi de comportement permet de relier les **contraintes** aux **déformations** subies par le matériau. C'est elle qui prendra en compte la nature du matériau.

Avant d'aborder les divers cas particuliers de lois de comportement, nous allons introduire quelques **principes généraux**. De manière générale, la loi de comportement doit permettre de calculer les contraintes à l'instant  $t$  à partir de la déformation subie par le matériau jusqu'à l'instant  $t$ , soit :

$$(1) \quad T(t) = T \left\{ F(\tau) \right\}_{\tau \leq t} \quad \text{ou} \quad (1') \quad \Pi(t) = \Pi \left\{ F(\tau) \right\}_{\tau \leq t}$$

$$\text{ou} \quad (1'') \quad S(t) = S \left\{ F(\tau) \right\}_{\tau \leq t}$$

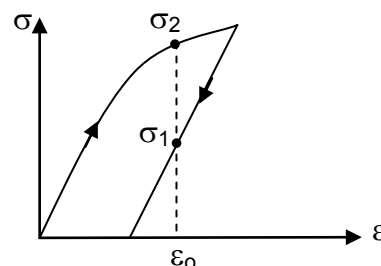
$T(\cdot)$ ,  $\Pi(\cdot)$ ,  $S(\cdot)$  sont les fonctionnelles de réponse pour Cauchy, PK1 et PK2.

Nous supposons que la cinématique du matériau n'intervient que par le **tenseur gradient**  $F$ .

Nous excluons à fortiori les théories non locales où la contrainte en un point donné peut dépendre des déformations de l'ensemble du solide ou d'un voisinage, ces théories connaissent à l'heure actuelle un certain succès, voir chapitre 6. Le cadre ainsi défini est celui des milieux « **matériellement simples** » et c'est le cadre qui est cohérent avec le cadre dynamique introduit au chapitre 1. En effet, lorsque l'on raffine la description cinématique, il faut également raffiner le cadre dynamique c'est-à-dire la schématisation des efforts. On remarque aussi que la loi de comportement (1) (ou les formes (1') et (1'')) qui lui sont équivalentes) donne le tenseur des contraintes à l'instant  $t$  en fonction des déformations subies jusqu'à l'instant  $t$ . Mis à part le cas particulier des milieux élastiques, les matériaux présentent tous **des effets de mémoire**.

**Exemple :** Matériau **plastique**.

A un même allongement, correspond deux contraintes possibles

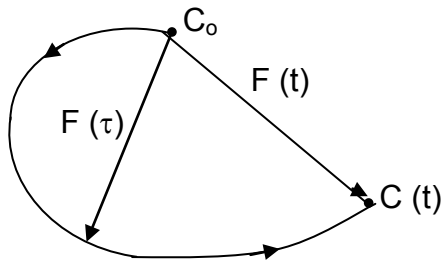


On parlera de « fonctionnelle » de réponse pour indiquer que leur argument n'est pas la déformation à l'instant  $t$  mais **l'histoire de déformation**, c'est-à-dire l'ensemble des déformations subies par le matériau jusqu'à  $t$ .

Nous pouvons écrire la loi de comportement en description Lagrangienne Totale mais aussi Réactualisée qui a été vue au chapitre 2.

**Les différentes écritures**

**Écriture 1**

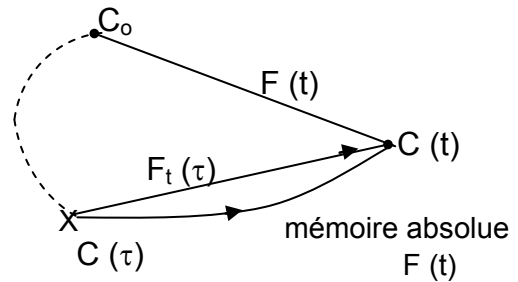


$C_0$  : configuration de référence

Le matériau se souvient de toutes les déformations passées

$$(2) \quad T(t) = T \left\{ F(\tau) \right\}_{\tau \leq t}$$

**Écriture 2 : Lagrangien réactualisé**



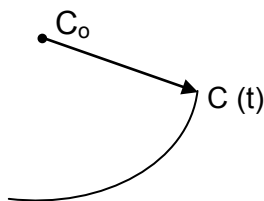
mémoire du passé

Le matériau se souvient de sa configuration de référence et de ses déformations relatives passées. On dissocie donc ici deux types de mémoire.

$$(3) \quad T(t) = T \left\{ F_t(\tau), F(t) \right\}_{\tau \leq t}$$

**Cas particuliers**

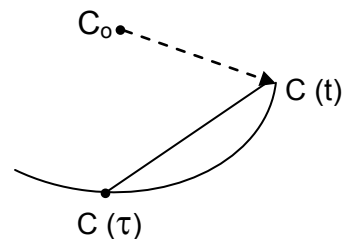
**Milieux élastiques**



Ces milieux n'ont pas de mémoire du passé. La loi de comportement devient :

$$(4) \quad T(t) = t \left\{ F(t) \right\}$$

**Milieux fluides**



Ces milieux n'ont pas de mémoire sinon par le volume ce qui se traduit par :

$$(5) \quad T(t) = T \left\{ F_t(\tau), J(t) \right\}_{\tau \leq t}$$

$J(t)$  traduit le volume du fluide

3.1.2 Liaisons internes

Certains matériaux ne peuvent supporter certaines déformations. On parle de **liaisons internes**. Il faut alors rajouter à la forme générale de la loi de comportement une **contrainte indéterminée** ne travaillant pas dans tout mouvement compatible avec la liaison.

Soit : (6) 
$$T(t) = T_{\tau \leq t} \{F(\tau)\} + T_0 \quad \text{avec} \quad T_0 : D \equiv 0$$

Nous reviendrons plus loin sur l'origine de cette contrainte indéterminée. Pour l'instant, nous posons son existence comme un principe.

**Exemple : Incompressibilité**

L'incompressibilité se traduit par :  $\det F = J = 1, \rho = \rho_0$ .

La différentielle d'un déterminant est donnée par :

(7) 
$$\delta (\det A) = \det A \operatorname{tr}(\delta A A^{-1}) \quad (\text{cf. chapitre 1})$$

L'incompressibilité se traduit sur D par  $\operatorname{tr} D = 0$ . Ces deux conditions donnent à la loi de comportement la forme suivante en ajoutant une contrainte  $T_0 = -p1$  :

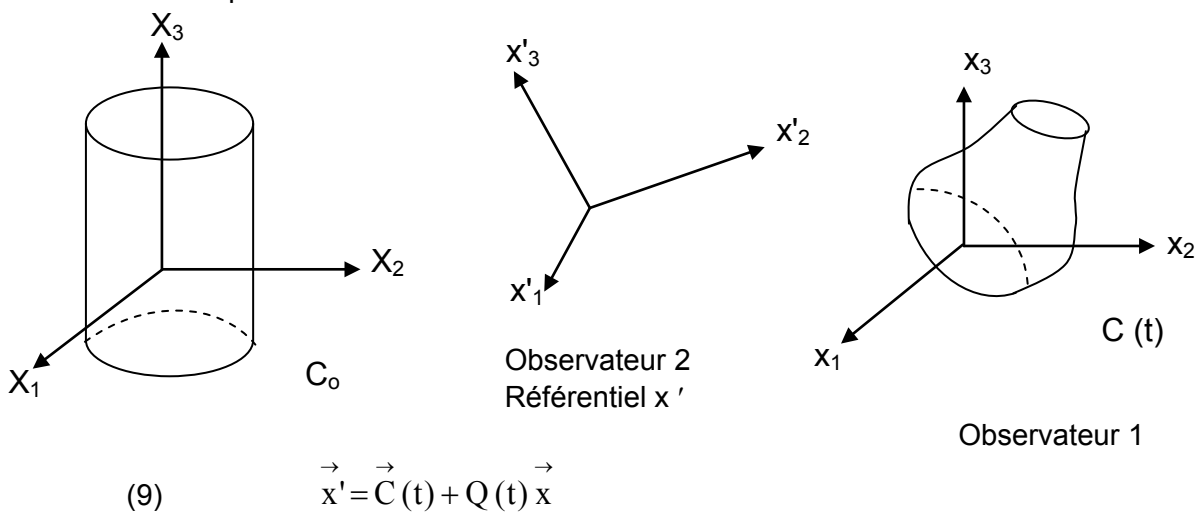
(8) 
$$T(t) = -p1 + T_{\tau \leq t} \{F(t)\} \quad \text{car} \quad T_0 : D = -p \operatorname{tr} D = 0$$

p est une pression arbitraire déterminée par les **équations d'équilibre** et les **conditions aux limites**. (voir les exemples chapitre 4 sur matériaux hyperélastiques)

3.1.3 Objectivité

La loi de comportement doit relier les contraintes aux déformations. Or le tenseur F décrit non seulement la déformation locale mais aussi la rotation. Il faut donc éliminer cette dernière.

Pour ce faire on écrira que la loi de comportement **reste invariante** lorsque l'on superpose au mouvement une **rotation** quelconque. Ceci revient à dire que deux observateurs en mouvement (translation + rotation) l'un par rapport à l'autre observeront la même loi de comportement. A chaque observateur est attaché un référentiel d'observation, c'est-à-dire un repère orthonormé dépendant du temps. Un **changement de référentiel** (ou d'observation) sera donc défini par :



Un vecteur  $\vec{u}$  est **objectif** si ses composantes se transforment selon :

$$u' = Q u$$

$u'$  composantes de  $\vec{u}$  par rapport au référentiel  $x'$  et pour **un tenseur du 2ème ordre**  $T$  :

$$Q Q^T = 1$$

$$T' = Q T Q^T$$

si  $\vec{u} = T \cdot \vec{v} \Rightarrow u = T v$  et  $u' = T' v'$  en composantes  $\Rightarrow u' = Q T Q^T v'$

Nous sommes donc appelés à postuler :

◆ **Principe d'objectivité ou d'indifférence matérielle**

La **loi de comportement** doit être **invariante** dans tout **changement** de **référentiel**.

On adjoint très souvent à cette invariance, une invariance par changement de chronologie en écrivant le changement de référentiel sous la forme :

$$(10) \quad \vec{x}' = \vec{C}(t') + Q(t') \vec{x} \quad \underline{t' = t + a}$$

ce qui revient à supposer que le matériau est non vieillissant, c'est-à-dire que son comportement reste le même au cours du temps. En dérivant (10) on voit immédiatement que **le vecteur vitesse n'est pas objectif**.

Pour exploiter ce principe d'objectivité, on va chercher les **lois de transformation** des tenseurs introduits jusqu'ici dans un changement de référentiel.

Pour avoir ces lois, il est nécessaire d'avoir celle de  $F$  :

$$F'_{ij} = \frac{\partial x'_i}{\partial X_j} = \frac{\partial x'_i}{\partial x_k} \frac{\partial x_k}{\partial X_j}$$

donc (11)  $F'(x, t) = Q(t) F(x, t)$  avec  $Q Q^T = 1$

$Q(t)$  est le tenseur de changement de repère. On en déduit alors les lois de transformations des différents tenseurs.  $C' = F'^T F' = F^T Q^T Q F = F^T F = C$

$C' = C$	$F' = Q F$	$B' = Q B Q^T$
$U' = U$	$R' = Q R$	$V' = Q V Q^T$
$E' = E$		$A' = Q A Q^T$

$e'_\alpha = e_\alpha$		$\bar{e}'_\alpha = Q \bar{e}_\alpha Q^t$
$S' = S$	$\Pi' = Q \Pi$	$T' = Q T Q^t$
		$\tau' = Q \tau Q^t$

Ce sont des tenseurs dans la configuration de référence  $C_0$  qui n'est pas affectée par le changement de repère, c'est normal.

Ils se comportent comme des tenseurs lagrangiens dans l'actuelle  $C_t$ . Ils sont objectifs.

Nous allons maintenant appliquer le principe d'objectivité à quelques exemples.

### 3.1.4 Matériaux élastiques

Un milieu élastique n'a pas de mémoire du passé. La loi de comportement s'écrit sous la forme :

$$(12) \quad \boxed{T(t) = t(F(t))}$$

Puisque cette loi ne fait intervenir que le temps  $t$ , nous l'oublierons dans la suite. La fonction  $t$  est définie dans un référentiel  $R$ . Dans un autre référentiel  $R'$  un autre observateur verra une fonction  $t'$  :

$$\begin{aligned} T &= t(F) && \text{dans } R \\ T' &= t'(F') && \text{dans } R' \end{aligned}$$

Le principe d'objectivité exige que la loi de comportement ne dépende pas du référentiel d'observation, c'est-à-dire que  $t(\cdot) = t'(\cdot)$ .

Exploitions cette condition en utilisant les lois de transformation obtenues plus haut.

$$T' = t'(F') = t(F') = t(QF)$$

Mais aussi : 
$$T' = Q T Q^T = Q t(F) Q^T$$

$t$  doit donc vérifier : 
$$t(QF) = Q t(F) Q^T$$

Nous choisissons alors une valeur particulière de  $Q$ , soit  $Q = R^T$ . Donc

$$QF = R^T R U = U$$

Donc : 
$$T = Q^T t(QF) Q = R t(U) R^T$$

On a alors le second tenseur de Piola Kirchoff  $S$  par :

$$\begin{aligned} S &= J F^{-1} T F^{-1T} \\ &= J U^{-1} R^T R t(U) R^T R U^{-1} \end{aligned}$$

Donc : 
$$S = J U^{-1} t(U) U^{-1}$$

Mais en utilisant les résultats du chapitre 2, on voit que  $U = (1 + 2 E)^{1/2}$  peut être considéré comme un fonction du tenseur de Green-Lagrange. On peut donc écrire :

$$(13) \quad S = s(E)$$

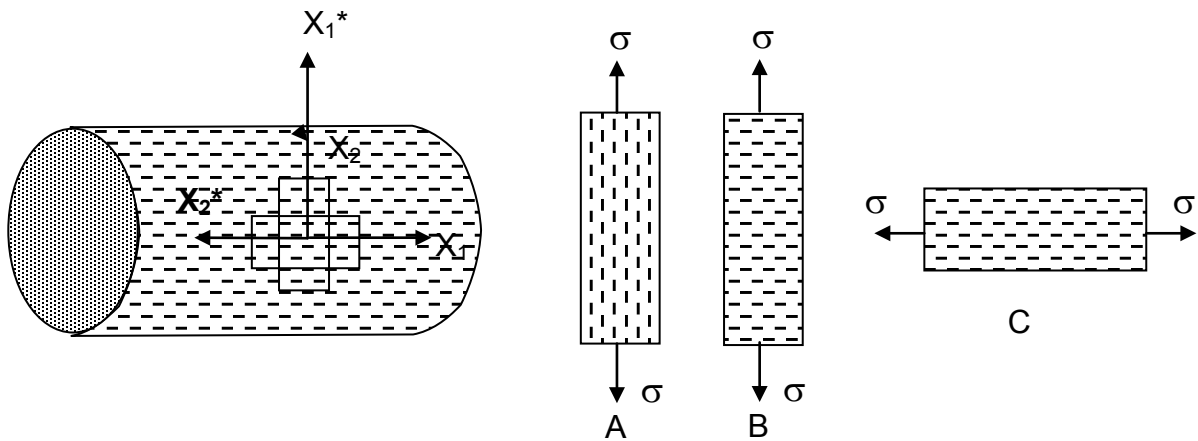
Inversement, la loi de comportement  $S = s(E)$  est automatiquement objective, car  $S$  et  $E$  ne changent pas par changement de référentiel. On a donc trouvé une forme lagrangienne objective pour les lois de comportement des matériaux élastiques :

$$\boxed{S(t) = s(E(t))}$$



### 3.2 ISOTROPIE et ANISOTROPIE

#### 3.2.1 Matériaux isotropes



La condition **d'objectivité** indique que la **traction** A est équivalente à la **traction** C (rotation dans C (t) ; la même éprouvette est sollicitée sur deux machines orientées différemment).

La condition **d'isotropie du matériau** implique que la traction A est équivalente à la traction B (rotation dans C<sub>0</sub> ; deux éprouvettes découpées dans deux directions différentes ont les **mêmes propriétés**).

En général, affirmer qu'un matériau est isotrope, c'est dire que ses propriétés sont identiques dans toutes les directions donc que son comportement est **invariant par rotation de la configuration de référence C<sub>0</sub>**.

**🔑 Définition :**

Un matériau sera isotrope si sa loi de comportement est invariante par rotation de la configuration de référence.

Une rotation de la configuration de référence est caractérisée par un tenseur Q :

$$\vec{X}^* = Q \vec{X} \quad \Rightarrow \quad \boxed{F^* = F Q^T} \quad Q Q^T = 1$$

Dans C<sub>0</sub> et dans C<sub>0</sub>\* la loi de comportement s'écrit :

$$\begin{aligned} T(t) &= T \left\{ F(\tau) \right\}_{\tau \leq t} & T^*(t) &= T^* \left\{ F^*(\tau) \right\}_{\tau \leq t} \\ S(t) &= S \left\{ E(\tau) \right\}_{\tau \leq t} & S^*(t) &= S^* \left\{ E^*(\tau) \right\}_{\tau \leq t} \end{aligned}$$

**L'isotropie du matériau** impose que S = S\* et C = C\*. Les lois de transformations des divers tenseurs sont :

$$(14) \quad \begin{cases} C^* = Q C Q^T & F^{*T} = Q F^T & B^* = B \\ S^* = Q S Q^T & \Pi^* = \Pi Q^T & T^* = T \end{cases}$$

La fonction S vérifie donc pour tout tenseur Q orthogonal :

$$(15) \quad Q S \{E(\tau)\} Q^T = S \{Q E(\tau) Q^T\}$$

La fonctionnelle S est alors dite « mathisotrope », c'est-à-dire isotrope au sens des mathématiciens, c'est-à-dire encore **invariante par rotation**. On peut aussi écrire :

$$Q S \{C(\tau)\} Q^T = S \{Q C(\tau) Q^T\}$$

On peut ensuite utiliser cette propriété pour revenir à une formulation eulérienne de la loi de comportement. En effet, si l'on prend, dans (15)  $Q = R(t)$ , on obtient après quelques transformations inverses de celles faites pour passer de (12) à (13) :

$$(16) \quad \boxed{T(t) = T\{\hat{B}(\tau)\}}$$

Avec :

$$\begin{cases} \hat{B}(\tau) = R(t) C(\tau) R^T(t) \\ \hat{B}(t) = B(t) \end{cases}$$

Cette forme (16) est une **forme eulérienne isotrope** de la loi de comportement. Elle n'est donc valable que pour des matériaux isotropes. Dans le cas anisotrope, il faut revenir à (13).

### 3.2.2 Solides anisotropes

Dans le cas d'un matériau anisotrope, la loi de comportement n'est plus invariante dans toute rotation de la configuration de référence, mais seulement dans certaines. On dira que les repères matériels X et X\* sont équivalents si et seulement si :

$$(17) \quad S = S^* \quad \text{soit} \quad Q S \{C(\tau)\} Q^T = S \{Q C(\tau) Q^T\}$$

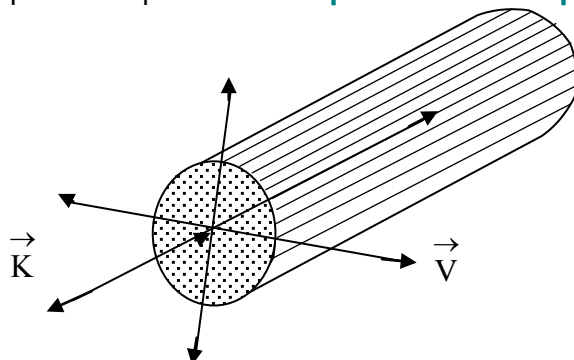
Pour un matériau isotrope, tous les repères sont équivalents. Pour un matériau anisotrope, seuls certains le seront. L'ensemble des Q vérifiant (17) forme un sous groupe g du groupe orthogonal. C'est le groupe d'isotropie du matériau g, qui définit l'ensemble des rotations de  $C_0$  préservant les symétries du matériau.

#### Exemple d'anisotropie

- ♦ **Isotropie transverse**

Un matériau possédant une **direction privilégiée**  $\vec{K}$  est dit isotrope transverse (ou orthotrope de révolution).

C'est par exemple le cas pour : un **composite renforcé par fibres unidirectionnelles**



Les tenseurs  $Q$  vérifiant la relation (17)) devront donc **laisser invariante la direction**  $\vec{K}$ .  
Le groupe  $g$  est donc formé des tenseurs  $Q$  vérifiant :

$$(18) \quad Q \vec{K} = \pm \vec{K}$$

ou

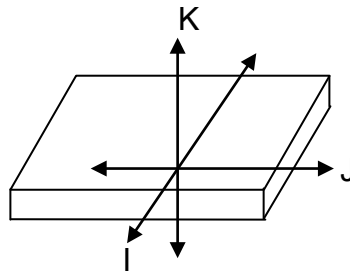
$$Q \vec{K} \otimes \vec{K} Q^t = \vec{K} \otimes \vec{K} = K K^T$$

C'est-à-dire **des rotations autour** de  $\vec{K}$ , et des symétries par rapport aux droites  $\vec{V} \perp \vec{K}$ .

♦ **Orthotropie**

Le matériau possède trois directions privilégiées perpendiculaires  $I, J, K$ . C'est par exemple le cas pour :

Une tôle laminée



$g$  est formé des symétries par rapport à  $\vec{I}, \vec{J}, \vec{K}$  et de l'identité.

### 3.2.3 Fonctions isotropes

• **Généralités**

Une fonction est « **isotrope** » au sens mathématique du terme si et seulement si elle est **invariante par rotation**, ce qui se traduira suivant la nature tensorielle de la fonction et de ses arguments par les conditions suivantes valables pour tout tenseur  $Q$  orthogonal :  
( $Q Q^T = 1$ ).

♦ **Fonction scalaire  $f$ ,  $X$  et  $Y$  sont des tenseurs**

$$f(X) = f(Q X Q^T)$$

$$f(X, Y) = f(Q X Q^T, Q Y Q^T)$$

$$f(X, \vec{V}) = f(Q X Q^T, Q \vec{V})$$

♦ **fonction tensorielle  $Z$**

$$Q Z(X) Q^T = Z(Q X Q^T)$$

$$Q Z(X, Y) Q^T = Z(Q X Q^T, Q Y Q^T)$$

♦ **fonction vectorielle  $F$**

$$Q \vec{F}(X) = \vec{F}(Q X Q^T)$$

$$Q \vec{F}(X, \vec{V}) = \vec{F}(Q X Q^T, Q \vec{V})$$

• **Invariants d'un tenseur**

Le polynôme caractéristique d'un tenseur de second ordre X,  $P_x(\lambda)$  est défini par :

$$(19) \quad P_x(\lambda) = \det(X - \lambda \mathbf{1}) = -\lambda^3 + X_I \lambda^2 - X_{II} \lambda + X_{III}$$

$X_I, X_{II}, X_{III}$  sont **les invariants fondamentaux** du tenseur X.

$$(20) \quad \begin{cases} X_I = \text{tr } X = X_{ii} \\ X_{II} = \frac{1}{2} \left[ (\text{tr } X)^2 - \text{tr } X^2 \right] = \frac{1}{2} \left[ (X_{ii} X_{jj}) - X_{ij} X_{ij} \right] \\ X_{III} = \det X \end{cases}$$

Ce sont des formules importantes pour établir des modèles de comportement isotropes.

• **Identité de Cayley-Hamilton**

Soit un tenseur X avec ses trois invariants fondamentaux  $X_I, X_{II}, X_{III}$ . Ils vérifient l'identité de Cayley-Hamilton :

$$(21) \quad -X^3 + X_I X^2 - X_{II} X + X_{III} \mathbf{1} = 0$$

Formule importante souvent utilisée avec  $X = C$  ou  $B$  dans les modèles hyper-élastiques

**3.2.4 Matériau élastique isotrope**

On a vu que la loi de comportement pour le tenseur S s'écrit  $S = s(E)$ , la condition d'isotropie impose que  $s = s^*$  pour tout tenseur caractérisant un changement de référentiel orthogonal.

$$\text{Soit :} \quad \begin{aligned} S^* &= s^*(E^*) = s(E^*) = s(Q E Q^T) \\ &= Q S Q^T = Q s(E) Q^T \end{aligned}$$

s vérifie alors :

$$(22) \quad s(Q E Q^T) = Q s(E) Q^T$$

La fonction s est « isotrope » au sens du paragraphe 3.2.3.

On sait exprimer le **tenseur T de Cauchy** en fonction du **tenseur S de PK2**, soit :

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{J} F S F^T = \frac{1}{J} V R s(E) R^T V^T \\ &= \frac{1}{J} V s(R E R^T) V^T \end{aligned}$$

$$\text{or} \quad V = B^{1/2} \quad R E R^T = \bar{e}_2 = \frac{1}{2} (B - \mathbf{1}) \quad \text{et} \quad J = (\det B)^{1/2} = \det F$$

Donc on peut exprimer T sous la forme :

$$(23) \quad T = (\det B)^{-1/2} B^{1/2} s(R E R^T) B^{1/2} = t(B)$$

Le tenseur de Cauchy T est donc fonction isotrope du tenseur de Cauchy-Green gauche B ou d'autres mesures eulériennes des déformations, par exemple A ou  $\bar{e}_\alpha$ .

On peut mathématiquement donner la loi de comportement d'un matériau élastique isotrope sous la forme (voir chapitre 4 **exemples en hyper-élasticité**):

$$(24) \quad T = \alpha_0 1 + \alpha_1 B + \alpha_2 B^2$$

Où  $\alpha_0, \alpha_1$  et  $\alpha_2$  sont fonctions des invariants  $B_I, B_{II}, B_{III}$ . Pour un matériau **incompressible**, on doit avoir  $B_{III} = 1 = \det B$  ; la relation (24) devient alors :

$$(25) \quad T = -p 1 + \alpha_1 B + \alpha_2 B^2$$

Où les  $\alpha_i$  sont fonctions de  $B_{II}$  et  $B_I$  et où p est une pression hydrostatique arbitraire à déterminer avec les conditions aux limites.

Un exemple d'une telle loi est la **loi de Mooney Rivlin** souvent utilisée pour décrire le comportement du caoutchouc :

$$(26) \quad T = -p 1 + G \left\{ \left( \frac{1}{2} + \beta \right) B - \left( \frac{1}{2} - \beta \right) B^{-1} \right\}$$

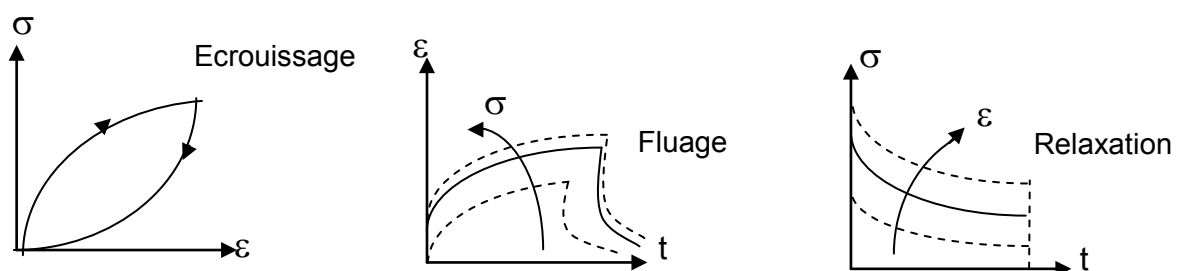
G : module de Coulomb  
 $\beta$  : coefficient non linéaire

Nous verrons au chapitre 4 que les aspects thermodynamiques nous permettront de revenir plus en détail sur ces lois de type hyperélastique en écriture Lagrangienne ou Eulérienne.

### 3.3 GENERALITES sur les MILIEUX VISQUEUX

#### 3.3.1 Forme générale du modèle de Kelvin-Voigt viscoélastique

Un milieu est **viscoélastique** si ses réponses aux essais uniaxiaux ont les allures suivantes :



Les lois de comportement régissant le comportement du modèle de Kelvin-Voigt s'écrivent :

$$(27) \quad T(t) = t \left\{ F(t), \dot{F}(t) \right\} = t \{ F(t), L(t) \}$$

qui généralise l'écriture en **petites perturbations**

$$\sigma = f(\varepsilon, \dot{\varepsilon}) = E\varepsilon + \eta\dot{\varepsilon} \quad (\text{Kelvin})$$

forme qu'on développera au **paragraphe 3.4.**

Pour que cette loi (27) soit valable, il faut vérifier la **condition d'objectivité.**

♦ **Objectivité**

On doit trouver d'abord la transformée de L par changement de référentiel  $x \rightarrow x'$  :

$$\begin{aligned} L' &= \dot{F}' F'^{-1} = \dot{Q} F F^{-1} Q^T + Q \dot{F} F^{-1} Q^T & \text{Car } F' &= QF \\ &= \Omega + Q L Q^T & \text{où } \Omega &= \dot{Q} Q^T \end{aligned}$$

Le **gradient de vitesse L n'est pas un tenseur objectif** car il reste  $\Omega$ . Le tenseur  $\Omega$  représente la rotation de  $R_2$  par rapport à  $R_1$ . C'est un tenseur antisymétrique :

$$\Omega + \Omega^T = 0$$

Soient D et W qui sont respectivement les parties symétrique et antisymétrique de L :

$$D' = \frac{1}{2} \left\{ \Omega + Q L Q^T + \left( \Omega + Q L Q^T \right)^T \right\}$$

On a :

$$= \frac{1}{2} \left\{ \Omega + \Omega^T + Q L Q^T + Q L^T Q^T \right\}$$

Donc :

$$D' = \frac{1}{2} \left\{ Q L Q^T + Q L^T Q^T \right\} = \frac{1}{2} \left\{ Q (L + L^T) Q^T \right\} \quad \text{soit} \quad \boxed{D' = Q D Q^T}$$

Donc D le **taux de déformation** est **un tenseur objectif.**

Par contre en refaisant un même type de calcul on aboutit à :  $W' = \Omega + Q W Q^T$  et donc W **taux de rotation n'est pas un tenseur objectif.** Donc en choisissant  $Q(t)$  de telle sorte que  $W' = 0$ , ce qui impose le choix de  $\dot{Q}$ , on peut écrire la loi de comportement sous la forme :

$$(28) \quad T(t) = t \{ F(t), D(t) \}$$

Le choix de Q nous permet d'écrire par un raisonnement analogue à ceux des § 3.1.3 et 3.1.4.

$$(29) \quad S(t) = s \{ E(t), \dot{E}(t) \}$$

qui est **une forme lagrangienne objective.**

Supposons maintenant le matériau isotrope, une forme eulérienne de type viscoélastique sera :

$$T = t(B, D) \quad \text{généralisant} \quad \sigma = f(\varepsilon, \dot{\varepsilon})$$

**3.3.2 Exemple de fluides visqueux et « plastiques »**

Dans le cas d'un fluide visqueux, T peut se mettre sous la forme :

$$(30) \quad T = T(J, D) = \alpha_0 \mathbf{1} + \alpha_1 D + \alpha_2 D^2$$

où  $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2$  sont fonction de  $J, D_I, D_{II}, D_{III}$ . Si l'évolution est lente, la loi est **linéaire** en  $D$  : le **fluide est alors newtonien**, et la loi de comportement se met sous la forme :

$$(31) \quad \boxed{T = - \underbrace{p(J)}_{\text{fluide parfait}} \mathbf{1} + \underbrace{\lambda(J) (\text{tr } D) \mathbf{1} + 2 \mu(J) D}_{\text{fluide visqueux}}}$$

**Fluide incompressible**

Pour un fluide incompressible  $D_I = \text{Tr } D = 0$ , la loi (30) devient :

$$(32) \quad T = - p \mathbf{1} + \alpha_1 D + \alpha_2 D^2 \quad \text{où } \alpha_1, \alpha_2 \text{ sont fonctions seulement de } D_{II} \text{ et } D_{III}, \text{ car } D_I = 0. \text{ On a de plus } J = 1.$$

♦ Cas particulier

Supposons que dans la relation (32),  $\alpha_2 = 0$  et  $\alpha_1$  n'est fonction que de :

$D_{II} = -2 |D|$  ( $|D| = \sqrt{D_{ij} D_{ij}}$ . On montre que  $D_{II} = -2 |D|$ ) et la relation (32) devient :

$$(33) \quad T = - p \mathbf{1} + \alpha(|D|) \frac{D}{|D|} = - p \mathbf{1} + 2 \mu(|D|) D$$

Considérons maintenant quelques formes de  $\alpha(|D|)$  pour donner des exemple de fluides incompressibles.

a. **Fluide visqueux newtonien**

C'est la particularisation de (31) au cas incompressible.

$$(34) \quad \boxed{T = - p \mathbf{1} + 2 \mu D} \quad \mu = \text{cte} \quad \alpha = 2 \mu |D|$$

C'est le modèle habituel de la **mécanique des fluides** qui, une fois reporté dans les équations du mouvement, conduit aux **équations de Navier-Stokes**. Voir le paragraphe 3.5 pour des **exemples d'écoulements particuliers non-newtoniens**.

b. **Fluide visqueux de Bingham**

$$(35) \quad T = - p \mathbf{1} + k \frac{D}{|D|} + 2 \mu D \quad \alpha = k + 2 \mu |D|$$

L'inversion de cette loi donne :

$$D = \frac{1}{2 \mu} \langle |T^D| - k \rangle \frac{T^D}{|T^D|} \quad \langle a \rangle = \begin{cases} a & \text{si } a \geq 0 \\ 0 & \text{si } a < 0 \end{cases}$$

$$T_{ij}^D = T_{ij} - \frac{T_I}{3} \delta_{ij} \quad T_I = \text{tr } T \Rightarrow \text{Tr } T^D = 0$$

Où  $T^D$  représente le déviateur des contraintes. C'est un fluide visqueux avec seuil car la vitesse de déformation est nulle pour  $|T^D| \leq k$ .

Cette loi de comportement est souvent utilisée pour étudier **l'écoulement du goudron** ou des **pâtes**. (genre dentifrice !)

c. **Fluide visqueux de Norton-Hoff**

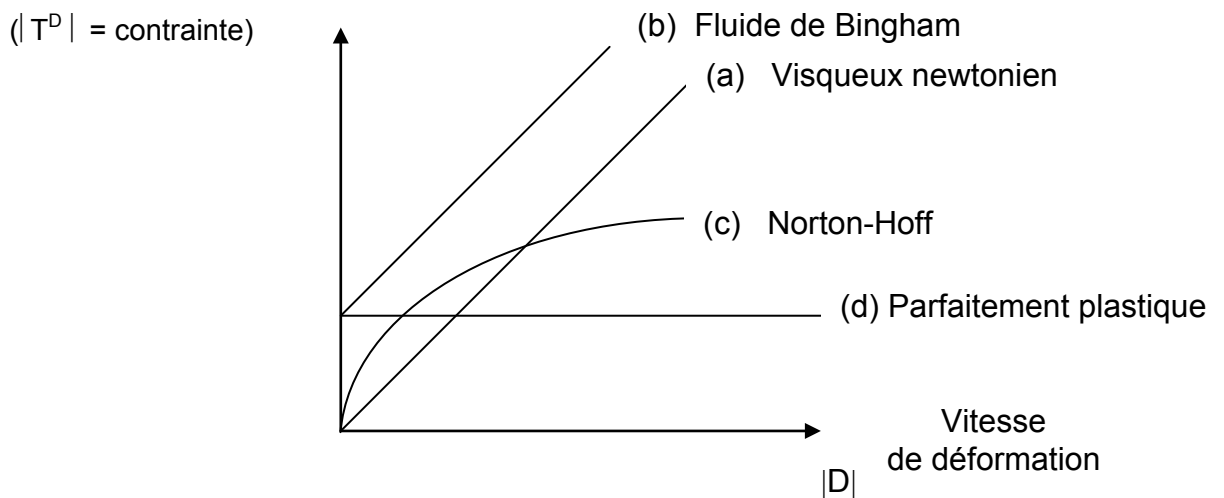
$$T = -p1 + k |D|^m \frac{D}{|D|} \quad \begin{cases} \alpha = k |D|^m \\ \mu = \frac{1}{2} k |D|^{m-1} \end{cases} \quad \text{où} \quad D = k |T^D|^{1/m} \frac{T^D}{|T^D|}$$

La loi de comportement souvent utilisée pour décrire la **mise en forme** des métaux à **hautes températures**. Elle généralise aux grandes déformations la loi de Norton où la vitesse de déformation permanente est une fonction de la contrainte :  $\sigma = \lambda \dot{\epsilon}^{1/N}$  en uniaxial.

d. **Fluide visqueux parfaitement plastique de type Von Mises**

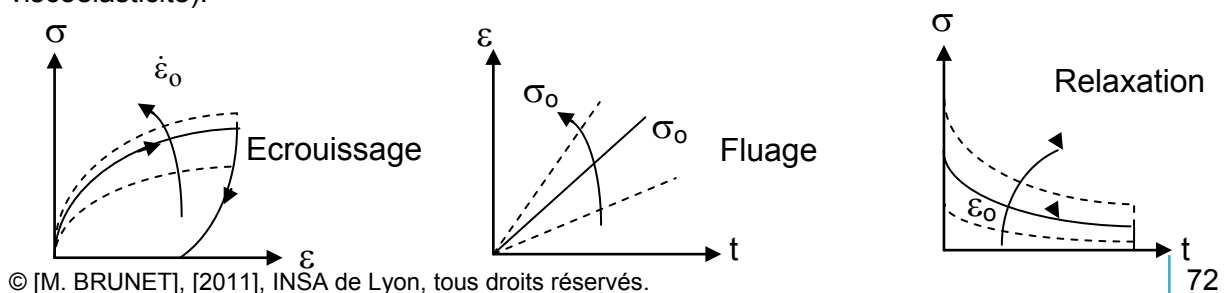
$$(36) \quad T = -p1 + k \frac{D}{|D|} \quad \alpha = k$$

**Parfaitement plastique** signifie qu'il n'y a pas d'écroissage au sens de "durcissement". C'est un matériau caractérisé par la condition suivante :  $|T^D| = \sqrt{T_{ij}^D T_{ij}^D} = k$  qui correspond au critère de Von Mises (voir chapitre 5 pour l'élasto-plasticité). Ces 4 comportements sont schématisés sur le diagramme ci-dessous :



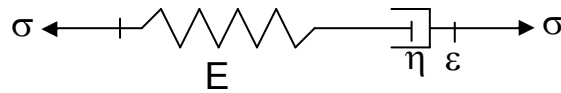
**3.4 LOIS DIFFERENTIELLES**

Pour les milieux où il y a écoulement pour toute valeur de contrainte avec les allures suivantes en essais uniaxiaux (**rhéologie**, voir exemples paragraphe 3.4.5 sur la viscoélasticité):





En petites déformations, il arrive souvent que la loi de comportement ne donne pas la contrainte mais **le taux de contrainte**  $\dot{\sigma}$ . C'est, par exemple le cas du modèle de Maxwell :



$$\dot{\varepsilon} = \frac{\dot{\sigma}}{E} + \frac{\sigma}{\eta} \quad \rightarrow \quad \dot{\sigma} = E \left( \dot{\varepsilon} - \frac{\sigma}{\eta} \right) \Rightarrow \sigma = E \varepsilon_0 \exp \left( - \frac{E}{\eta} t \right)$$

qu'on développera un peu plus loin dans ce paragraphe.

C'est aussi celui des **matériaux élasto-viscoplastiques** lorsque la loi de comportement est écrite sous forme incrémentale (voir Chapitre 4 et 5)

On écrira donc en **grandes déformations** :  $\dot{T} = T(F, \dot{F}, T) = T(F, L, T)$ . Mais il se pose alors un problème primordial.

Supposons que  $M$  soit un **tenseur objectif** :

$$M' = Q M Q^T$$

$$\dot{M}' = \dot{Q} M Q^t + Q \dot{M} Q^t + Q M \dot{Q}^t$$

$$= Q \dot{M} Q^t + \Omega M' - M' \Omega \quad \text{car} \quad \Omega = \dot{Q} Q^T = - Q \dot{Q}^T$$

Donc  $\dot{M}'$  n'est pas un tenseur objectif. La **dérivée par rapport au temps d'un tenseur objectif n'est pas un tenseur objectif**.

Pour pouvoir écrire des **lois différentielles objectives**, il faudra donc utiliser des dérivées objectives, c'est-à-dire introduire des dérivées par rapport au temps éliminant les rotations parasites. Il est, en effet, clair que le **terme  $\Omega M' - M' \Omega$**  provient de la rotation relative des deux référentiels et n'a rien à voir avec la variation de  $M$ . Si, par exemple, le tenseur des contraintes est constant dans un solide au repos, sa dérivée sera non nulle dans un repère tournant par rapport au solide. C'est une **rotation indésirable** qu'il faut **éliminer**.

### 3.4.1 Dérivées convectives

Pour construire les **dérivées objectives**, l'idée consiste à éliminer les rotations parasites en dérivant le tenseur dans un repère plus ou moins **lié à la matière**.

#### 3.4.1.1 Dérivée convective contravariante

L'idée la plus simple consiste à dériver le tenseur  $M$  dans le repère matériel  $G_j$  introduit au 2ème chapitre. On va définir la dérivée convective contravariante  $M^c$  de  $M$  par :

$$(37) \quad M = M^{ij} \vec{G}_i \otimes \vec{G}_j$$

$$M^c = \dot{M}^{IJ} \vec{G}_I \otimes \vec{G}_J$$

Or  $\vec{G}_I = F_I^K \vec{e}_k$ , donc  $M = F_k^i F_L^j M^{KL} \vec{e}_i \otimes \vec{e}_j$

On peut donc écrire finalement :

$$M^{ij} = F_k^i F_L^j M^{KL}$$

$$(M^c)^{ij} = F_k^i F_L^j \dot{M}^{KL}$$

$$(38) \quad (M^c)^{ij} = F_k^i F_L^j \left( F_m^{-1K} F_n^{-1L} M^{mn} \right)^{\bullet} = F \dot{M}^o F^T$$

Une autre manière de faire, consiste à introduire le tenseur **lagrangien**  $M^o$  (transporté convectif contravariant de  $M$  dans  $C_o$ ) défini par  $M = F M^o F^T$ .

Cette forme généralise le transport convectif contravariant  $\vec{V} = F \vec{V}_o$  d'un vecteur  $\vec{V}$ . Par exemple le second tenseur de Piola Kirchoff  $S$  est le transporté convectif contravariant du tenseur de Kirchoff  $\tau$ .  $\tau = F S F^T$

On définit alors aussi la dérivée convective contravariante  $M^c$  d'un tenseur  $M$  par :

$$(39) \quad M^c = F \dot{M}_o F^T = F \left( F^{-1} \dot{M} F^{-1t} \right)^{\bullet} F^T$$

Cette forme tensorielle est équivalente à la forme matricielle donnée plus haut. Pour expliciter (39) on remarque que :

$$\left( F F^{-1} \right)^{\bullet} = \dot{1} = 0 = F \left( F^{-1} \right)^{\bullet} + \left( \dot{F} \right) F^{-1}$$

donc  $\left( F^{-1} \right)^{\bullet} = - F^{-1} \dot{F} F^{-1}$  et donc  $\left( F^{-1t} \right)^{\bullet} = - F^{-1T} \dot{F}^T F^{-1T}$

donc  $M^c = F \left[ \left( F^{-1} \right)^{\bullet} M F^{-1T} + F^{-1} \dot{M} F^{-1T} + F^{-1} M \left( F^{-1T} \right)^{\bullet} \right] F^T$

$$M^c = - \dot{F} F^{-1} M + \dot{M} - M F^{-1t} \dot{F}^t$$

Or  $\dot{F} F^{-1} = L$  Donc on obtient la formulation :

$$(40) \quad \boxed{M^c = \dot{M} - L M - M L^T}$$

On vérifie directement que si  $M$  est objectif alors  $M^c$  l'est aussi. Nous avons ainsi défini une dérivée objective. On vérifie (exercice) qu'on a bien :

$$M'^c = -L'M' - M'L'^T + \dot{M}' = Q M^c Q^T$$

3.4.1.2 Dérivée convective covariante

On peut également considérer les composantes matérielles de M dans le repère  $\vec{G}^I$  et définir la dérivée convective covariante  $M_c$  de M par :

$$(41) \quad M = M_{IJ} \vec{G}^I \otimes \vec{G}^J \quad \text{et} \quad M_c = \dot{M}_{IJ} \vec{G}^I \otimes \vec{G}^J$$

Introduisons alors le tenseur  $M_o$ , transporté convectif covariant de M ;  $M_o = F^t M F$ . Par exemple le tenseur  $\dot{E}$ , dérivé par rapport au temps du tenseur des déformations de Green Lagrange est le transporté convectif covariant du tenseur des taux de déformations D,  $\dot{E} = F^T D F$ . On définit d'une autre façon la dérivée convective covariante de M par :

$$(42) \quad M_c = F^{-1T} \dot{M}_o F^{-1} = F^{-T} \left( F^T M F \right)^{\bullet} F^{-1}$$

Un calcul analogue à celui de la dérivée convective contravariante nous donne l'expression de la dérivée convective covariante :

$$(43) \quad \boxed{M_c = \dot{M} + L^T M + M L}$$

C'est aussi une dérivée objective. Il faut remarquer que l'on peut définir autant de dérivées objectives que l'on peut définir de transports de C dans  $C_o$ .

**Exemple : Dérivée de Truesdell**

On introduit le transport qui permet de passer du tenseur de Cauchy T au second tenseur de Piola Kirchoff S.

Cela conduit à la dérivée de Truesdell déjà vue au chapitre 2 :

$$(44) \quad M^{TRU} = \frac{1}{J} F \left( J F^{-1} M F^{-1T} \right)^{\bullet} F^T$$

Sachant que :  $\dot{J} = J \operatorname{tr} \left( \dot{F} F^{-1} \right) = J \operatorname{tr} D$

On aboutit à l'expression de la dérivée de Truesdell :

$$(45) \quad \boxed{M^{TRU} = \dot{M} - L M - M L^T + M \operatorname{tr} D}$$

L'avantage de ces dérivées est qu'elles sont indépendantes de la configuration de référence choisie.

3.4.2 Dérivée de Jaumann et référentiel corotationnel

On peut également dériver dans un **repère orthonormé** ce qui est avantageux mais qui ne pourra donc suivre que la rotation du milieu continu. L'idée la plus simple consiste à choisir le **référentiel qui suit la rotation** R. On définit dans le transport par rotation :

$$(46) \quad M_o = R^T M R \quad \text{et} \quad M = R M_o R^T$$

Et la dérivée objective  $M^R$  par :

$$(47) \quad M^R = R \left( R^T \dot{M} R \right)^{\bullet} R^T$$

Ce **transport par rotation** est défini de manière unique, mais la dérivée ainsi construite présente deux inconvénients majeurs :

☞ Il est difficile de calculer  $\dot{R}$ .

☞ La dérivée dépend essentiellement de la configuration de référence  $C_0$  choisie.

Nous allons donc choisir une configuration de référence particulière : la configuration actuelle  $C(t)$ . Ainsi nous travaillons en description **lagrangienne réactualisée**. La dérivée de Jaumann  $M^J$  est alors définie par :

$$(48) \quad M^J = \left\{ R_{t_0}^T(t) \frac{\partial}{\partial t} \left[ R_{t_0}^T(t) M(t) R_{t_0}(t) \right] R_{t_0}^T(t) \right\}$$

Un calcul similaire aux précédents, s'appuyant sur les formules données au § 2.3.2, donne l'expression de  $M^J$ .

$$(49) \quad \boxed{M^J = \dot{M} - W M + M W}$$

On vérifiera (exercice) que cette expression (49) est bien objective. et contrairement aux dérivées convectives, elle permet d'écrire :

$$(50) \quad f^J = \frac{\partial f}{\partial M} : M^J \quad \text{et} \quad (\text{tr}(M))^J = \text{tr}(M^J)$$

Une autre manière d'introduire cette dérivée consiste à définir le « référentiel corotationnel ».

### Référentiel corotationnel

Un référentiel corotationnel est, par définition, un référentiel dans lequel le tenseur taux de rotation  $W$  est identiquement nul. C'est un référentiel  $\hat{R}$  défini par :  $\hat{x}(t) = \hat{Q}(t) \vec{x}$  t.q.  $\hat{W} = 0$ . On a alors :  $\hat{L} = \hat{D}$

Vecteurs de base corotationnels :

$$\begin{aligned} \hat{e}(\tau) &= \hat{Q}^T(\tau) e(\tau) \\ \dot{\hat{e}}(\tau) &= \dot{\hat{Q}}^T(\tau) e(\tau) = W(\tau) \vec{\hat{e}}(\tau) \\ \Rightarrow \dot{\hat{Q}}^T &= W \hat{Q}^T \end{aligned}$$

Pour un mouvement  $F(\tau)$  donné, le référentiel corotationnel, qui, à l'instant  $t_0$  coïncide avec le référentiel d'observation, s'obtiendra par intégration du système :

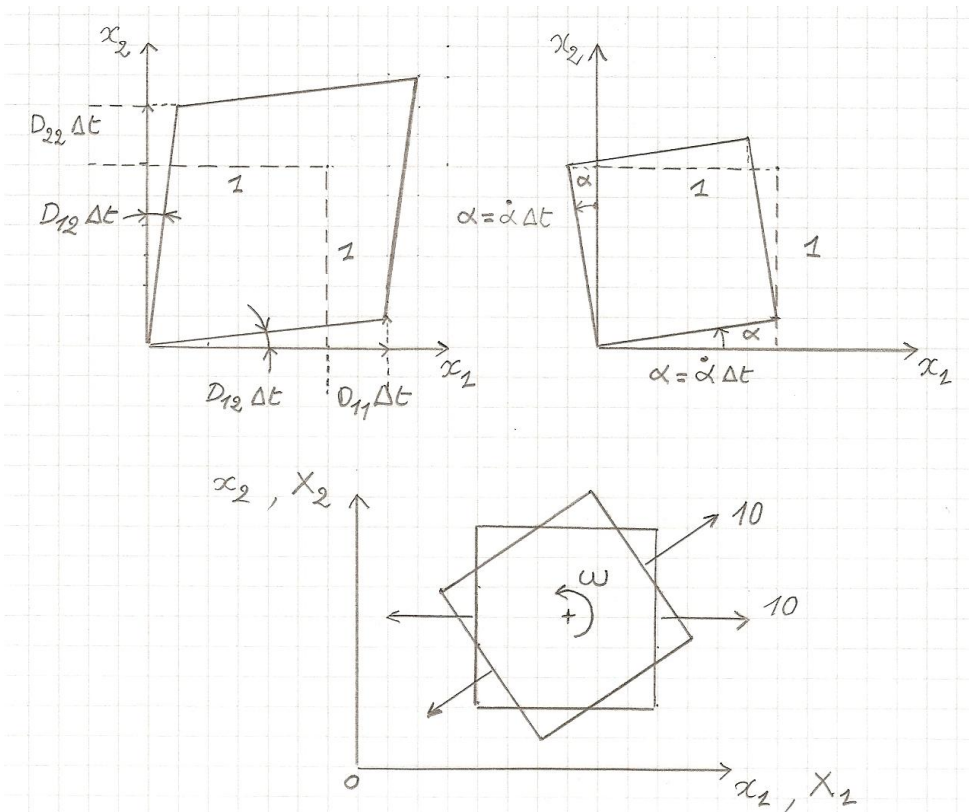
$$(51) \quad \begin{cases} \dot{\hat{Q}}(\tau) = -\hat{Q}(\tau) W(\tau) & (W^T = -W) \\ \hat{Q}(t_0) = 1 \end{cases}$$

La **dérivée de Jaumann** est la dérivée de  $M$  dans  $\hat{R}$ , ou transportée de  $\frac{d}{dt} \hat{M}$  dans  $R$ .

Soit :

$$(52) \quad \begin{cases} M^J = \hat{Q}^T(t) \left[ \frac{d}{dt} \hat{M}(t) \right] \hat{Q}(t) \\ M^J = \dot{\hat{M}}(t) = \hat{Q}^T(t) \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \hat{Q}(\tau) M(\tau) \hat{Q}^T(\tau) \right\}_{\tau=t} \hat{Q}(t) \end{cases}$$

Exemple :



L'élément carré ci-dessus est soumis à  $t=0$  à une contrainte vraie unique  $T_{11}=10\text{Mpa}$  **constante** et **tourne** comme un solide rigide à la vitesse angulaire  $\omega$  de  $0$  à  $90^\circ$ . On va vérifier ce que donne **l'intégration explicite** en **plusieurs pas** de la relation (49) pour avoir l'état de contrainte vrai à  $90^\circ$  par rapport aux axes fixes. Les états de contrainte à  $0^\circ$  et à  $90^\circ$  sont :

$$T^{0^\circ} = 10 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{on doit obtenir} \quad T^{90^\circ} = 10 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

comme il n'y a pas de loi de comportement (contrainte constante) on a  $T^J = 0$  et la dérivée matérielle de Cauchy est donnée par la relation :

$$\dot{T} = W \cdot T - T \cdot W = \frac{T^{t+\Delta t} - T^t}{\Delta t}$$

Soit :

$$T^{t+\Delta t} = T^t + W \Delta t \cdot T - T \cdot W \Delta t$$

$$T^{t+\Delta t} = T^t + \begin{bmatrix} 0 & -\alpha \\ \alpha & 0 \end{bmatrix} \cdot T^t - T^t \begin{bmatrix} 0 & -\alpha \\ \alpha & 0 \end{bmatrix} \quad \text{avec} \quad \alpha = \frac{\pi}{2n} \quad n \text{ le nombre de pas}$$

car le **taux de rotation** en 2D (voir figure) est égal à :

$$W_{12} = \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial u_1}{\partial x_2} - \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right] = -\dot{\alpha} \quad \alpha = \dot{\alpha} \Delta t$$

On obtient en fonction du **nombre de pas d'intégration** :

n=10

$${}^{10}T = 10 \begin{bmatrix} -0.304 & 0.06 \\ 0.06 & 1.304 \end{bmatrix}$$

n=50

$${}^{50}T = 10 \begin{bmatrix} -0.052 & 0.002 \\ 0.002 & 1.052 \end{bmatrix}$$

n=150

$${}^{150}T = 10 \begin{bmatrix} -0.017 & 0.0002 \\ 0.0002 & 1.017 \end{bmatrix}$$

n=500

$${}^{500}T = 10 \begin{bmatrix} -0.005 & 0.00002 \\ 0.00002 & 1.005 \end{bmatrix}$$

On constate bien le **caractère différentiel** ou de « **type taux** » des relations précédentes qui nécessite un **nombre de pas d'intégration important** pour atteindre la **solution exacte** d'une **transformation finie**.

### 3.4.3 Lois de type taux

La forme générale de ces lois est :

$$(53) \quad \dot{T} = f(T, F, L)$$

#### Condition d'objectivité

On aboutit alors à la forme lagrangienne objective :

$$(54) \quad \dot{S} = s(S, E, \dot{E})$$

Pour étendre aux **grandes déformations** une loi donnée en **petites déformations**, il est toujours possible de le faire naïvement en remplaçant  $\sigma$  par le deuxième tenseur de Piola-Kirchoff S et  $\varepsilon$  par le tenseur des déformations de Green-Lagrange E. Malheureusement, si elle est licite du point de vue de l'objectivité, cette règle conduit souvent à des comportements déraisonnables. Considérons par exemple un modèle de Maxwell incompressible dont la loi de comportement en petites déformations (voir plus loin les détails) est :

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = \dot{\mathcal{E}}_{ij} = \frac{\dot{s}_{ij}}{G} + \frac{s_{ij}}{\eta} \quad (s_{ij} = \sigma_{ij}^D) \quad \text{Déviateur de } \sigma$$

La loi correspondante en grandes déformations (D pour déviateur):

$$\dot{E} = \frac{1}{G} \dot{S}^D + \frac{1}{\eta} S^D$$

est **objective mais aberrante**, car la condition  $\text{tr } E = 0$  ne correspond pas à l'incompressibilité, en particulier le volume pourra s'annuler pour un effort fini. On en arrive donc à introduire une formulation eulérienne isotrope :

$$(55) \quad T^J = t_1 (T, B, D) \quad , \quad T^c = t_2 (T, B, D)$$

ou  $T_c = t_3 (T, B, D)$

où  $t$  est une fonction isotrope. Ces trois formes sont équivalentes, et, plus généralement on pourra écrire :

$$\text{où } (56) \quad \begin{cases} T^{(\alpha)} = t_\alpha (T, B, D) \\ M^{(\alpha)} = M^J + \alpha (D M + M D) \end{cases}$$

définit une **dérivée objective**, car le groupement  $(DM + MD)$  est **objectif** :

$$\begin{aligned} (D' M' + M' D') &= Q [DM + MD] Q^T \\ \text{avec } \begin{cases} \alpha = 1 & M^\alpha = M^c \\ \alpha = 0 & M^\alpha = M^J \\ \alpha = -1 & M^\alpha = M_c \end{cases} \end{aligned}$$

En particulier un fluide incompressible de Maxwell peut être défini en déviateur par :

$$D = \left( \frac{1}{G} T^J + \frac{1}{\eta} T \right)^D \quad \text{tr } D = 0$$

### 3.4.4 Hypoélasticité

Pour étendre aux **grandes déformations** une loi élastique écrite sous **forme incrémentale** en petites déformations :

$$\dot{\sigma}_{ij} = A_{ijkl} \dot{\epsilon}_{kl} \quad \dot{\sigma} = A \dot{\epsilon}$$

on peut écrire :  $\dot{S} = A \dot{E}$  de  $S_{IJ} = A_{IJKL} E_{KL}$

et cette forme est même **la seule possible dans le cas anisotrope**.

En général on préfère, dans le cas isotrope, une écriture eulérienne :

$$(57) \quad T^J = A [D] = \lambda (\text{tr } D) 1 + 2\mu D \quad \text{où } \lambda \text{ et } \mu \text{ constantes élastiques de Lamé.}$$

Plus généralement, un matériau hypoélastique sera défini par la loi de comportement suivante :

$$T^J = A (T) [D] \quad T_{ij}^J = A_{ijkl} (T) D_{kl}$$

Elle permet de calculer, pour une histoire de déformation donnée  $F(\tau)$ , le tenseur des contraintes  $T(t)$  par **intégration du système différentiel** résultant. Réciproquement, le comportement d'un **matériau hypoélastique** présente certains caractères élastiques. En particulier, il est **réversible** et indépendant des vitesses de sollicitations mais il ne

correspondra pas en général à un comportement élastique intégrable. Pour une valeur donnée de la déformation  $F(t)$ , les contraintes  $T(t)$  **dépendront du trajet de chargement** suivi pour y arriver (voir chapitre 2 sur l'intégrale du taux de déformation). Mais ce type de comportement est fréquemment utilisé en association avec la plasticité en raison de sa simplicité. Si on revient à la forme (57), extension apparemment naturelle de la loi de Hooke, on obtient un comportement satisfaisant en **déformation triaxiales** (§ 2.2.4). En effet, la loi s'intègre alors pour donner (le faire en exercice):

$$T = \lambda (\text{tr } h) \mathbf{1} + 2\mu h \quad h = \frac{1}{2} \text{Log } B$$

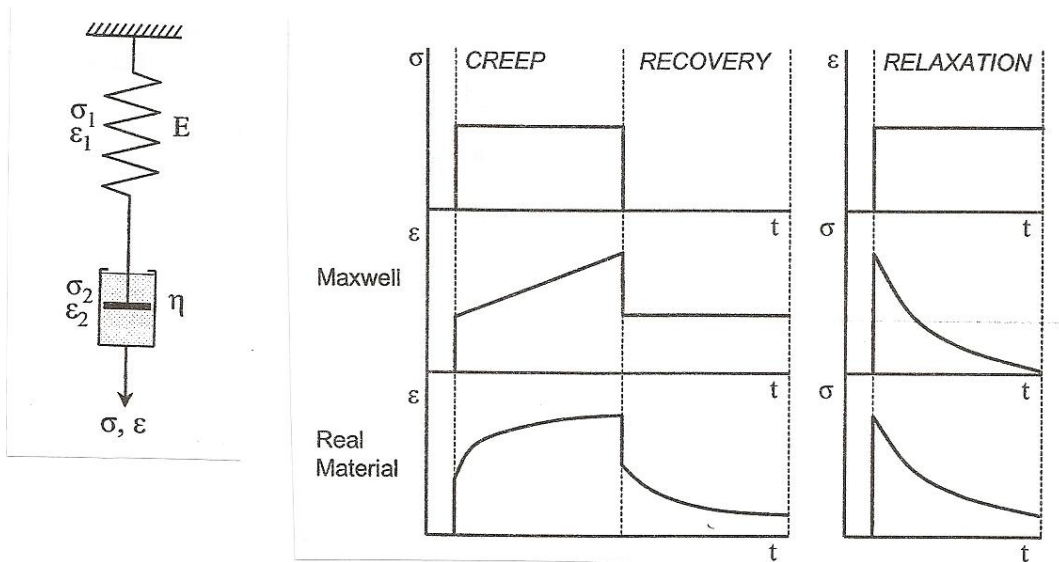
Par contre en glissement simple, un calcul par intégration de (57) montre que (exercice):

$$F = \begin{bmatrix} 1 & \gamma & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad T = \begin{bmatrix} T_{11} & \tau & 0 \\ \tau & T_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \tau = \mu \sin \gamma$$

C'est un comportement **oscillant** physiquement **inadmissible**. Ces oscillations sont liées à l'utilisation de la dérivée de Jaumann, qui n'est donc pas non plus la solution universelle.

### 3.4.5 Viscoélasticité

#### Modèle de Maxwell



En **petites déformations** un modèle **uniaxial** (1D.) de viscoélasticité est une combinaison des **modèles rhéologiques** de base de **Maxwell** et de **Kelvin** qui est parfois appelé le modèle **Standard Linéaire Solide**, c'est-à-dire un ressort et le modèle de Kelvin en série.



L'équation d'équilibre de Maxwell est :  $\dot{\epsilon} = \frac{\dot{\sigma}}{E} + \frac{\sigma}{\eta}$  où la solution en **fluage** c'est-à-dire à

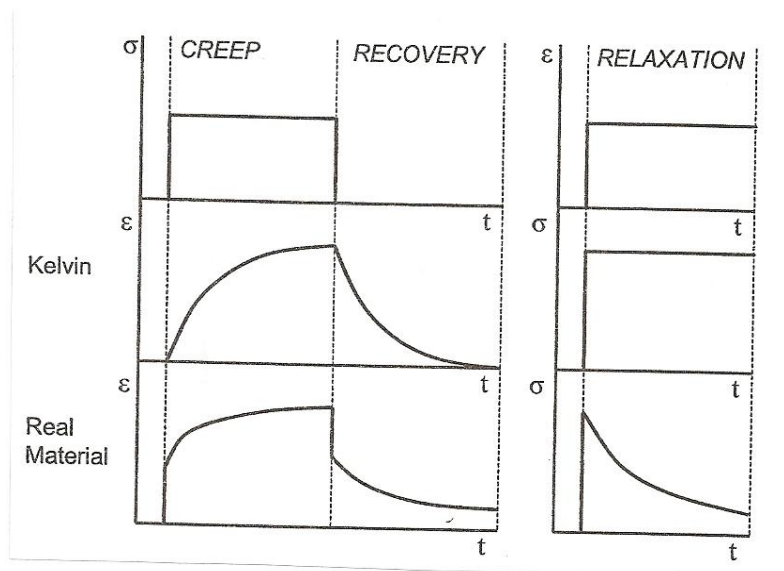
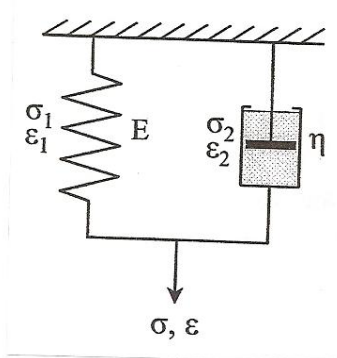
**contrainte constante** est :  $\epsilon = \frac{\sigma_0}{\eta} t + \frac{\sigma_0}{E}$  c'est-à-dire une **fonction compliance** ou

**fluage**  $J(t)$  tel que :  $J(t) = \frac{\epsilon}{\sigma_0} = \frac{1}{E} + \frac{t}{\eta}$  fonction linéaire de t, voir la figure ci-dessus.

La solution en **relaxation** c'est-à-dire à **déformation constante** est  $\sigma = E \cdot \epsilon_0 \exp(-t/\tau)$  où le temps de relaxation est  $\tau = \eta/E$ , la **fonction de relaxation** est  $G(t)$  tel que :

$$G(t) = \frac{\sigma}{\epsilon_0} = E \cdot \exp(-t/\tau)$$

**Modèle de Kelvin**



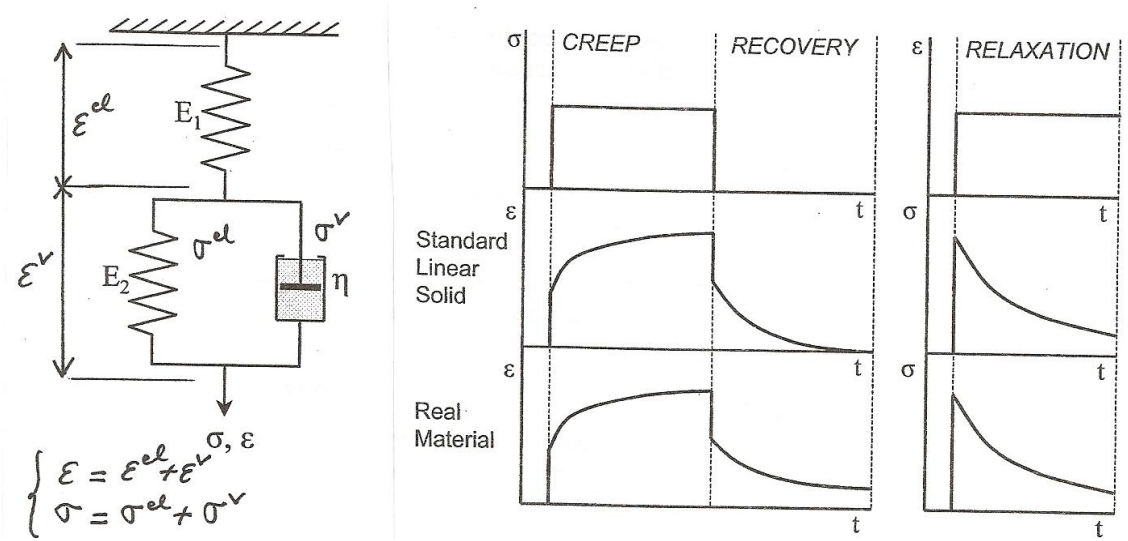
L'équation d'équilibre du modèle de Kelvin est :  $\sigma = E \cdot \epsilon + \eta \cdot \dot{\epsilon}$  où la solution en **fluage à**

**contrainte constante** est  $J(t) = \frac{\epsilon}{\sigma_0} = \frac{1}{E} [1 - \exp(-t/\tau)]$  avec  $\tau = \eta/E$ . On voit

immédiatement qu'il n'y a **pas de relaxation** avec le modèle de Kelvin car à déformation constante  $G(t) = \frac{\sigma}{\epsilon_0} = E$

On voit sur les figures ci-dessus que ni le modèle de Maxwell ni le modèle de Kelvin ne peuvent représenter un comportement viscoélastique réaliste, d'où la combinaison des deux dans le modèle standard linéaire.

Modèle linéaire standard



Si  $E_1$  est le module d'élasticité du ressort de Maxwell en série et si  $E_2$  est le module du ressort en parallèle du dashpot  $\eta$  de Kelvin, l'équilibre s'écrit :

$$\sigma = E_1 \epsilon^{el} = E_2 \epsilon^v + \eta \dot{\epsilon}^v \quad \epsilon = \epsilon^{el} + \epsilon^v \quad \text{et} \quad \dot{\epsilon} = \dot{\epsilon}^{el} + \dot{\epsilon}^v$$

$$\dot{\sigma} = E_1 \dot{\epsilon}^{el} = E_1 (\dot{\epsilon} - \dot{\epsilon}^v)$$

d'où :

$$\sigma = \frac{E_1 E_2}{E_1 + E_2} \epsilon + \frac{\eta E_1}{E_1 + E_2} \dot{\epsilon} - \frac{\eta}{E_1 + E_2} \dot{\sigma}$$

En introduisant la notation la plus commune en viscoélasticité en terme de modules  $G$ , on a:

(58) 
$$\sigma = G_\infty \epsilon + \tau G_0 \dot{\epsilon} - \tau \dot{\sigma}$$

$$G_\infty = \frac{E_1 E_2}{E_1 + E_2}$$

$$G_0 = E_1$$

$$\tau = \frac{\eta}{E_1 + E_2}$$

où on pose :

La réponse en fluage ( $\sigma = \sigma_0$  constante) est :

$$\epsilon = \frac{\sigma_0}{E_1} + \frac{\sigma_0}{E_2} [1 - \exp(-t/\tau')] \quad \text{où} \quad \tau' = \frac{\eta}{E_2} \quad \text{le temp de retard}$$

La réponse en déformation est bien composée d'une déformation instantanée et d'une déformation retardée.

La réponse en relaxation ( $\epsilon = \epsilon_0$  constante) s'écrit :

$$\sigma = G(t) \epsilon_0$$

avec le module de relaxation :  $G(t) = G_\infty + (G_0 - G_\infty) \exp(-t/\tau)$

Le module de relaxation  $G(t)$  évolue de la valeur initiale  $G(0) = G_0 = E_1$  à la valeur relaxée

$$G(\infty) = G_\infty = \frac{E_1 E_2}{E_1 + E_2} \text{ à un temps infini, } \tau \text{ est le temps de relaxation.}$$

**Exemple :** Calcul de la viscosité d'un matériau avec sa courbe de relaxation pour le modèle standard linéaire

Un matériau a un module d'élasticité  $G_0 = E_1 = 1000MPa$  et un module relaxé  $G_\infty = 500MPa$ . Sa contrainte se relaxe de 20MPa à 15MPa en 500 s à déformation constante.

A  $t=0$   $G(0) = G_0 = E_1 = 1000MPa$  et  $\sigma_0 = G_0 \varepsilon_0 = 20MPa$  d'où  $\varepsilon_0 = 0.02$

A  $t = \infty$   $G_\infty = E_1 E_2 / (E_1 + E_2) = 500MPa$  d'où  $E_2 = 1000MPa$

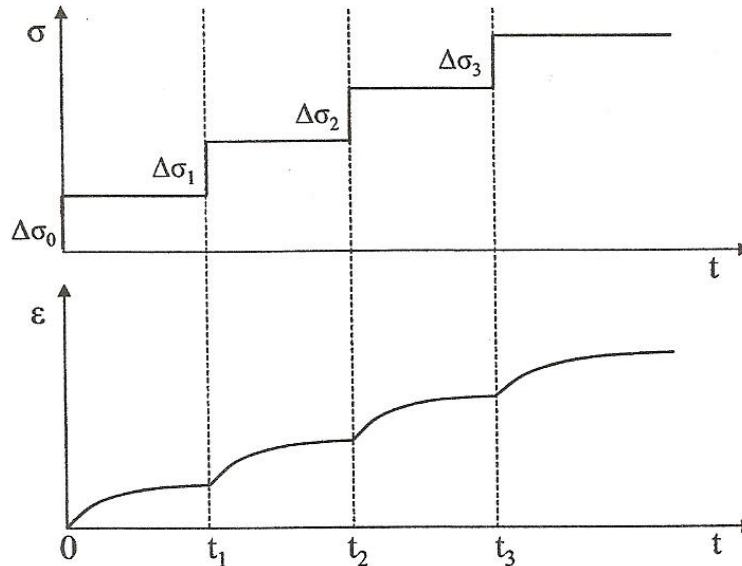
A  $t=500$   $\sigma(500) = G(500) \cdot \varepsilon_0 = 15MPa$

d'où 
$$G(500) = 0.75 = \frac{E_1}{E_1 + E_2} [E_2 + E_1 \exp(-500/\tau)]$$

soit :  $\exp(-500/\tau) = 0.5$  d'où  $\tau = 721s$

et comme la viscosité  $\eta = \tau(E_1 + E_2)$  on a :  $\eta = 1.442 \cdot 10^6 .MPa.s$

**Chargements complexes : principe de superposition de Boltzmann**



**Principe de superposition de Boltzmann**

-La réponse d'un matériau viscoélastique est une fonction de l'histoire complète du chargement.

- Chaque pas de chargement donne une contribution indépendante à la déformation finale qui peut être obtenue par simple addition de chaque contribution de fluage

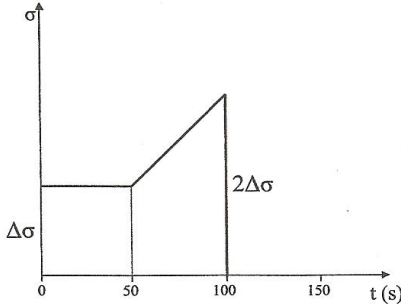
d'où (59) 
$$\varepsilon(t) = \sum_i \Delta\sigma_i J(t - t_i)$$

**Exemple :**

Une contrainte uniaxial est appliquée suivant l'histoire suivante : 20Mpa jusqu'à 50s puis une rampe linéaire jusqu'à 40Mpa pendant 50s suivie d'une décharge à 0 (figure ci-dessous).

On veut la déformation totale à 150s pour un matériau viscoélastique de Kelvin avec les caractéristiques données ci-dessous

**Loading History:**



At t = 0:  $\Delta\sigma = 20 \text{ MPa}$

At t = 100s:  $-2\Delta\sigma = -40 \text{ MPa}$

Ramp load between 50s & 100s

Kelvin model compliance:  

$$J(t) = \frac{1}{E} \cdot [1 - \exp(-t/\tau')]$$
 where  $\tau' = \eta/E = 200\text{s}$

**Boltzmann Superposition Principle gives:**

$$\epsilon(t) = \Delta\sigma \cdot J(150 - 0) - 2\Delta\sigma \cdot J(150 - 100) + \int_{50}^{100} J(150 - \lambda) \frac{d\sigma}{d\lambda} d\lambda$$

**1st Part: Step load ( $\Delta\sigma$ ) & unload ( $2\Delta\sigma$ )**

At t = 150s:  $\epsilon_1 = \Delta\sigma [J(150) - 2J(50)] = \frac{20 \times 10^6}{0.5 \times 10^9} [1 - \exp(-3/4) - 2 + 2\exp(-1/4)]$

ie.  $\epsilon_1 = 0.04 \times 0.085 = \underline{0.341\%}$

**2nd Part: Ramp load**

$$J(150 - \lambda) = \frac{1}{E} \left[ 1 - \exp\left(\frac{\lambda - 150}{\tau'}\right) \right] \quad \& \quad \frac{d\sigma}{d\lambda} = \frac{20 \times 10^6}{50} = 0.4 \times 10^6$$

At t = 150s:  $\epsilon_2 = \frac{d\sigma}{d\lambda} \int_{50}^{100} J(150 - \lambda) d\lambda = \frac{0.4 \times 10^6}{E} \int_{50}^{100} \left[ 1 - \exp\left(\frac{\lambda - 150}{200}\right) \right] d\lambda$

$$= \frac{0.4 \times 10^6}{0.5 \times 10^9} \left[ \lambda - 200 \exp\left(\frac{\lambda - 150}{200}\right) \right]_{50}^{100}$$

ie.  $\epsilon_2 = 8 \times 10^{-4} [100 - 200 \exp(-1/4) - 50 + 200 \exp(-1/2)] = \underline{1.24\%}$

At t=150s, total strain =  $\epsilon_1 + \epsilon_2 = \boxed{1.58\%}$

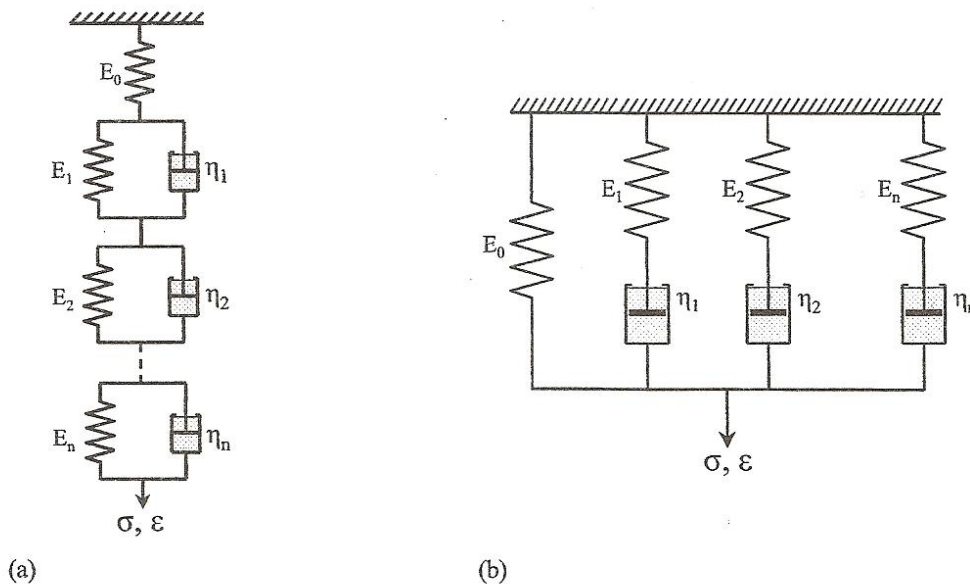
Pour des chargements variant de manière continue la généralisation en **fluage** est :

$$\epsilon(t) = \int_{-\infty}^t J(t - \lambda) \frac{d\sigma(\lambda)}{d\lambda} d\lambda$$

De la même façon une réponse en **relaxation** pour un trajet de déformation complexe est :

$$\sigma(t) = \int_{-\infty}^t G(t - \lambda) \frac{d\varepsilon(\lambda)}{d\lambda} d\lambda$$

**Comportement réel et modèles multiples**



La **complexité** du comportement **réel** des matériaux viscoélastiques tel que les **polymères** fait qu'il est souvent nécessaire de « **multiplier** » les modèles de base.

Ainsi le schéma (a) de la figure ci-dessus avec un ressort et des **modèles de Kelvin** en **série** donne la fonction fluage ou compliance avec :

$$J(t) = \frac{1}{E_0} + \sum_{i=1}^n \frac{1}{E_i} [1 - \exp(-t/\bar{\tau}_i)] \quad \text{où} \quad \bar{\tau}_i = \eta_i / E_i$$

avec la possibilité d'une généralisation continue de la forme:

$$J(t) = \frac{1}{E_0} + \int_0^{\infty} [1 - \exp(-t/\bar{\tau})] j(\bar{\tau}) d\bar{\tau}$$

De même la multiplication en **parallèle** des schémas de Maxwell (figure b) donne la généralisation en continue de la fonction relaxation sous la forme :

$$G(t) = G_{\infty} + \int_0^{\infty} \exp(-t/\tau) . g(\tau) d\tau$$

**Généralisation 3D. (codes de calculs)**

Le domaine est vaste et relativement complexe avec l'extension aux grandes déformations (hyper-viscoélasticité), chaque code de calcul proposant ses lois de comportement viscoélastique sous des formes sensiblement différentes mais ce paragraphe donne la base commune

En général l'expression (58) du modèle standard est généralisée en déviateur des contraintes et des déformations, l'intégration du système différentiel pouvant être explicite ou implicite

Ainsi :

$$(60) \quad \boxed{\dot{s}_{ij} + \frac{1}{\tau} s_{ij} = G_0 \dot{e}_{ij} + \frac{G_\infty}{\tau} e_{ij}} \quad \text{où} \quad s_{ij} = \sigma_{ij} - \frac{\sigma_{kk}}{3} \delta_{ij} \quad \text{et} \quad e_{ij} = \varepsilon_{ij} - \frac{\varepsilon_{kk}}{3} \delta_{ij}$$

avec la **relation auxiliaire** impliquant la **partie volumétrique** et le **module de compressibilité** élastique K (« bulk modulus) pour le calcul final des contraintes  $\sigma_{ij}$

$$p = -K\varepsilon_v \quad K = \frac{E}{3(1-2\nu)}$$

Une généralisation simple aux grandes déformations de (60) est possible si la déformation **instantanée élastique** est **petite** avec les **déviateurs** du taux de déformation et la dérivée de Jaumann du déviateur de Cauchy (entre autres) :

$$(61) \quad \boxed{(\mathbf{T}_{ij}^D)^J + \frac{1}{\tau} \mathbf{T}_{ij}^D = G_0 \mathbf{D}_{ij}^D + \frac{G_\infty}{\tau} \int_0^t \mathbf{D}_{ij}^D dt}$$

Comme précédemment, la pression hydrostatique est déterminée avec la **partie volumétrique** et le « Bulk modulus » K élastique :

$$p = -K\varepsilon_v \quad \text{et} \quad \varepsilon_v = \ell n \frac{V}{V_0}$$

mais pas nécessairement, on peut considérer également la partie volumétrique différentielle.

D'une manière plus générale, on peut avoir les expressions des modules de relaxation représentées par des fonctions sous forme de séries dites de **Prony**:

$$g(t) = \sum_{m=1}^N G_m \exp(-\beta_m t) \quad k(t) = \sum_{m=1}^N K_m \exp(-\beta_m t)$$

La réponse 3D. en relaxation petite déformation s'écrit :

$$\boxed{\sigma_{ij} = \int_0^t g_{ijkl}(t-\tau) \frac{\partial \varepsilon_{kl}}{\partial \tau} d\tau}$$

✶ Remarque : Le comportement viscoélastique en particulier des **polymères** est un domaine **très vaste**.

### 3.5 FLUIDES VISQUEUX NON-NEWTONIENS (Exemples)

Le **fluide visqueux newtonien**, modèle de base de la mécanique des fluides, décrit assez mal le comportement réel de certains fluides **très visqueux** (**Polymères** en fusion, le **sang**, les matériaux **pâteux**, les **bitumes à chaud**, les **huiles** sous certaines conditions extrêmes rencontrées en lubrification ...etc ). Ceci se traduit par un certain nombre d'effets

inexplicables par le modèle newtonien, regroupés habituellement sous le terme d'«effets Poynting».

Nous allons simplement présenter ici les cas **particuliers de base** de la mécanique des **fluides non-newtoniens** qui sont à la **frontière** entre les **solides** et les **fluides**. Nous considérerons des fluides **incompressibles**, définis de manière générale par la loi de comportement suivante :

$$(62) \quad T(t) = -p \mathbf{1} + T \{U_t(\tau)\}$$

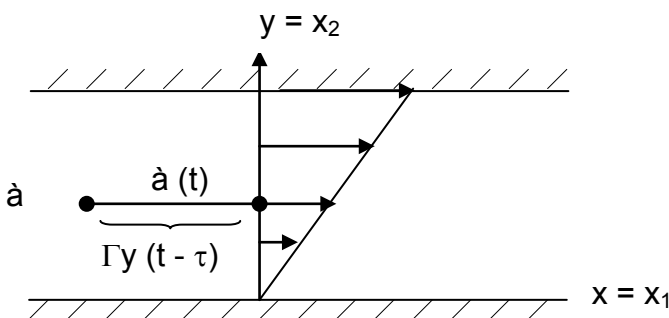
où le **modèle newtonien** se réduit à :  $T = -p \mathbf{1} + 2 \mu D$   $D$  taux de déformation.  $U_t(\tau)$  est tenseur des déformations pures relatif avec une fonctionnelle de réponse **isotrope** :

$$(63) \quad T \{Q U_t(\tau) Q^T\} = Q T \{U_t(\tau)\} Q^T$$

Nous allons illustrer (62) sur des cas bien connus de la mécanique des fluides. Ceci constitue aussi des **exercices d'application** de la **théorie** vue dans les chapitres précédents.

### 3.5.1 Contraintes viscométriques

- **Ecoulement de glissement simple permanent entre 2 parois**



Il est défini par le vecteur vitesse :  $\vec{V} = \Gamma y \vec{e}_x$   
 ( $\Gamma$  constante est le taux de glissement)

$$\Gamma = \frac{\gamma}{dt}$$

L'écoulement est **stationnaire** et **uniforme**.

Dans la **description Eulérienne** nous considérons une **particule** du fluide ( $\tau \leq t$ ) :

$$\text{A l'instant } t \quad \vec{x}_t \begin{cases} x \\ y \\ z \end{cases} \quad \text{à l'instant } \tau \quad \vec{x}_\tau \begin{cases} x - \Gamma y (t - \tau) \\ y \\ z \end{cases}$$

On détermine ainsi le tenseur **gradient de déformation relative**  $F_t(\tau) = \frac{\partial \vec{x}_\tau}{\partial \vec{x}_t}$

$$d \vec{x}_\tau = F_t(\tau) d \vec{x}_t \quad \text{et} \quad d \vec{x}_\tau \begin{cases} dx - \Gamma (t - \tau) dy \\ dy \\ dz \end{cases}$$

d'où 
$$F_t(\tau) = \begin{bmatrix} 1 & -\Gamma(t-\tau) & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad F_t^{-1}(\tau) = \begin{bmatrix} 1 & \Gamma(t-\tau) & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

★ Remarque : on peut aussi calculer le tenseur gradient de vitesse :  $L_t(\tau) = \dot{F} F^{-1}$

$$\dot{F}_t(\tau) = \begin{bmatrix} 0 & \Gamma & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = L \quad \text{et résoudre le système} \quad \begin{cases} \left(\frac{d}{d\tau} F_t\right) F_t^{-1} = L \\ F_t(t) = 1 \end{cases}$$

dont la solution générale est :  $F_t(\tau) = \exp [L (t - \tau)]$

- Le tenseur de **Cauchy-Green droit relatif** s'écrit en posant  $s = t - \tau$  :

$$(64) \quad C_t(\tau) = U_t(\tau)^2 = F_t^T(\tau) F_t(\tau) = \begin{bmatrix} 1 & -\Gamma s & 0 \\ -\Gamma s & 1 + \Gamma^2 s^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Seul le **taux de glissement  $\Gamma$**  intervient dans  $C_t(\tau)$ . On en déduit que  $T(t) = -p \mathbf{1} + \tilde{T}(\Gamma)$  avec :

$$(65) \quad \tilde{T} = \begin{bmatrix} \tilde{T}_{11}(\Gamma) & \tilde{T}_{12}(\Gamma) & \tilde{T}_{13}(\Gamma) \\ & \tilde{T}_{22}(\Gamma) & \tilde{T}_{23}(\Gamma) \\ & & \tilde{T}_{33}(\Gamma) \end{bmatrix}$$

soit 6 fonctions ne dépendant que de  $\Gamma$ . Ces 6 fonctions vont se réduire à 3 :

$$\tilde{T}_{13} = \tilde{T}_{23} = 0$$

Car en utilisant la **relation d'isotropie**  $T\{Q U_t Q^T\} = Q T\{U_t\} Q^T$  et la matrice de rotation  $Q$  autour de  $\vec{x}_3$  :

$$Q = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

On a pour une matrice quelconque  $H$  :

$$\text{Si } H = \begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} & H_{13} \\ H_{21} & H_{22} & H_{23} \\ H_{31} & H_{32} & H_{33} \end{bmatrix} \quad \text{alors } Q H Q^T = \begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} & -H_{13} \\ H_{21} & H_{22} & -H_{23} \\ -H_{31} & -H_{32} & H_{33} \end{bmatrix}$$

On doit avoir d'après la condition d'isotropie (64) et la forme de  $Q$  :  $Q U_t Q^T = U_t$

Alors comme :  $T\{Q U_t Q^T\} = Q T\{U_t\} Q^T$

$$T\{U_t\} = Q T\{U_t\} Q^T$$

Soit :

$$\begin{bmatrix} \tilde{T}_{11} & \tilde{T}_{12} & \tilde{T}_{13} \\ & \tilde{T}_{22} & \tilde{T}_{23} \\ & & \tilde{T}_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{T}_{11} & \tilde{T}_{12} & -\tilde{T}_{13} \\ & \tilde{T}_{22} & -\tilde{T}_{23} \\ & & \tilde{T}_{33} \end{bmatrix}$$

d'où nécessairement :

$$\Rightarrow \tilde{T}_{13} = \tilde{T}_{23} = 0$$



- La **pression hydrostatique est arbitraire** : on choisit un des trois termes de la diagonale, par exemple  $\tilde{T}_{33} = -p$  :

On pose contrainte de Cauchy 
$$T = \begin{bmatrix} -p + N_1(\Gamma) & \tau(\Gamma) & 0 \\ \tau(\Gamma) & -p + N_2(\Gamma) & 0 \\ 0 & 0 & -p \end{bmatrix}$$

Avec :

$$(66) \quad \begin{cases} \tau(\Gamma) = T_{12}(\Gamma) \\ N_1(\Gamma) = T_{11}(\Gamma) - T_{33}(\Gamma) \\ N_2(\Gamma) = T_{22}(\Gamma) - T_{33}(\Gamma) \end{cases}$$

Dans un écoulement de glissement simple, cette forme des contraintes de Cauchy T résume la loi du comportement.

$\tau(\Gamma)$ ,  $N_1(\Gamma)$  et  $N_2(\Gamma)$  sont les **contraintes viscométriques du fluide**

- ★ Remarque :  $N_1(\Gamma) = N_1(-\Gamma)$  ;  $N_2(\Gamma) = N_2(-\Gamma)$  ;  $\tau(\Gamma) = -\tau(-\Gamma)$

Ceci se vérifie en utilisant la relation d'isotropie avec la symétrie autour de  $\vec{x}_2$  :

$$Q = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} \Gamma \text{ devient } -\Gamma \\ T_{11} \text{ devient } T_{11} \\ T_{12} \text{ devient } -T_{12} \\ T_{22} \text{ devient } T_{22} \end{array}$$

On pose souvent  $\tau(\Gamma) = \Gamma \mu(\Gamma)$  alors  $\mu$  est une fonction paire. Les trois contraintes viscométriques caractérisent un **fluide non newtonien**. Leur détermination expérimentale fait l'objet de la viscosimétrie.

**Exemples :**

- ♦ **Fluide visqueux newtonien**

$T = -p \mathbf{1} + 2 \mu D$  (D taux de déformation, partie symétrique de L)

$$L = \begin{bmatrix} 0 & \Gamma & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow D = \begin{bmatrix} 0 & \Gamma/2 & 0 \\ \Gamma/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow T = \begin{bmatrix} -p & \mu\Gamma & 0 \\ \mu\Gamma & -p & 0 \\ 0 & 0 & -p \end{bmatrix} \quad \text{on a alors } \begin{cases} \tau(\Gamma) = \mu\Gamma \\ N_1(\Gamma) = 0 \\ N_2(\Gamma) = 0 \end{cases}$$

La viscosité  $\mu$  est **constante**, et les **contraintes normales** sont **nulles**.

♦ **Fluide visqueux non-newtonien dit de Reiner-Rivlin**

$$\mathbf{T} = -p \mathbf{1} + a_1 \mathbf{D} + a_2 \mathbf{D}^2$$

Avec  $a_1$  et  $a_2$  dépendant des invariants  $D_{II}$  et  $D_{III}$ , puisque  $D_I = \text{tr}(\mathbf{D}) = 0$  si le fluide est incompressible.

$$D_{II} = \frac{1}{2} \left[ (\text{tr} \mathbf{D})^2 - \text{tr}(\mathbf{D}^2) \right] = \frac{-\Gamma^2}{4}$$

$$D_{III} = \det \mathbf{D} = 0$$

$a_1$  et  $a_2$  ne dépendent que de  $\Gamma^2$

Contraintes viscométriques :

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 0 & \Gamma & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{D} = \frac{\Gamma}{2} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

et

$$\mathbf{D}^2 = \frac{\Gamma^2}{4} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

d'où :

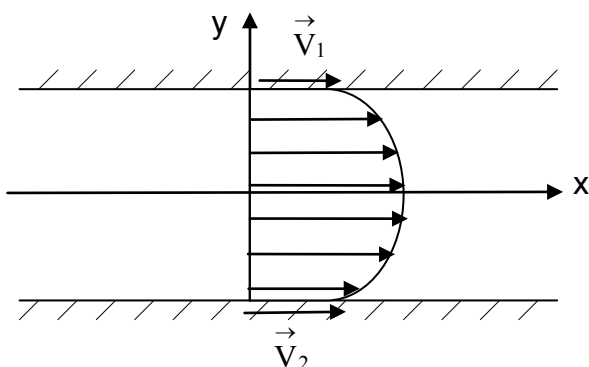
$$\Rightarrow \mathbf{T} = \begin{bmatrix} -p + a_2 \frac{\Gamma^2}{4} & a_1 \frac{\Gamma}{2} & 0 \\ a_1 \frac{\Gamma}{2} & -p + a_2 \frac{\Gamma^2}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

et on a :

$$\begin{cases} \tau(\Gamma) = a_1(\Gamma^2) \frac{\Gamma}{2} \\ N_1(\Gamma) = N_2(\Gamma) = a_2(\Gamma^2) \frac{\Gamma^2}{4} \end{cases} \quad (\mu(\Gamma) = a_1(\Gamma^2))$$

\* De manière générale, un **fluide non-newtonien** se caractérisent par une viscosité  $\mu(\Gamma)$  **non constante** et par la présence de **contraintes normales**  $N_1(\Gamma)$ ,  $N_2(\Gamma)$ .

**3.5.2 Ecoulement dans un canal**



Parois parallèles de vitesse  $\vec{V}_1$  et  $\vec{V}_2$

cette fois

$$\vec{V} = \begin{pmatrix} V(y) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Pour une particule du fluide à l'instant  $\tau$

$$\vec{x}_\tau \begin{cases} x - V(y)(t - \tau) \\ y \\ z \end{cases}$$

En posant  $V'(y) = \frac{dV}{dy} = V'$  on a  $F_t(\tau) = \begin{bmatrix} 1 & -V'(t - \tau) & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Par **analogie** avec le paragraphe précédent, on constate un glissement simple en chaque point, avec le taux de glissement  $\Gamma = V'(y)$ , **fonction de y** et non plus constant.

Les contraintes sont données par :

$$\begin{cases} T_{11} = -p(x, y) + N_1(V'(y)) = -p(x, y) + \hat{N}_1(y) \\ T_{22} = -p(x, y) + N_2(V'(y)) = -p(x, y) + \hat{N}_2(y) \\ T_{33} = -p(x, y) \\ T_{12} = \tau(V'(y)) = \hat{\tau}(y) \\ T_{13} = T_{23} = 0 \end{cases}$$

\* Equations du mouvement en l'absence de forces de volume : ( $\gamma_i = T_{ij}$  toujours en eulérien. Ici  $\gamma_i = 0$  car chaque particule a un mouvement rectiligne uniforme) :

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} T_{11} + \frac{\partial}{\partial y} T_{12} + \frac{\partial}{\partial z} T_{13} = 0 \\ \frac{\partial}{\partial x} T_{12} + \frac{\partial}{\partial y} T_{22} + \frac{\partial}{\partial z} T_{23} = 0 \end{cases}$$

soit  $\begin{cases} -\frac{\partial p}{\partial x} + 0 + \frac{\partial \hat{\tau}}{\partial y} + 0 = 0 \\ 0 - \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{d\hat{N}_2}{dy} + 0 = 0 \end{cases} \Rightarrow \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial \hat{\tau}}{\partial y} = h(y)$

La première équation donne  $p = h(y)x + q(y)$  que l'on rapporte dans la seconde :

$$-\frac{\partial h}{\partial y}x - \frac{dq}{dy} + \frac{d\hat{N}_2}{dy} = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial h}{\partial y} = 0 & h = \text{cte} = C \\ \frac{dq}{dy} = \frac{d\hat{N}_2}{dy} & \text{il vient alors } p = -Cx + q(y) \\ & \text{et } \hat{\tau}(y) = -Cy + d \end{cases}$$

C est le **gradient de pression** et d constante d'intégration.

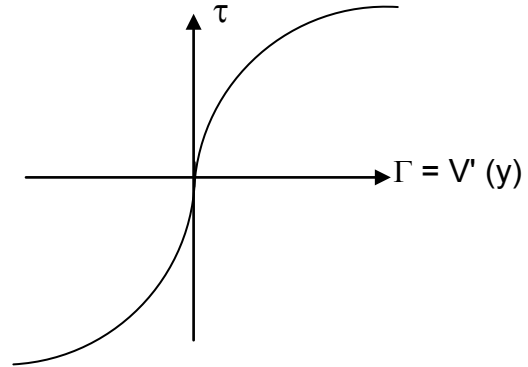
\* **Remarque** : Le gradient de pression C et les vitesses  $\vec{V}_1$  et  $\vec{V}_2$  des plaques sont des données du problème.

\* en supposant  $\tau$  fonction croissante de  $\Gamma$ , on peut déterminer la fonction inverse :  
 $\Gamma = \bar{\Gamma}(\tau)$

$$\Gamma = \bar{\Gamma}(-Cy + d)$$

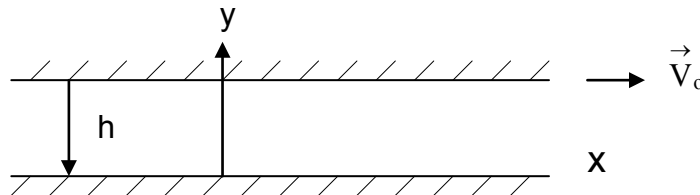
$$V = \int_0^y \bar{\Gamma}(-Cy + d) dy + V_0$$

Il y a deux constantes d'intégration  $d$  et  $V_0$ .  
 Il y a deux conditions initiales  $V_1$  et  $V_2$   
 pour les déterminer.



**Exemple 1**

Ecoulement **sans gradient** de pression ( $C = 0$ ) entre une **paroi fixe** et une **paroi mobile**.



$$C = 0 \Rightarrow \tau = d = \text{constante}$$

$$V = \int_0^y \bar{\Gamma}(d) dy = \int_0^y \gamma_1 dy = \gamma_1 y + \text{cte}$$

Conditions initiales : si  $V(0) = 0$  et  $V(h) = V_0$ , alors  $V = \frac{V_0}{h} y$

Le **profil de vitesse** est **linéaire**

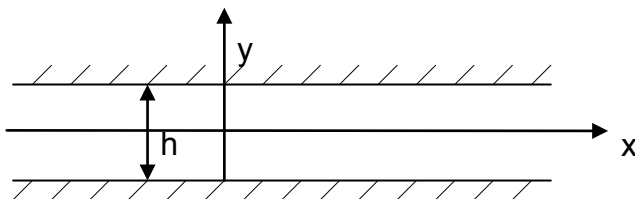
Le taux de glissement vaut :  $\Gamma = \frac{V_0}{h}$

Il reste une équation :  $\frac{dN_2}{dy} = \frac{dq}{dy} = 0 \Rightarrow q$  est constant

La **pression** est **constante** dans tout l'écoulement.

**Exemple 2**

Ecoulement engendré par un gradient de pression dans un canal aux parois immobiles.



$$p = -Cx + q(y)$$

$$\hat{\tau} = -Cy + d$$

$$V = \int_0^y \Gamma(y) dy + V(0)$$

$$= \int_0^y \bar{\Gamma}(-Cy + d) dy + V(0)$$

$$\Rightarrow \int_0^{\pm h/2} \Gamma(-Cy + d) dy + V_0 = 0$$

Conditions initiales :  $V = 0$  pour  $y = \pm \frac{h}{2}$

On a bien deux équations pour les deux inconnues.

✦ **Remarque :** on obtient nécessairement  $d = 0$  (le profil est symétrique)  
 soit  $\int_0^{h/2} \bar{\Gamma} (-Cy) dy = -V_0$

Dans le cas particulier du fluide visqueux **newtonien** : ( $\tau = \mu\Gamma$ )

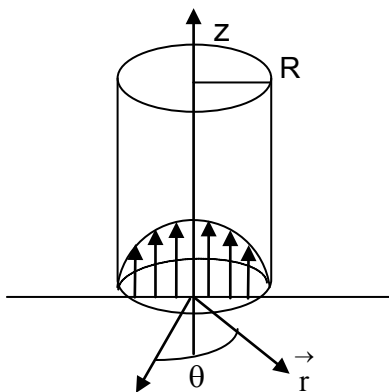
On peut déterminer  $\bar{\Gamma} = \frac{\tau}{\mu} \Rightarrow V_0 = \frac{Ch^2}{8\mu}$  profil parabolique des vitesses.

✦ **Remarque :** pour un fluide **non newtonien**,  $\frac{dN_2}{dy} \neq 0 \Rightarrow p = -Cx + q(y)$

La pression n'est pas homogène. Le profil des vitesses n'est pas parabolique.

### 3.5.3 Ecoulements de Poiseuille et de Couette

#### Exemple 3 : Ecoulement de Poiseuille



Soit un écoulement dans un canal cylindrique circulaire, sous l'action d'un gradient de pression  $C$ . On suppose qu'en chaque point la vitesse est longitudinale et ne dépend ni de  $\theta$  ni de  $z$ .

Gradient de vitesse en  $r, \theta, z$  :

$$L = \begin{bmatrix} V_{r,r} & (V_{r,\theta} - V_\theta)/r & V_{r,z} \\ V_{\theta,r} & (V_{\theta,\theta} + V_r)/r & V_{\theta,z} \\ V_{z,r} & (V_{z,\theta})/r & V_{z,z} \end{bmatrix}$$

$\vec{V} = V(r) \vec{z}$   
 Sur  $\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z$  on a ici  $L = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ V'(r) & 0 & 0 \end{bmatrix}$  Condition au limite  $V(R) = 0$

A la numérotation près, l'écoulement de Poiseuille est un **écoulement de glissement simple**.

Il suffit d'effectuer le changement de numérotation dans les éléments du tenseur des contraintes du cas du glissement simple (on a la même cinématique donc le même tenseur des contraintes).

1.2 devenant 3.1, le changement est le suivant :

1	→	3
2	→	1
3	→	2

On a alors :

$$\mathbb{T} = \begin{bmatrix} -p + N_2(\Gamma) & 0 & \tau(\Gamma) \\ 0 & -p & 0 \\ \tau(\Gamma) & 0 & -p + N_1(\Gamma) \end{bmatrix} \quad \text{avec } \Gamma = V'(r)$$

Les équations du mouvement en coordonnées cylindriques sont : (accélération  $\vec{\gamma} = 0$ )

$$\begin{cases} \frac{d\hat{\tau}}{dr} + \frac{\hat{\tau}}{r} + \frac{\partial p}{\partial z} = 0 & (1)' \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial p}{\partial r} + \frac{d\hat{N}_2}{dr} + \frac{N_2}{r} = 0 & (2)' \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial p}{\partial \theta} = 0 & (3)' \end{cases}$$

★ **Remarque** : le signe ^ distingue les fonctions de r uniquement :

$$\hat{\tau}(r) = \tau(\Gamma(r))$$

$$\text{de (1)' } \Rightarrow \frac{\partial p}{\partial z} \text{ ne dépend que de } r \Rightarrow p = -C(r) + d(r)$$

en reportant cette expression dans (2)'

$$\text{de (2)' } \Rightarrow \underbrace{-\frac{\partial C}{\partial r}}_{f(z)} + \underbrace{\frac{\partial d}{\partial r} + \frac{d\hat{N}_2}{dr} + \frac{N_2}{r}}_{f(r)} = 0 \Rightarrow \frac{\partial C}{\partial r} = 0$$

On obtient donc :  $p = -Cz + q(r)$

$$\text{Puis } \frac{\partial \hat{\tau}}{\partial r} + \frac{\hat{\tau}}{r} = 0 \Rightarrow \hat{\tau} = \frac{Cr}{2} + \frac{b}{r}$$

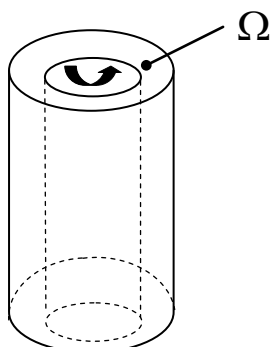
Mais  $b = 0$  ( $\hat{\tau}$  ne doit pas tendre vers l'infini si  $r$  s'annule).

★ **Remarque** : On aurait obtenu la même chose en écrivant l'équilibre vertical d'un petit cylindre de fluide et en déduire la vitesse  $V(r)$

✱ Enfin l'équation (2)' permet, en fonction de  $\hat{N}_2$  de calculer  $p$ , en déterminant  $q(r)$ .

La loi de comportement est directement écrite à partir des contraintes viscométriques, en identifiant l'écoulement de glissement simple.

### Exemple 4 : Ecoulement de Couette



Le fluide est contenu dans un grand cylindre. Un petit cylindre plus petit tourne à l'intérieur à la vitesse  $\Omega$ .

Cylindre extérieure :  $V(R_e) = 0$

Cylindre intérieure :  $V(R_i) = \Omega R_i$

Fluide :  $V_r = V_z = 0, \quad V_\theta = V(r)$

Pour une particule :

$$\text{Instant } t \begin{cases} r \\ \theta \\ z \end{cases} \quad \text{instant } t' \begin{cases} r = r' \\ \theta + \frac{V(r)}{r} (t - t') = \theta' \\ z = z' \end{cases}$$

Pour calculer le tenseur de Cauchy-Green droit relatif  $C_t(t')$  en  $r, \theta, z$  qui intervient dans la loi de comportement, on peut partir de la relation de base :

$$d\vec{M}' = F_t(t')d\vec{M} \quad \text{et} \quad C_t(t') = F_t^T(t')F_t(t')$$

$$\left(\frac{d\vec{x}'}{dt'}\right)^2 = \frac{d\vec{x}}{dt} C_t(t') \frac{d\vec{x}}{dt}$$

$$\begin{aligned} d\vec{M}' &= dr' \vec{e}'_r + r' d\theta' \vec{e}'_\theta + dz' \vec{e}'_z \\ &= dr \vec{e}'_r + \left[ rd\theta - r \left(\frac{V(r)}{r}\right)' (t - t') dr \right] \vec{e}'_\theta + dz \vec{e}'_z \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \|d\vec{M}'\|^2 = (dr)^2 + r^2 (d\theta)^2 + \left[ r \left(\frac{V(r)}{r}\right)' (t - t') dr \right]^2 - 2 \left(\frac{V(r)}{r}\right)' (t - t') r^2 dr d\theta + (dz)^2$$

On en tire le tenseur  $C_t(t')$

$$C_t(t') = \begin{bmatrix} 1 + (\Gamma s)^2 & -\Gamma s & 0 \\ -\Gamma s & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{avec } s = t - t' \quad \text{et} \quad \Gamma = r \left(\frac{V(r)}{r}\right)' = V' - \frac{V}{r}$$

Donc semblable au glissement simple mais en coordonnées  $r, \theta, z$

$$\text{Alors : } \begin{cases} T_{rr} = -p(r) + N_2(\Gamma(r)) = -p(r) + \hat{N}_2(r) \\ T_{\theta\theta} = -p(r) + N_1(\Gamma(r)) = -p(r) + \hat{N}_1(r) \\ T_{zz} = -p(r) \\ T_{r\theta} = \tau(\Gamma(r)) = \hat{\tau}(r) \end{cases}$$

Les **équations du mouvement**, sachant que  $\gamma_r = -\rho \frac{V^2(r)}{r}$  **centrifuge**, donnent :

$$\begin{cases} -\frac{\partial p}{\partial r} + \frac{\partial N_2}{\partial r} + \frac{N_2(r) - N_1(r)}{r} + \rho \frac{V^2(r)}{r} = 0 \\ \frac{\partial \hat{\tau}}{\partial r} + 2 \frac{\hat{\tau}}{r} = 0 \Rightarrow r^2 \hat{\tau}(r) = C \Rightarrow \hat{\tau}(r) = \frac{C}{r^2} \end{cases}$$

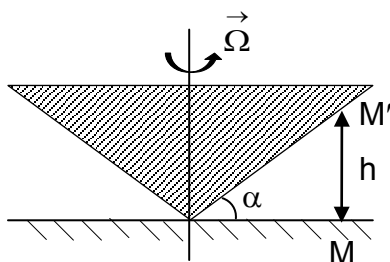
### 3.5.4 Ecoulements viscométriques

Tous les exemples que nous venons de détailler sont des cas particuliers d'écoulements viscométriques. D'une manière générale, on appelle écoulement viscométrique un écoulement, qui localement, c'est-à-dire au voisinage de chaque point, est un **écoulement de glissement simple**.

L'étude d'un tel écoulement peut donc se faire à partir de **la seule connaissance** des trois fonctions contraintes viscométriques  $\tau(\Gamma)$ ,  $N_1(\Gamma)$ ,  $N_2(\Gamma)$ . Ces trois fonctions caractérisent le fluide et sont **déterminées par l'expérience**. On utilise pour cela des écoulements viscométriques particuliers dans des **viscosimètres**.

Les **viscosimètres** les plus employés sont :

- \* Le viscosimètre de Couette, basé sur [l'exemple 4](#), permet de déterminer simplement la fonction cisaillement  $\tau(\Gamma)$  à partir du couple  $M(\Gamma)$ .
- \* Le viscosimètre de plan-cône, qui présente l'avantage de travailler à taux de glissement constant.



(L'angle  $\alpha$  est très faible)

$$\Gamma = \frac{V(M') - V(M)}{h} = \frac{\Omega r}{\alpha r} = \frac{\Omega}{\alpha} = \text{cte}$$

Il permet d'approcher les contraintes normales. Nous nous sommes limités aux écoulements viscométriques stationnaires ( $\Gamma = \text{cte}$ ). De la même façon on peut étudier les écoulements viscométriques instationnaires, en particulier le démarrage de glissement simple.

$$\vec{V} = 0 \quad \text{pour } t \leq 0$$

Il est défini par

$$\vec{V} = \Gamma y \vec{e}_x \quad \text{pour } t > 0$$

Et on peut montrer, comme plus haut que le tenseur des contraintes est donné par :

$$T(t) = \begin{bmatrix} -p + N_1(\Gamma, t) & \tau(\Gamma, t) & 0 \\ \tau(\Gamma, t) & -p + N_2(\Gamma, t) & 0 \\ 0 & 0 & -p \end{bmatrix}$$

où  $\tau(\Gamma, t)$ ,  $N_1(\Gamma, t)$ ,  $N_2(\Gamma, t)$  caractérisent le **démarrage du mouvement**. Ces fonctions que l'on peut également obtenir expérimentalement, se stabilisent rapidement vers les valeurs  $\tau(\Gamma)$ ,  $N_1(\Gamma)$ ,  $N_2(\Gamma)$  correspondant à l'écoulement stationnaire. Elles ont également une grande importance pratique, car elles permettent de caractériser le démarrage d'un écoulement, au contraire des **fonctions de relaxation** qui caractérisent **l'arrêt d'un mouvement** en prenant :

$$\vec{V} = \Gamma y \vec{e}_x \quad \text{pour } t \leq 0$$

$$\vec{V} = \vec{0} \quad \text{pour } t > 0$$



## 4 THERMODYNAMIQUE et HYPERELASTICITE

### 4.1 LA THERMODYNAMIQUE DES MILIEUX CONTINUS

L'insertion des concepts thermodynamiques dans la mécanique des milieux continus est rendue nécessaire par les deux considérations suivantes :

1. De nombreux problèmes technologiques importants impliquent un couplage entre les **effets mécaniques** et les **phénomènes thermiques**. Les contraintes thermiques et la convection sont deux exemples représentatifs.
2. Même en l'absence de tout couplage thermomécanique, le **second principe** de la thermo-dynamique permet d'introduire dans une modélisation purement mécanique, le concept essentiel de **dissipation**. Une partie de l'énergie mécanique fournie à un système dissipatif est inexorablement dissipée, c'est-à-dire **perdue sous forme de chaleur**.

#### 4.1.1 Rappel du premier principe

Nous avons vu au 1<sup>er</sup> chapitre que le premier principe s'écrit :

$$(1) \quad \boxed{\frac{d}{dt} (E + K) = P^{\text{ext}} + \dot{Q}}$$

qui exprime la **conservation de l'énergie**

où  $E = \iiint_D \rho e dv$  représente l'énergie interne du système

$e$  : **énergie interne spécifique** du système, c'est-à-dire énergie interne par unité de masse.

$K = \iiint_D \rho \frac{V^2}{2} dv$  **énergie cinétique** du système

$P^{\text{ext}} = \iiint_D \rho f_i V_i dv + \iint_{\partial D} T_i V_i dS$  **puissance des efforts extérieurs**

$\dot{Q} = \iiint_D \rho r dv + \iint_{\partial D} h dS$  **taux de chaleur fourni** au système

$r$  : apport spécifique (**radiation**)

$h$  : apport surfacique (**conduction**)  $h = -\bar{q} \cdot \bar{n}$

$\bar{q}$  **Flux de chaleur** par unité de surface et de temps de normale  $\bar{n}$

Le **théorème de l'énergie cinétique** donne :

$$(2) \quad P^{ext} + P^{int} = \frac{dK}{dt} \quad \text{or} \quad P^{int} = - \iiint_D T_{ij} D_{ij} dv$$

d'où 
$$\frac{dE}{dt} = - P^{int} + \dot{Q}$$

et la forme locale (Chapitre 1) s'écrit :

$$\rho \dot{e} = \rho r + T_{ij} D_{ij} - q_{j,j}$$

### 4.1.2 Deuxième principe, inégalité de Clausius-Duheim

Après l'énergie interne et le taux de chaleur, il faut introduire deux nouvelles variables, la **température absolue**  $\theta$  (M, t) et l'**entropie**.

L'**entropie** exprime une **variation d'énergie** associée à une **variation** de température.

Le **second principe** de la thermodynamique exprime la **non conservation de l'entropie**. Il postule que le taux de production d'entropie est **toujours supérieur ou égal** au **taux de chaleur reçue** divisé par la **température**.

soit (3) 
$$\frac{dS}{dt} \geq \dot{S}_{ext} = \frac{\dot{Q}}{\theta}$$
  $\frac{\text{Taux.de.chaleur.échangé}}{\text{Température.absolue.}\theta} > 0$

où  $\dot{S}$  : entropie :  $\iiint_D \rho \dot{\eta} dv$  où  $\dot{\eta}$  est l'entropie spécifique / unité de temps  
 et  $\dot{S}_{ext}$  : apport extérieur d'entropie (production externe d'entropie / unité de temps)

$$\dot{S}_{ext} = \iiint_D \rho \frac{r}{\theta} dv + \iint_{\partial D} \frac{h}{\theta} ds \quad \theta \text{ température absolue} \Rightarrow \theta > 0$$

Ceci généralise aux milieux continus l'inégalité classique.

On peut aussi écrire le **taux de production total** d'entropie :

(4) 
$$\frac{dS}{dt} = \dot{S}_{ext} + \dot{S}_{int} \quad \text{d'où} \quad \dot{S}_{int} \geq 0 \quad (0 \text{ si processus réversible})$$

$\dot{S}_{int}$  : production **interne** d'entropie, due aux processus **irréversibles** de la transformation, donc **nulle** si le processus est **réversible**.

On a :

$$\dot{S}_{int} = \frac{d}{dt} \iiint_D \rho \eta dv - \iiint_D \rho \frac{r}{\theta} dv + \iint_{\partial D} \frac{q_i n_i}{\theta} dS = \iiint_D \frac{\Phi}{\theta} dv \geq 0$$

On rappelle que la **conservation de la masse** permet d'écrire (Chapitre 1):

$$\frac{d}{dt} \iiint_D (\cdot) \rho dv = \iiint_D \frac{d}{dt} (\cdot) \rho dv$$

La quantité  $\Phi$  est appelée **dissipation spécifique**. Localement nous pouvons alors écrire que :

$$\frac{\Phi}{\theta} = \rho \dot{\eta} - \frac{\rho r}{\theta} + \operatorname{div} \left( \frac{\vec{q}}{\theta} \right) = \rho \dot{\eta} - \frac{\rho r}{\theta} + \frac{1}{\theta} \operatorname{div} \vec{q} - \frac{\vec{q} \cdot \vec{g}}{\theta^2} \geq 0$$

car  $\operatorname{div} \left( \frac{\vec{q}}{\theta} \right) = \frac{1}{\theta} \operatorname{div} \vec{q} - \frac{1}{\theta^2} \vec{q} \cdot \overrightarrow{\operatorname{grad}} \theta$

$\vec{g}$  : **gradient de température eulérien**, soit :  $g_i = \frac{\partial \theta}{\partial x_i} = \theta, i$

ainsi (5) 
$$\Phi = \underbrace{\rho \theta \dot{\eta} - \rho r + \operatorname{div} \vec{q}}_{\Phi^{\text{int}}} - \underbrace{\frac{\vec{q} \cdot \vec{g}}{\theta}}_{\Phi^{\text{th}}} \geq 0$$

Cette dissipation se sépare en deux parties : nous posons  $\Phi = \Phi^{\text{int}} + \Phi^{\text{th}}$  ou  $\Phi^{\text{int}}$  représente la dissipation intrinsèque  $\rho \theta \dot{\eta} - \rho r + \operatorname{div} \vec{q}$  et  $\Phi^{\text{th}}$  la **dissipation thermique** (par conduction).

On peut exprimer (1) de façon différente en faisant appel au premier principe. En effet nous savons que :

$$\begin{aligned} \rho \dot{e} &= \rho r + T : D - \operatorname{div} \vec{q} \\ \Phi &= \rho \theta \dot{\eta} - \rho \dot{e} + T : D - \frac{\vec{q} \cdot \vec{g}}{\theta} \geq 0 \\ \rho (\theta \dot{\eta} - \dot{e}) + T : D - \frac{\vec{q} \cdot \vec{g}}{\theta} &\geq 0 \end{aligned}$$

en définissant **l'énergie libre**  $\psi = e - \eta\theta$  nous pouvons écrire que :

(6) 
$$\Phi = \underbrace{-\rho (\dot{\psi} + \eta \dot{\theta}) + T : D}_{\Phi^{\text{int}}} - \underbrace{\frac{\vec{q} \cdot \vec{g}}{\theta}}_{\Phi^{\text{th}}} \geq 0$$

Cette inégalité, **forme locale du deuxième principe** de la thermodynamique, est appelée inégalité de **Clausius-Duheim**. En version **lagrangienne**, on définit de même la fonction  $\Phi_0$  :

(7) 
$$\Phi_0 = \underbrace{-\rho_0 (\eta \dot{\theta} + \dot{\psi}) + S : \dot{E}}_{\Phi_0^{\text{int}}} - \underbrace{\frac{\vec{\phi} \cdot \vec{G}}{\theta}}_{\Phi_0^{\text{th}}} \geq 0$$

### 4.1.3 Bilans énergétiques

Il s'agit de donner une **signification** aux différents termes qui sont apparus dans l'énoncé des deux principes de la thermodynamique. Nous allons tout d'abord dresser un **bilan thermique**. Pour cela, reportons l'expression de la **dissipation intrinsèque** :

$$\Phi^{intr} = \rho (\theta \dot{\eta} - \dot{e}) + T : D \quad \text{dans l'équation de l'énergie interne :}$$

$$(8) \quad \rho \theta \dot{\eta} = \Phi^{intr} + \rho r - \operatorname{div} \vec{q}$$

**L'entropie spécifique**,  $\eta$ , est fonction des variables d'état ( $\theta, F, \dots$ ). En évolution réversible, nous avons  $\theta d\eta = dQ = cd\theta + \dots$  où  $c$  est la **chaleur spécifique par unité de masse**.

Nous avons donc  $\rho c \dot{\theta} + \dots = \Phi^{intr} + \rho r - \operatorname{div} \vec{q}$ , les termes symbolisés par les pointillés sont des termes de couplage qui sont en général petits. Nous obtenons donc **l'équation de la chaleur** dans laquelle la dissipation intrinsèque apparaît comme source de chaleur : c'est la quantité d'énergie mécanique qui est dissipée sous forme de chaleur. (Pour retrouver l'équation de la chaleur classique, il suffit d'introduire la loi de Fourier :

$$\vec{q} = -K \operatorname{grad} \theta \quad \text{soit} \quad \operatorname{div} \vec{q} = -K \Delta \theta$$

$K$  coefficient de conductivité thermique ( $>^{\circ}$ ).

Considérons maintenant **le cas purement mécanique** où l'on peut négliger tous les effets thermiques. Cette approximation est souvent très valable ; en effet, moyennant quelques hypothèses raisonnables, on peut souvent remarquer un certain découplage entre les équations mécaniques et thermiques. Ainsi, en **mécanique des solides** on peut obtenir la répartition de température en résolvant l'équation de la chaleur, (ou grâce à l'expérience) et l'injecter dans les équations de la mécanique (couplage dit faible).

En **mécanique des fluides**, par contre, le champ de température dépend du champ de vitesses, mais on peut souvent traiter le problème mécanique en oubliant complètement les variables thermiques. Nous pouvons donc, dans un cadre purement mécanique, identifier  $e$  et  $\psi$  à une énergie que nous noterons  $u$ .

$$\dot{u} = (\dot{\psi} + \eta \dot{\theta})$$

**L'inégalité de Clausius-Duheim** se réduit alors à :

$$(9) \quad \Phi = -\rho \dot{u} + T : D \geq 0$$

soit encore

$T : D$	=	$\Phi$	+	$\rho \dot{u}$
Puissance Mécanique de déformation		Energie dissipée en chaleur		Energie stockée

Si nous intégrons cette équation sur tout le domaine  $D$ , nous aurons alors :

$$\iiint_D T : D \, dv = \iiint_D \Phi \, dv + \iiint_D \rho \dot{u} \, dv$$

Or, d'après le théorème de l'énergie cinétique, nous avons :

$$- P_{\text{int}} = - \frac{dK}{dt} + P_{\text{ext}} = \iiint_D T : D \, dv$$

d'où (10) 
$$P_{\text{ext}} = \frac{dK}{dt} + \frac{dU}{dt} + \iiint_D \Phi \, dv$$

en effet : 
$$\iiint \rho \dot{u} \, dv = \frac{dU}{dt} \quad \text{et} \quad \Phi \geq 0$$

ainsi la **puissance des efforts extérieurs** est égale à la somme :

- \* d'une énergie stockée sous forme :
  - ♦ d'énergie cinétique K
  - ♦ d'énergie interne U
  - ♦ d'une énergie dissipée sous forme de chaleur

## 4.2 L'HYPERELASTICITE

Nous avons déjà rencontré au chapitre 3 deux sortes d'élasticité :

- \* **Matériau élastique** où T est défini en fonction de F
- \* **Matériau hypoélastique** où  $T_{ij}^J = A_{ijkl} D_{kl}$

Un troisième point de vue correspond aux matériaux dont la particularité est de ne **pas dissiper d'énergie**. C'est le cas de l'hyperélasticité et nous nous limiterons au cas purement mécanique.

### 4.2.1 Loi de comportement générale

La **nullité de la dissipation** se traduit par :

$$\Phi = - \rho \dot{u} + T : D = 0$$

ou encore par : 
$$- \rho_0 \dot{u} + S : \dot{E} = 0$$

ou : 
$$- \rho_0 \dot{u} + \Pi : \dot{F} = 0 \quad \text{car} \quad \frac{\rho_0}{\rho} T : D = \Pi : \dot{F} = S : \dot{E}$$

Nous supposerons que u ne dépend que du gradient de la transformation F, il vient alors :

$$\rho_0 \dot{u} = \rho_0 \frac{\partial u}{\partial F} : \dot{F} \quad \text{d'où} \quad \left( \Pi - \rho_0 \frac{\partial u}{\partial F} \right) : \dot{F} = 0$$

Cette égalité devant être vérifiée quel que soit  $\dot{F}$ , nous aurons :

$$\Pi = \rho_0 \frac{\partial u}{\partial F}$$

Ceci ne peut néanmoins être considéré comme une loi de comportement valable car elle n'obéit pas nécessairement au **principe d'indifférence matérielle**. Celui-ci exige en effet que l'énergie u soit invariante par changement de référentiel. On montre alors que u peut toujours être considéré comme fonction de E.

Il vient alors :

$$-\rho_0 \dot{u} = -\rho_0 \frac{\partial u}{\partial E} : \dot{E} \quad \text{soit} \quad \left( -\rho_0 \frac{\partial u}{\partial E} + S \right) : \dot{E} = 0$$

Cette égalité est vraie quel que soit E, donc :

$$(11) \quad \boxed{S = \rho_0 \frac{\partial u}{\partial E} = \frac{\partial W_0}{\partial E} = 2 \frac{\partial W_0}{\partial C}}$$

forme **lagrangienne objective de la loi de comportement d'un matériau hyperélastique**.

De nombreuses **lois hyperélastiques** sont ensuite obtenues en postulant des expressions du potentiel  $W_0$  en fonction des invariants de C pour les cas isotropes.(voir paragraphe exemples)

Ce résultat exige que E puisse être choisi quelconque. Si tel n'est pas le cas, c'est-à-dire si le milieu est soumis à une **liaison interne**, ( $S_0 : \dot{E} = 0$ ) par exemple avec des **contraintes résiduelles initiales**, alors on devra écrire :

$$\begin{cases} \left( S - \rho_0 \frac{\partial u}{\partial E} \right) : \dot{E} = 0 \\ S_0 : \dot{E} = 0 \end{cases}$$

pour les  $\dot{E}$  vérifiant  $S_0 : \dot{E} = 0$  ( $\dot{E}$  n'est à présent plus arbitraire).

On devra donc introduire un **multiplicateur de Lagrange  $\alpha$**  associé à cette liaison et la loi de comportement deviendra :

$$S = \rho_0 \frac{\partial u}{\partial E} + \alpha S \quad \alpha \text{ à déterminer par l'équilibre}$$

On retrouve le problème par exemple lié à l'incompressibilité (voir exercice plus loin).

### 4.2.2 Matériau isotrope

Si le matériau est isotrope alors nous aurons :  $u(E^*) = u(E)$

où  $E^* = Q E Q^T$  (rotation de la configuration de référence)

ainsi  $u(Q E Q^T) = u(E)$  et u est une fonction scalaire math-isotrope. On peut alors utiliser des théorèmes de représentation donnés en mathématique avec les **invariants principaux**.

La **forme eulérienne** isotrope peut être obtenue en remarquant que compte tenu de l'isotropie, u, fonction isotrope de E ou C, est aussi fonction isotrope de  $B = R C R^T$ ,  $u = u(B)$ .

Nous pouvons alors écrire :

$$\rho \dot{u} = \rho \frac{\partial u}{\partial B} : \dot{B} \quad \text{ou} \quad \dot{B} = \dot{F} F^T + F \dot{F}^T = 2 (L B)^S = (L B + B L^T)$$

$$\text{ainsi} \quad \rho \frac{\partial u}{\partial B} : \dot{B} = 2 \rho \frac{\partial u}{\partial B} : (L B)^S \quad (\text{notation}) \quad Y^S = \frac{1}{2} (Y + Y^T)$$

or  $\frac{\partial u}{\partial B}$  est symétrique. Nous pouvons donc écrire (en remarquant que si X est symétrique alors  $X : Y^S = X : Y$  et en utilisant la relation  $A : B C = AC^T : B$ ) :

$$\rho \dot{u} = 2 \rho \frac{\partial u}{\partial B} : LB = 2 \rho \frac{\partial u}{\partial B} B : L$$

u étant **isotrope**, les théorèmes de représentation nous disent que u ne dépend que des **invariants** de B :  $B_I, B_{II}, B_{III}$ .

$$\begin{cases} B_I = \text{tr } B \\ B_{II} = \frac{1}{2} \left[ (\text{tr } B)^2 - \text{tr } B^2 \right] \\ B_{III} = \det B \end{cases}$$

ainsi 
$$\frac{\partial u}{\partial B} = \frac{\partial u}{\partial B_I} \frac{\partial B_I}{\partial B} + \frac{\partial u}{\partial B_{II}} \frac{\partial B_{II}}{\partial B} + \frac{\partial u}{\partial B_{III}} \frac{\partial B_{III}}{\partial B}$$

avec (exercice avec Caley-Hamilton)

$$\begin{cases} \frac{\partial B_I}{\partial B} = 1 \\ \frac{\partial B_{II}}{\partial B} = (\text{tr } B) 1 - B \\ \frac{\partial B_{III}}{\partial B} = B_{III} B^{-1} \end{cases}$$

Ces relations sont également **les mêmes** avec le tenseur **Cauchy-Green droit C**. De ceci, nous pouvons déduire que :

$$\frac{\partial u}{\partial B} B = B \frac{\partial u}{\partial B} \quad \text{et que } \frac{\partial u}{\partial B} B \quad \text{est symétrique}$$

Nous pouvons donc écrire comme plus haut, car D est symétrique:

$$\rho \dot{u} = \left( 2 \rho \frac{\partial u}{\partial B} B : L \right) = 2 \rho \frac{\partial u}{\partial B} B : D$$

La condition  $\Phi = 0$  devient alors :

$$\left( T - 2 \rho B \frac{\partial u}{\partial B} \right) : D = 0$$

Cette égalité doit être vraie quel que soit D (si pas de liaison interne) d'où :

$$(12) \quad T = 2 \rho B \frac{\partial u}{\partial B} = 2 \rho F \frac{\partial u}{\partial C} F^T \quad (W_0 = \rho_0 u)$$

En effet, on a :

$$\begin{aligned} \frac{dW_0}{dt} &= \frac{\partial W_0}{\partial C} : \frac{d}{dt}(C) = \frac{dW_0}{dt} = 2 \frac{\partial W_0}{\partial C} : [F^T DF] \\ &= 2 \frac{\partial W_0}{\partial C} F^T : F^T D = 2F \frac{\partial W_0}{\partial C} F^T : D = \frac{\rho_0}{\rho} T : D \end{aligned}$$

car 
$$S = 2 \frac{\partial W_0}{\partial C} \quad T = \frac{\rho}{\rho_0} F S F^T \quad \text{d'où (12)}$$

(Rappel de la règle de calcul utilisée:  $A : BC = AC^T : B = B^T A : C$ )

Si le matériau est incompressible, nous ferons à nouveau apparaître un multiplicateur de Lagrange associé à cette liaison interne :  $B_{III} = 1, \text{tr } D = 0$ .

Soit (13) 
$$\boxed{T = -p \mathbf{1} + 2 \rho B \frac{\partial u}{\partial B}}$$

La **pression** joue le rôle de **multiplicateur de Lagrange**.

Pour expliciter cette loi de comportement, on utilise les relations précédentes, ce qui donne :

$$T = 2 \rho B \left[ \frac{\partial u}{\partial B_I} \mathbf{1} + \frac{\partial u}{\partial B_{II}} ((\text{tr } B) \mathbf{1} - B) + \frac{\partial u}{\partial B_{III}} B_{III} B^{-1} \right]$$

ainsi 
$$T = 2 \rho \left[ B_{III} \frac{\partial u}{\partial B_{III}} \mathbf{1} + \left( \frac{\partial u}{\partial B_I} + B_I \frac{\partial u}{\partial B_{II}} \right) B - \frac{\partial u}{\partial B_{II}} B^2 \right]$$

En utilisant l'identité de Cayley-Hamilton, ( $X^2 = X_3 X^{-1} + X_1 X - X_2 \mathbf{1}$ ) nous obtenons :

(14) 
$$T = 2 \rho \left[ - B_{III} \frac{\partial u}{\partial B_{II}} B^{-1} + \left( B_{II} \frac{\partial u}{\partial B_{II}} + B_{III} \frac{\partial u}{\partial B_{III}} \right) \mathbf{1} + \frac{\partial u}{\partial B_I} B \right]$$

Pour un milieu **incompressible**, nous aurons  $B_{III} = \det B = 1$  et la relation précédente devient :

(15) 
$$\boxed{T = 2 \rho \left[ \frac{\partial u}{\partial B_I} B - \frac{\partial u}{\partial B_{II}} B^{-1} \right] - p \mathbf{1}}$$

En posant  $u$  fonction des invariants  $B_I, B_{II}$  et de coefficients à identifier avec les courbes d'essais du matériau, on obtient par exemple les modèles hyperélastiques néo-hookéen, de **Money-Rivlin** et autres (voir exercices).

### 4.2.3 Séparation Dilatation - Distorsion

Pour les **petites déformations**, nous avons  $\varepsilon_{ij} = \varepsilon \delta_{ij} + e_{ij}$  ou  $\varepsilon = (\text{tr } \varepsilon) / 3$

La partie **sphérique**  $\varepsilon$  caractérise les variations de volume et le **déviateur**  $e_{ij}$  caractérise la distorsion, c'est-à-dire les déformations sans changement de volume ( $\text{tr } e = 0$ ).

Plus généralement, en **grandes déformations**, on pourra opérer la même séparation et caractériser la **dilatation** par  $J$  et la **distorsion** par  $\bar{F}$  ou  $\bar{B}$ .

Avec 
$$\begin{cases} \bar{F} = J^{1/3} \bar{F} & \text{et } \det \bar{F} = 1 & \text{car } J = \det |F| \\ \bar{B} = J^{2/3} \bar{B} & \text{et } \det \bar{B} = 1 \end{cases}$$

Car si  $\bar{F} = aF$   $\det |aF| = a^3 J = 1$  (ici en 3D, c'est différent en 2D)

On avait 
$$T = 2 \rho B \frac{\partial u}{\partial B}$$



On trouve après quelques étapes de calcul :

$$(16) \quad T = \rho_0 \frac{\partial u}{\partial J} 1 + 2 \rho \left( \bar{B} \frac{\partial u}{\partial \bar{B}} \right)^D \quad (\text{D pour Déviateur})$$

Cette relation est une extension aux grandes déformations du **découplage déviateur** – partie **sphérique** classique en **petites déformations**.

Pour **les fluides**, l'état thermodynamique ne dépend pas de la forme, et donc de  $\bar{B}$ , on a donc  $u = u(J)$ , ce qui donne :

$$T = \rho_0 \frac{\partial u}{\partial J} 1 = -p 1 \quad \text{avec} \quad p = -\rho_0 \frac{\partial u}{\partial J}$$

En remarquant que pour une masse  $\rho_0$  de fluide, on a  $V_0 = 1$ , d'où  $V = J V_0 = J$  et en posant  $\rho_0 u = W_0$ , nous retrouvons bien la relation classique :

$$p = - \frac{\partial W_0}{\partial V}$$

#### 4.2.4 Matériaux hyperélastiques anisotropes

Nous nous limiterons au cas de **l'isotropie transverse**, en notant  $\vec{K}$  le vecteur unitaire définissant la direction privilégiée dans  $C_0$ . D'après le paragraphe 3.2.3, on peut postuler que le potentiel  $u$  est une fonction isotrope de  $C$  et de  $M$ , ou  $M$  est égal à  $\vec{K} \otimes \vec{K}$  soit  $M_{IJ} = K_I K_J$ . Nous pouvons alors utiliser le théorème de représentation et dire que  $u$  ne dépend que des **invariants** de  $C$  et  $M$ .

Soit  $u(C_I, C_{II}, C_{III}, D_1, D_2)$  où

$$D_1 = C_{11} = \text{Tr}[C \cdot M] = C : M = C : \vec{K} \otimes \vec{K} = \vec{K} \cdot C \cdot \vec{K}$$

$$D_2 = \text{Tr}[C^2 \cdot M] = C^2 : M = C^2 : \vec{K} \otimes \vec{K} = \vec{K} \cdot C^2 \cdot \vec{K}$$

Nous avons par ailleurs montré que  $S = 2 \rho_0 \frac{\partial u}{\partial C}$

Soit :

$$S = 2 \rho_0 \left[ \frac{\partial u}{\partial C_I} 1 + \frac{\partial u}{\partial C_{II}} [(tr C) 1 - C] + \frac{\partial u}{\partial C_{III}} C_{III} C^{-1} + \frac{\partial u}{\partial D_1} M + \frac{\partial u}{\partial D_2} (MC + CM) \right]$$

Si  $\vec{K}$  est **vecteur propre** de  $C$ , alors  $S$  et  $C$  ont **même directions propres** sinon les contraintes  $S$  et les déformations  $C$  n'ont pas les mêmes directions principales. Cette **rotation** des **directions principales** témoigne d'une **anisotropie**. Si le matériau est **inextensible** dans la direction  $\vec{K}$ , nous devons introduire un **multiplicateur de Lagrange** associé à cette **liaison**, ainsi :

$$S = \alpha M + \rho_0 \left( \frac{\partial u}{\partial C_I} 1 + \dots \right)$$

Nous pouvons encore obtenir une **forme eulérienne** du fait que:

$$S = J F^{-1} T F^{-1T} \quad \text{soit} \quad T = J^{-1} F S F^T = \frac{\rho}{\rho_0} F S F^T$$

Ainsi comme déjà vu :

$$\mathbf{T} = 2 \frac{\rho}{\rho_0} \mathbf{F} \frac{\partial W_0}{\partial \mathbf{C}} \mathbf{F}^T$$

$$= 2\rho \left\{ \frac{\partial u}{\partial C_I} \mathbf{B} + \frac{\partial u}{\partial C_{II}} \left( (\text{tr } \mathbf{B}) \mathbf{B} - \mathbf{B}^2 \right) + C_{III} \frac{\partial u}{\partial C_{III}} \mathbf{1} + \frac{\partial u}{\partial D_1} \vec{k} \otimes \vec{k} + \frac{\partial u}{\partial D_2} \left( \vec{k} \otimes \mathbf{B} \vec{k} + \mathbf{B} \vec{k} \otimes \vec{k} \right) \right\}$$

avec  $\vec{k} = \mathbf{F} \vec{K}$  **vecteur matériel transformé** de  $\vec{K}$ . On peut donc écrire une loi de comportement **eulérienne**, mais celle-ci fait intervenir la **direction matérielle privilégiée**.

## 4.2.5 Exemples hyperélastiques

### 4.2.5.1 Formes des potentiels hyperélastiques

Pour un grand nombre de matériaux de **type caoutchoutique compressibles** ou quasi-**incompressibles** il existe un très grand nombre de potentiels, nous donnons ici les formulations de **base**. Si on note  $I_1, I_2, I_3$  les **invariants** de  $\mathbf{C}$  ou  $\mathbf{B}$  car les mêmes valeurs propres, pour un matériau **isotrope** et **incompressible** :  $W_0 = W_0(I_1, I_2) \quad I_3 = 1$

Comme dans la **configuration initiale** on doit avoir  $\mathbf{C} = \mathbf{1}$ , d'où les invariants  $I_1 = I_2 = 3$  il est préférable de poser  $W_0$  comme une fonction de  $(I_1 - 3)$  et de  $(I_2 - 3)$  qui assure la **nullité** du **potentiel** dans la configuration initiale de référence.

Ainsi les modèles les plus simples pour les caoutchoucs sont :

$W_0 = c_1(I_1 - 3) \quad \text{dit modèle « Néo-Hookéen »}$
$W_0 = c_1(I_1 - 3) + c_2(I_2 - 3) \quad \text{dit de « Mooney-Rivlin »}$

où  $c_1$  et  $c_2$  sont les **constantes matériaux** à identifier.

On peut trouver dans la littérature des formes de potentiels plus générales avec :

$$W_0 = c_1(I_1 - 3) + f(I_2 - 3)$$

avec  $f$  fonction analytique tel que par exemple  $f = \ln \frac{I_2}{3}$  ou autre.

Seule l'**identification** des constantes avec les essais de **traction uniaxiale**, de **cisaillement pur** (difficile à réaliser) et d'**extension biaxiale** permet de qualifier un modèle par rapport à un autre, (voir les graphiques de la figure ci-dessous). Dans les **codes de calcul** par éléments finis, on trouve le **modèle de Ogden** qui a l'avantage de **généraliser** et de contenir les modèles précédents. Il s'écrit en fonctions des **élongations principales** et dans le cas incompressible sous la forme :

$$W_0 = \sum_n \frac{\mu_n}{\alpha_n} (\lambda_1^{\alpha_n} + \lambda_2^{\alpha_n} + \lambda_3^{\alpha_n} - 3)$$

$\mu_n$  et  $\alpha_n$  sont des constantes pouvant prendre des valeurs **positives** ou **négatives**.

Ainsi en terme des **contraintes principales** de Cauchy et des **élongations principales** on obtient :

$$T_i = -p + \sum_{n=1}^r \mu_n \lambda_i^{\alpha_n}$$

Si on particularise à la **traction uniaxiale** on a :  $T_1 = -p + \sum_{n=1}^r \mu_n \lambda_1^{\alpha_n}$  et  $T_2 = T_3 = 0$

Ce qui lève l'indétermination sur la pression hydrostatique :  $p = \sum_{n=1}^r \mu_n \lambda_2^{\alpha_n}$  car  $\lambda_2 = \lambda_3$

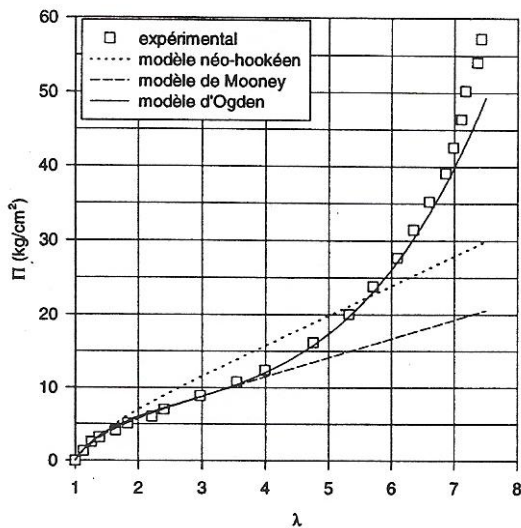
Comme l'**incompressibilité** impose  $\det|F| = 1 = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3$  il vient :

$$T_1 = \sum_{n=1}^r \mu_n (\lambda_1^{\alpha_n} - \lambda_1^{-\alpha_n/2})$$

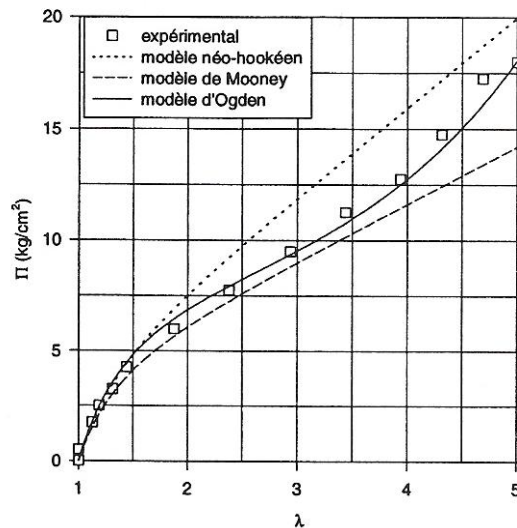
On retrouve les **formes uniaxiales** des modèles précédents :

Avec  $r=1$  et  $\alpha_1 = 2$   $T = \mu(\lambda^2 - \frac{1}{\lambda})$  modèle *Néo-Hookéen*

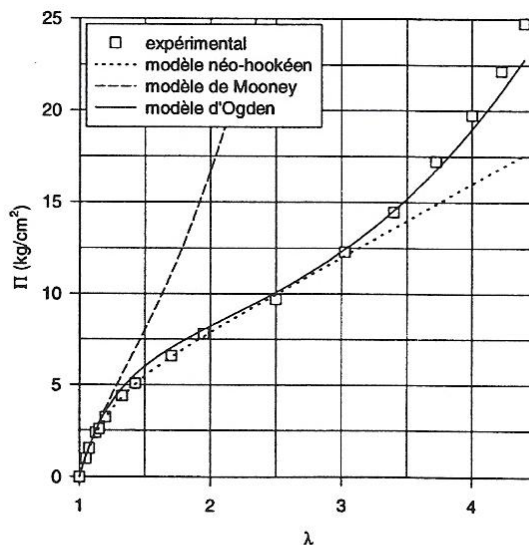
Avec  $r=2$  et  $\alpha_1 = 2$  et  $\alpha_2 = -2$   $T = (\lambda^2 - \frac{1}{\lambda})(\mu_1 - \frac{1}{\lambda} \mu_2)$  *Mooney-Rivlin*



(a) Traction uniaxiale



(b) Cisaillement pur



(c) Extension biaxiale

Les figures ci-dessus donnent les courbes d'un **caoutchouc vulcanisé** en terme des **contraintes nominales** (PK1) et **élongations** (uniaxial incompressible:  $\Pi = T/\lambda$  ). Les constantes **identifiées** sont :

$c_1 = 0.4MPa$  pour le modèle *Néo-Hookéen*  
 $c_1 = 0.127MPa$  et  $c_2 = 0.074MPa$  pour le modèle de *Mooney-Rivlin*  
 $\mu_1 = 0.63MPa, \mu_2 = 0.0012Mpa, \mu_3 = -0.01MPa, \alpha_1 = 1.3, \alpha_2 = 5.0, \alpha_3 = -2.0$  pour le modèle de *Ogden*

Dans le cas **compressible** on peut poser une **fonction g** du **déterminant** F tel que :

$$W_0 = \sum_n \frac{\mu_n}{\alpha_n} (\lambda_1^{\alpha_n} + \lambda_2^{\alpha_n} + \lambda_3^{\alpha_n} - 3) + g(\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3)$$

#### 4.2.5.2 Membrane plane hyperélastique incompressible

L'hypothèse centrale est l'état de contrainte plan suivant la direction 3 par exemple, la membrane étant suffisamment **mince** pour ne pas pouvoir supporter ni contrainte normale ni cisaillement transverse, si bien que l'état de contrainte de PK2 est plan (que l'on vérifiera aussi pour Cauchy) ce qui implique pour le tenseur deCauchy-Green droit C :

$$C = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & 0 \\ C_{21} & C_{22} & 0 \\ 0 & 0 & C_{33} \end{bmatrix} \quad S = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & 0 \\ S_{21} & S_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

L'incompressibilité  $I_3 = 1$  implique la dépendance :

$$C_{33} = \frac{1}{C_{11}C_{22} - C_{12}^2} = \lambda_3^2$$

On peut maintenant évaluer les deux premiers invariants de C :

$$I_1 = C_{11} + C_{22} + \frac{1}{C_{11}C_{22} - C_{12}^2}$$

$$I_2 = C_{11}C_{22} + \frac{C_{11} + C_{22}}{C_{11}C_{22} - C_{12}^2} - C_{12}^2$$

Avec l'hypothèse d'un potentiel de *Mooney-Rivlin*, on détermine les contraintes de PK2

$$S_{ij} = 2 \frac{\partial W_0}{\partial C_{ij}} = 2c_1 \frac{\partial I_1}{\partial C_{ij}} + 2c_2 \frac{\partial I_2}{\partial C_{ij}}$$

Un calcul direct des composantes donne l'expression des contraintes de PK2 que l'on peut mettre sous la forme :

$$\begin{Bmatrix} S_{11} \\ S_{22} \\ S_{12} \end{Bmatrix} = 2c_1 \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} - C_{33}^2 \begin{bmatrix} C_{22} \\ C_{11} \\ -C_{12} \end{bmatrix} \right\} + 2c_2 \left\{ C_{33} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + [1 - C_{33}^2 (C_{11} + C_{22})] \begin{bmatrix} C_{22} \\ C_{11} \\ -C_{12} \end{bmatrix} \right\}$$

**Remarque :**

Dans un code de calcul **implicite** en formulation **lagrangienne totale**, le **module tangent** du comportement hyperélastique s'obtient **directement** avec (à faire en exercice):

$$C_{ijkl}^0 = \frac{\partial^2 W_0}{\partial E_{ij} \partial E_{kl}} = 4c_1 \frac{\partial^2 I_1}{\partial C_{ij} \partial C_{kl}} + 4c_2 \frac{\partial^2 I_2}{\partial C_{ij} \partial C_{kl}}$$

Maintenant en situation **triaxiale** (ou dans les axes principaux des élongations dans la configuration initiale) on a :

$$F = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} \lambda_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3^2 \end{bmatrix} \quad \left\{ \begin{array}{l} I_1 = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 \\ I_2 = \lambda_1^2 \lambda_2^2 + \lambda_2^2 \lambda_3^2 + \lambda_3^2 \lambda_1^2 \\ I_3 = \lambda_1^2 \lambda_2^2 \lambda_3^2 = 1 \end{array} \right.$$

d'où les **contraintes principales** de PK2 en contraintes planes :

$$S_1 = 2 \left[ 1 - \frac{1}{\lambda_1^4 \lambda_2^2} \right] [c_1 + \lambda_2^2 c_2]$$

$$S_2 = 2 \left[ 1 - \frac{1}{\lambda_1^2 \lambda_2^4} \right] [c_1 + \lambda_1^2 c_2]$$

$$S_3 = 0$$

Les **contraintes principales** de **Cauchy** sont :

rappel  $(T = \frac{1}{\det[F]} F S F^T)$

Soit ici :  $T_1 = S_1 \lambda_1^2$        $T_2 = S_2 \lambda_2^2$        $T_3 = S_3 \lambda_3^2 = 0$

En situation **uniaxiale** suivant 1, soit  $T_2 = 0$  et  $\lambda_2 = \lambda_3$ , on retrouve l'écriture uniaxiale du modèle de *Mooney-Rivlin* :

$$T = 2 \left[ \lambda^2 - \frac{1}{\lambda} \right] \left[ c_1 + \frac{c_2}{\lambda} \right]$$

De même le **module tangent** :

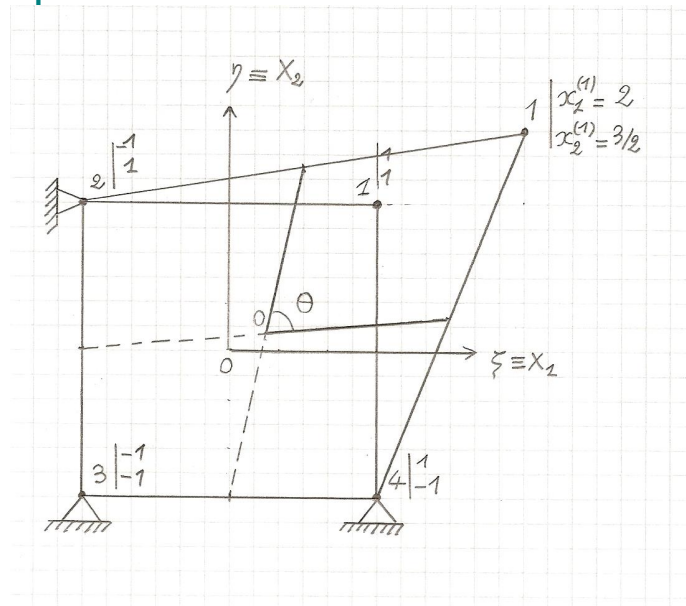
$$\frac{dT}{d\lambda} = 2 \left( 2\lambda + \frac{1}{\lambda^2} \right) \left( c_1 + \frac{c_2}{\lambda} \right) + 2 \left( \lambda^2 - \frac{1}{\lambda} \right) \left( -\frac{1}{\lambda^2} c_2 \right)$$

avec le passage à la limite  $\lambda \rightarrow 1$ , on obtient le **module d'élasticité** à l'origine en **petites déformations** :

$$E = \lim_{\lambda \rightarrow 1} \frac{dT}{d\lambda} = 6(c_1 + c_2)$$

ce qui fait de l'ordre de 1.3 MPa pour un **caoutchouc vulcanisé** à comparer aux 200000 MPa d'un acier où des 70000 MPa d'un alliage d'aluminium

**Application numérique**



On considère la figure ci-dessus qui est le quadrilatère à **4 nœuds** élément de base bi-unitaire de manière à simplifier les calculs où les coordonnées **initiales** et les coordonnées **naturelles** (ou intrinsèques) sont **confondues**. Seul le nœud 1 est déplacé de 1 et 1/2, la matrice du gradient de la transformation se calcule avec les dérivées des fonctions de forme du Q4 :

$$x_i = \sum_{k=1}^4 N_k(\xi, \eta) x_i^{(k)}$$

avec :

$$N_1(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 + \eta)$$

$$N_2(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 + \eta)$$

$$N_3(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 - \eta)$$

$$N_4(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 - \eta)$$

Comme  $X_1 \equiv \xi$  et  $X_2 \equiv \eta$   $F_{ij} = \frac{\partial x_i}{\partial X_j}$  on obtient avec les coordonnées des nœuds dans l'état déformé la **matrice gradient** :

$$F(\xi, \eta) = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 5 + \eta & 1 + \xi \\ (1 + \eta)/2 & (9 + \xi)/2 \end{bmatrix}$$

Vérifions au nœud 3 que :  $F(-1, -1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$  pas de déformation

On peut se placer **par exemple** au **centre** de l'élément :

$$F(0,0) = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 1/2 & 9/2 \end{bmatrix} \quad \text{d'où} \quad C(0,0) = \frac{1}{16} \begin{bmatrix} 25.25 & 7.25 \\ 7.25 & 21.25 \end{bmatrix}$$

Les **élongations** des **diagonales** au centre de l'élément :

$$N_x = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \lambda_x = \sqrt{N_x^T C N_x} = 1.256 \quad \text{et} \quad N_y = \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad \lambda_y = \sqrt{N_y^T C N_y} = 1.152$$

et l'**angle**  $\theta$  qu'elles forment dans la configuration déformée (voir figure) :

$$\cos\theta = \frac{N_x^T C N_y}{\lambda_x \lambda_y} = 0.313 \quad \theta = 71.75^\circ$$

Si l'épaisseur initiale au centre est par exemple 0.1 avec  $C_{33}(0,0) = \lambda_3^2 = \frac{e^2}{0.01}$  on trouve une épaisseur au centre dans l'état déformé de  $e=0.073$ .

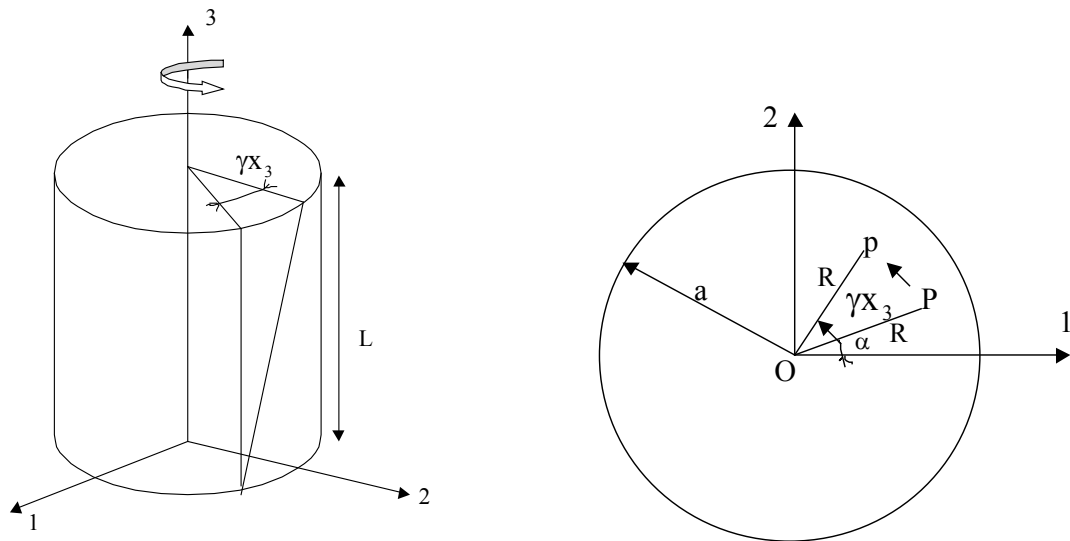
**Exercice** : Faire la même chose au nœud 1 en calculant  $F(1,1)$  puis  $C(1,1)$ , avec la même épaisseur initiale on doit trouver (sauf erreur) une épaisseur de 0.058 au nœud 1. Pour un caoutchouc de Mooney-Rivlin avec  $c_1 = 0.234\text{MPa}$  et  $c_2 = 0.117\text{MPa}$  calculer les contraintes de PK2 au centre puis les contraintes de Cauchy

$$\begin{Bmatrix} S_{11} \\ S_{22} \\ S_{12} \end{Bmatrix} = 2c_1 \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} - C_{33}^2 \begin{bmatrix} C_{22} \\ C_{11} \\ -C_{12} \end{bmatrix} \right\} + 2c_2 \left\{ C_{33} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + [1 - C_{33}^2 (C_{11} + C_{22})] \begin{bmatrix} C_{22} \\ C_{11} \\ -C_{12} \end{bmatrix} \right\}$$

Même calcul numérique au nœud 1

On peut également faire la décomposition polaire de  $F$  au centre et au nœud 1 et faire les calculs dans les éléments principaux.

#### 4.2.5.3 Torsion d'un barreau hyperélastique incompressible



Soit un barreau **cylindrique** en caoutchouc **incompressible** en **torsion pure** d'angle  $\gamma$  de torsion par unité de longueur. Tout point matériel P de coordonnées initiales  $(X_1, X_2, X_3)$  vient en p de coordonnées  $(x_1, x_2, x_3)$  tel que :

$$x_1 = R \cos(\gamma X_3 + \alpha) \quad x_2 = R \sin(\gamma X_3 + \alpha) \quad x_3 = X_3$$

On posera pour la suite :  $c = \cos \gamma X_3$        $s = \sin \gamma X_3$        $\theta = \gamma X_3 + \alpha$

ou encore :  $x_1 = cX_1 - sX_2$        $x_2 = sX_1 + cX_2$        $x_3 = X_3$

La matrice gradient de la déformation est :

$$F = \begin{bmatrix} c & -s & -\gamma X_2 \\ s & c & \gamma X_1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ et on vérifie bien que } \det|F| = 1 \text{ , la transformation est } \mathbf{isochorique}$$

d'où  $L = cte$  et  $a = cte$

Pour appliquer les **équations d'équilibre directement**, on se donne la loi de comportement hyper-élastique en terme des contraintes vraies de Cauchy  $T_{ij}$  et du tenseur de Cauchy Green Gauche B tel que (voir **relation (15)** de la **théorie**) :

$$T_{ij} = -p\delta_{ij} + 2W_1B_{ij} - 2W_2B_{ij}^{-1}$$

où p est la **pression hydrostatique** à déterminer avec les **conditions aux limites** et  $B = FF^T$

$$W_1 = \frac{\partial W}{\partial I_1} \quad \text{et} \quad W_2 = \frac{\partial W}{\partial I_2} \quad I_1 \text{ et } I_2 \text{ sont les premier et second invariants de B.}$$

Si le modèle est celui de *Mooney-Rivlin*, on aura  $W_1 = c_1 = Cte$  et  $W_2 = c_2 = Cte$  . On pose pour la suite :  $R^2 = x_1^2 + x_2^2$       et       $\mu = 2(W_1 + W_2)$  indépendant de  $x_3$

On développe la loi de comportement avec cauchy-Green gauche et son inverse :



$$B = \begin{bmatrix} 1 + \gamma^2 x_2^2 & -\gamma^2 x_1 x_2 & -\gamma x_2 \\ -\gamma^2 x_1 x_2 & 1 + \gamma^2 x_1^2 & \gamma x_1 \\ -\gamma x_2 & \gamma x_1 & 1 \end{bmatrix} \quad B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \gamma x_2 \\ 0 & 1 & -\gamma x_1 \\ \gamma x_2 & -\gamma x_1 & 1 + \gamma^2 (x_1^2 + x_2^2) \end{bmatrix}$$

$$T_{11} = -p + 2(1 + \gamma^2 x_2^2)W_1 - 2W_2$$

$$T_{22} = -p + 2(1 + \gamma^2 x_1^2)W_1 - 2W_2$$

$$T_{33} = -p + 2W_1 - 2(1 + \gamma^2 R^2)W_2$$

$$T_{12} = -2\gamma^2 x_1 x_2 \quad T_{23} = \gamma\mu(\gamma^2 R^2)x_1 \quad T_{31} = -\gamma\mu(\gamma^2 R^2)x_2$$

Les **équations d'équilibre** du **volume** dans l'état déformé  $\frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j} = 0$  donnent :

$$T_{13,3} = T_{23,3} = 0$$

$$T_{31,1} + T_{32,2} = -\gamma x_2 \frac{\partial \mu}{\partial x_1} + \gamma x_1 \frac{\partial \mu}{\partial x_2} = \gamma \left( -\frac{x_1 x_2}{R} + \frac{x_1 x_2}{R} \right) \frac{d\mu}{dR} = 0$$

$$T_{33,3} = -\frac{\partial p}{\partial x_3} = 0$$

Avec les deux premières équations d'équilibre et le comportement on obtient :

$$\frac{\partial p}{\partial x_1} = \frac{\partial}{\partial x_1} \left\{ 2(W_1 - W_2) + 2\gamma^2 x_2^2 W_1 \right\} - 2\gamma^2 x_1 \frac{\partial}{\partial x_2} (x_2 W_1)$$

$$\frac{\partial p}{\partial x_2} = \frac{\partial}{\partial x_2} \left\{ 2(W_1 - W_2) + 2\gamma^2 x_1^2 W_1 \right\} - 2\gamma^2 x_2 \frac{\partial}{\partial x_1} (x_1 W_1)$$

En passant en coordonnées polaires :  $x_1 = R \cos \theta$   $x_2 = R \sin \theta$  il vient

$$\frac{\partial p}{\partial \theta} = \frac{\partial p}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial \theta} + \frac{\partial p}{\partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial \theta} = 2 \frac{\partial}{\partial \theta} (W_1 - W_2) + 2\gamma^2 R^2 \frac{\partial W_1}{\partial \theta} = 0$$

car  $W_1$  et  $W_2$  sont indépendants de  $\theta$ . La pression hydrostatique ne dépend que du rayon  $R$  d'où avec la dérivation en chaîne :

$$R \frac{dp}{dR} = x_1 \frac{\partial p}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial p}{\partial x_2} = 2R \left[ \frac{d}{dR} (W_1 - W_2) \right] - 2\gamma^2 R^2 W_1$$

Cette **expression** de la pression est **valable**  $\forall$  le **potentiel**  $W$ . Pour le cas particulier avec *Mooney-Rivlin* dû aux constantes, l'**intégration** de l'équation précédente donne :

$p = -\gamma^2 c_1 (R^2 - a^2) + p_a$  où la constante  $p_a$  est la valeur de la pression à déterminer pour

$R=a$  avec les **équations d'équilibre** aux **limites**  $t_i = T_{ij} n_j$ . D'une manière générale, pour n'importe quelle **surface cylindrique** de rayon  $R$  on a :

$$t_1 = T_{11} \frac{x_1}{R} + T_{12} \frac{x_2}{R} = [-p + 2(W_1 - W_2)] \frac{x_1}{R}$$

$$t_2 = T_{21} \frac{x_1}{R} + T_{22} \frac{x_2}{R} = [-p + 2(W_1 - W_2)] \frac{x_2}{R}$$

$$t_3 = T_{31} \frac{x_1}{R} + T_{32} \frac{x_2}{R} = 0$$

qui sont les **composantes** du **vecteur contrainte**  $\vec{t}(\vec{e}_r)$  qui est bien **radial** et qui peut s'écrire :  $\vec{t}(\vec{e}_r) = [-p + 2(W_1 - W_2)]\vec{e}_r$  dans le système de **coordonnées cylindrique** de base  $\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z$ . Pour  $R=a$  on doit avoir  $\vec{t}(\vec{e}_r) = 0$  qui est satisfait si  $p = 2(W_1 - W_2)$ .

L'expression de la pression qui satisfait à la fois les équations d'**équilibre** en **volume** et sur la **surface cylindrique** prend la forme (intégration de l'équation différentielle en R précédente) :

$$p = 2\gamma^2 \int_R^a s W_1 ds + 2(W_1 - W_2) \quad \text{d'où} \quad \vec{t}(\vec{e}_r) = \left( -2\gamma^2 \int_R^a s W_1 ds \right) \vec{e}_r$$

Dans le cas particulier de *Mooney-Rivlin*, l'expression de la pression et du vecteur contrainte deviennent :  $p = -\gamma^2 c_1 (R^2 - a^2) + 2(c_1 - c_2)$   $\vec{t}(\vec{e}_r) = -\gamma^2 c_1 (a^2 - R^2) \vec{e}_r$

Equations d'équilibre **axiales** sur les **faces supérieures** et **inférieures** où il suffit de considérer une section car les contraintes sont indépendantes de  $x_3$  :

$$\vec{t}(\vec{e}_3) = \begin{Bmatrix} T_{31} \\ T_{32} \\ T_{33} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\mu\gamma x_2 \gamma^2 R^2 \\ \mu\gamma x_1 \gamma^2 R^2 \\ -2\gamma^2 \int_R^a s W_1 ds - 2\gamma^2 R^2 W_2 \end{Bmatrix}$$

Les **résultantes** de **cisaillement** sur les faces **sup** et **inf** sont bien **nulles** car on vérifie :

$$\int_S -\mu\gamma x_2 \gamma^2 R^2 dx_1 dx_2 = -\gamma^3 \int_0^a R^4 dR \int_0^{2\pi} \sin \theta d\theta = 0$$

et même chose pour l'autre composante (donc pas d'efforts tranchants).

Par contre, il y a bien un **effort normal N** non nul pour maintenir la longueur du barreau constante :

$$N = \int_S T_{33} dx_1 dx_2 = -2\pi\gamma^2 \int_0^a \left\{ 2R \int_R^a s W_1 ds + 2R^3 W_2 \right\} dR$$

$$\int_0^a R \left( \int_R^a s W_1 ds \right) dR = \left[ \frac{R^2}{2} \int_R^a s W_1 ds \right]_0^a + \frac{1}{2} \int_0^a R^3 W_1 dR = \left[ \frac{R^2}{4\gamma^2} \vec{t}(\vec{e}_r) \cdot \vec{e}_r \right]_0^a + \frac{1}{2} \int_0^a R^3 W_1 dR = \frac{1}{2} \int_0^a R^3 W_1 dR$$

car  $R^2 \vec{t}(\vec{e}_r) \cdot \vec{e}_r \rightarrow 0$  avec  $R \rightarrow 0$ , et  $\vec{t}(\vec{e}_r) = 0$  quand  $R=a$  d'où :

$$N = -2\pi\gamma^2 \int_0^a R^3 (W_1 + 2W_2) dR$$

Le **moment de torsion** se détermine avec l'intégrale des moments élémentaires des contraintes de cisaillement sur la face supérieure ou inférieure :

$$M_t = \int_S (x_1 T_{23} - x_2 T_{31}) dS = \int_0^a \int_0^{2\pi} \mu\gamma R^3 dR d\theta = 2\pi\gamma \int_0^a \mu R^3 dR$$

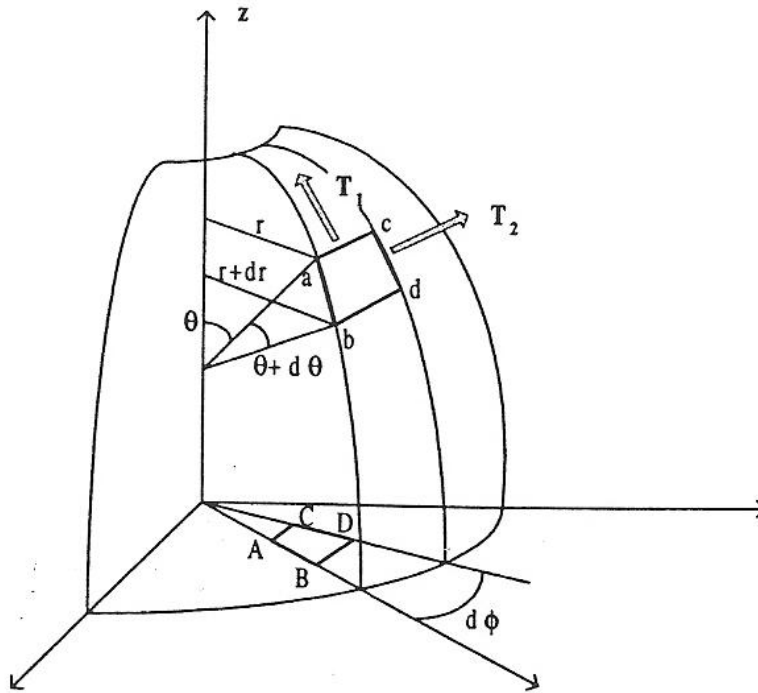
Dans le cas particulier de *Mooney-Rivlin* on obtient :

$$N = -\frac{1}{2}(c_1 + 2c_2)\pi\gamma^2 a^4 \quad M_t = (c_1 + c_2)\pi\gamma a^4$$

Comme en petites déformations, le **rapport**  $M_t / \gamma$  constitue la **rigidité de torsion**.

4.2.5.4 Gonflement quasi-statique d'une membrane initialement plane

Dans l'état initial non déformé considérons une **membrane circulaire** de rayon R fixée sur son contour ( $R = R_0$ ) dans un système de coordonnées polaires  $(R, \Phi, Z = 0)$  dans le plan  $Z=0$ . Elle se **gonfle** de façon quasi-statique sous l'effet d'une **pression intérieure** P. Dans l'état déformé l'épaisseur initialement  $h_0$  est alors notée h.



Soient 4 points A,B,C,D de la membrane **non-déformée** et a,b,c,d leurs positions respectives sur la membrane **déformée**. L'hypothèse de **symétrie de révolution** permet de définir les trois **élongations principales** (voir figure la transformation de ABCD en abcd):

**Méridienne** :  $\lambda_1 = \frac{ab}{AB} = \frac{\sqrt{dr^2 + dz^2}}{dR}$       **circumférentielle** :  $\lambda_2 = \frac{ac}{AC} = \frac{rd\Phi}{Rd\Phi} = \frac{r}{R}$

**Normale** :  $\lambda_3 = \frac{h}{h_0}$

Ces trois élongations sont fonctions de la seule variable R et sont liées entre elles par l'hypothèse d'**incompressibilité** :  $I_3 = \lambda_1^2 \lambda_2^2 \lambda_3^2 = 1$ . On admet que la membrane suit le modèle hyperélastique de *Mooney-Rivlin*:  $W = c_1(I_1 - 3) + c_2(I_2 - 3)$ , cas simplifié d'un **élastomère** par exemple. On va établir les équations qui donnent le **système d'équations différentielles à résoudre numériquement** pour obtenir **la déformée** de la membrane. Les équations d'équilibre d'une **membrane mince** (état plan de contrainte) s'écrivent :

$\frac{dT_1}{dR} + \frac{1}{r}(T_1 - T_2) = 0$  (2-5-1)      et       $\frac{T_1}{\rho_1} + \frac{T_2}{\rho_2} = P$  (2-5-2) où les dénominateurs

sont les **rayons de courbure** relatifs aux directions principales **méridienne** et **circumférentielle** (voir figure), P est la pression interne supposée uniforme. Les **tensions intégrées**  $T_i$  sont reliées aux **contraintes principales** de Cauchy notées ici  $\sigma_i$  par :

$$T_i = \sigma_i h = \sigma_i \lambda_3 h_0 = \frac{\sigma_i h_0}{\lambda_1 \lambda_2}.$$

Des considérations **géométriques** permettent d'écrire les équations de  $\lambda_2(R)$  et  $z(R)$  :

$$\frac{d\lambda_2}{dR} = \frac{1}{R}(\lambda_1 \cos \theta - \lambda_2) \quad (2-5-3) \quad \text{et} \quad \frac{dz}{dR} = \lambda_1 \sin \theta \quad (2-5-4)$$

Avec l'équation d'équilibre (2-5-2) et les relations géométriques, on obtient après quelques calculs en exprimant les rayons de courbures, l'équation de  $\theta(R)$  :

$$\frac{d\theta}{dR} = \frac{\lambda_1}{T_1} \left( P - \frac{T_2 \sin \theta}{R \lambda_2} \right) \quad (2-5-5) \quad \text{on rajoute la condition} \quad \frac{dP}{dR} = 0 \quad (2-5-6) \quad \text{pour prendre}$$

en compte l'uniformité de la pression à l'intérieure de la bulle.

Dans ce **système différentiel**, il faut ajouter des **conditions aux limites** et la **loi de comportement** hyperélastique. Dans la suite on utilise les **variables réduites**:  $T_i/h_0, PR_0/h_0, R/R_0, r/R_0, z/R_0$ . Ces variables **adimensionnées** laissent inchangé le système d'équations précédent et on **conserve les mêmes notations** pour ces variables. Avec le **comportement hyperélastique** défini ci-dessus on obtient les **tensions réduites** :

$$T_1 = 2 \left[ \frac{\lambda_1}{\lambda_2} - \frac{1}{\lambda_1^3 \lambda_2^3} \right] (c_1 + \lambda_2^2 c_2) \quad (2-5-7) \quad T_2 = 2 \left[ \frac{\lambda_2}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_1^3 \lambda_2^3} \right] (c_1 + \lambda_1^2 c_2) \quad (2-5-8)$$

L'équation d'équilibre (2-5-1) et (2-5-7) et (2-5-8) permet d'obtenir l'équation qui manquait de  $\lambda_1(R)$  :

$$\frac{d\lambda_1}{dR} = \frac{1}{A} \frac{1}{R} [(\lambda_1 \cos \theta - \lambda_2)B + C] \quad (2-5-9)$$

où A, B et C sont des fonctions des elongations  $\lambda_i$  :

$$A = 2 \left[ c_1 \left( \frac{1}{\lambda_2} + \frac{3}{\lambda_1^4 \lambda_2^3} \right) + c_2 \left( \lambda_2 + \frac{3}{\lambda_1^4 \lambda_2} \right) \right]$$

$$B = 2 \left[ c_1 \left( -\frac{1}{\lambda_1} + \frac{3}{\lambda_1^3 \lambda_2^4} \right) + c_2 \left( \lambda_1 + \frac{3}{\lambda_2^4 \lambda_1} \right) \right]$$

$$C = 2 \left[ c_1 \left( \frac{\lambda_1}{\lambda_2} - \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right) + c_2 \left( \frac{1}{\lambda_1 \lambda_2^3 - \lambda_1^3 \lambda_2} \right) \right]$$

$T_1, T_2, A, B, C$  sont des fonctions des inconnues  $\lambda_1(R), \lambda_2(R), \theta(R), z(R)$  pour  $0 \leq R \leq 1$

### Conditions aux limites

- Au pôle l'état de déformation est **équi-biaxial** et le problème est **symétrique** par rapport à l'axe Oz donc :  $\theta(R=0)=0$  et de plus  $\lambda_1(R=0) = \lambda_2(R=0)$
- Sur le **contour** la membrane est **bloquée** :  $\lambda_2(R=1) = 1$  et  $z(R=1) = 0$
- **Soit** la **pression** est **imposée** et dans ce cas :  
 $P(R=0)=P_0$  ou  $P(R=1)=P_0$ , c'est équivalent car la pression est uniforme
- **Soit** la **géométrie** est **imposée** et dans ce cas :  
 $\lambda_1(R=0) = \lambda_2(R=0) = \lambda_0$  **ou** plus souvent **une hauteur à atteindre**  $z(R=0)=z_0$

★ **Remarque :**

C'est la résolution d'un système **différentiel** du **premier ordre non-linéaire** en R avec des conditions aux deux bornes de l'intervalle [0,1]. Voir l'analyse numérique et certaines bibliothèques mathématiques pour les **différentes techniques** de **résolution** à utiliser.

### 4.3 THERMODYNAMIQUE RATIONNELLE

Les **lois de comportement** devraient **donner** :

- ♦ l'énergie libre  $\psi = e - \theta \eta$
- ♦ l'entropie spécifique  $\eta$
- ♦ le tenseur des contraintes  $T$
- ♦ le vecteur flux de chaleur  $\vec{\varphi}$

en **fonction des variables d'état**. Le contenu physique de la théorie résulte de la liste des variables d'état. La thermodynamique est alors utilisée pour **restreindre** les **lois de comportement possibles** et ne conserver que celles qui sont **compatibles** avec le **second principe**.

$$\text{Nous aurons (dissipation) : } -\rho \left( \dot{\psi} + \eta \dot{\theta} \right) + T : D - \frac{\vec{q} \cdot \vec{g}}{\theta} \geq 0 \quad g_i = \theta_{,i}$$

$$\text{ou, en lagrangien : } -\rho_0 \left( \dot{\psi} + \eta \dot{\theta} \right) + S : \dot{E} - \frac{\vec{\varphi} \cdot \vec{G}}{\theta} \geq 0 \quad \text{avec } G_I = \theta_{,I}$$

en respectant par ailleurs deux règles :

**Règle 1 :** équiprésence :  $\psi, \eta, T$  et  $\vec{q}$  dépendront des **mêmes variables**.

**Règle 2 :** l'inégalité de Clausius-Duheim doit être identiquement vérifiée pour tout processus thermodynamique admissible (c'est-à-dire pour toute fonction  $x(X, t)$  et  $\theta(X, t)$ ).

La **méthode opératoire** ainsi définie est usuellement appelée **thermodynamique rationnelle**.

#### 4.3.1 Application à l'hyperélasticité

La liste des variables utilisées est  $F, \theta$ , ainsi  $\psi, \eta, T$  et  $\vec{q}$  dépendront-elles de ces variables. Cependant, en appliquant le principe d'indifférence matérielle, nous retrouvons les résultats démontrés au chapitre 3.

En lagrangien,  $\psi, \eta, S$  et  $\vec{\varphi}$  dépendent de  $E$  et  $\theta$ .

En eulérien isotrope,  $\psi, \eta, T$  et  $\vec{q}$  seront fonctions isotropes de  $B$  et  $\theta$ .

Nous traiterons uniquement le cas particulier eulérien isotrope ainsi nous aurons pour **l'énergie libre** :

$$\dot{\psi} = \frac{\partial \psi}{\partial B} : \dot{B} + \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \dot{\theta} = \dot{u} - \eta \dot{\theta} \quad \text{car} \quad \Psi(B, \theta)$$

En utilisant le calcul fait au § 4.2.2, dû à l'isotropie on obtient :

$$\dot{\psi} = 2 \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{B}} \mathbf{B} : \mathbf{D} + \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \dot{\theta}$$

L'inégalité de Clausius-Duheim devient alors :

$$(17) \quad \underbrace{-\rho \left( \frac{\partial \psi}{\partial \theta} + \eta \right)}_{\uparrow} \dot{\theta} + \underbrace{\left( T - 2 \rho \mathbf{B} \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{B}} \right)}_{\uparrow} : \underbrace{\mathbf{D}}_{\uparrow} - \underbrace{\frac{\vec{q} \cdot \vec{g}}{\theta}}_{\uparrow} \geq 0$$

Si nous fixons  $F$  et  $\theta$ , alors, d'après les lois de comportement, nous **fixerons** tous les **termes soulignés**. On peut alors choisir arbitrairement  $\dot{\theta}$ ,  $\mathbf{D}$  et  $\vec{g}$ , pour que **l'inégalité de Clausius-Duheim** soit identiquement **vérifiée**. Nous devons donc avoir :

$$(18) \quad \begin{cases} \eta + \frac{\partial \psi}{\partial \theta} = 0 \\ T = 2 \rho \mathbf{B} \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{B}} \\ \vec{q} = \vec{0} \end{cases}$$

La première équation donne l'entropie comme dérivée de l'énergie libre par rapport à la température, c'est une relation thermodynamique classique. La seconde est la loi élastique isotrope déjà obtenue dans le cas mécanique au § 4.2.2. La troisième correspond à un matériau isolant thermique. Nous avons donc ainsi construit un matériau thermo-hyperélastique isolant.

Pour aller plus loin, il faudrait augmenter la liste des variables.

### 4.3.2 Cas du matériau viscoélastique de Kelvin-Voigt

La liste des **variables** est :  $F$ ,  $\theta$ ,  $\vec{g}$  et  $\dot{F}$ .

Ainsi  $\psi$ ,  $\eta$ ,  $T$  et  $\vec{q}$  dépendront-elles de ces quatre variables. De plus si nous appliquons le principe d'indifférence matérielle, alors on montre qu'en lagrangien  $\psi$ ,  $\eta$ ,  $S$  et  $Q$  dépendront de  $E$ ,  $\theta$ ,  $\vec{G}$  et  $\dot{E}$  et que pour un matériau isotrope,  $\psi$ ,  $\eta$ ,  $T$  et  $\vec{q}$  seront fonctions isotropes de  $B$ ,  $\theta$ ,  $g$  et  $D$ . Si nous nous limitons au cas des matériaux isotropes, l'inégalité de Clausius-Duheim s'écrit :

$$(19) \quad \underbrace{-\rho \left( \frac{\partial \psi}{\partial \theta} + \eta \right)}_{\uparrow} \dot{\theta} + \underbrace{\left( T - 2 \rho \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{B}} \mathbf{B} \right)}_{\uparrow} : \underbrace{\mathbf{D}}_{\uparrow} - \rho \underbrace{\left( \frac{\partial \psi}{\partial \vec{g}} \cdot \dot{\vec{g}} \right)}_{\uparrow} - \rho \underbrace{\frac{\partial \psi}{\partial D}}_{\uparrow} : \underbrace{\dot{D}}_{\uparrow} - \underbrace{\frac{\vec{q} \cdot \vec{g}}{\theta}}_{\uparrow} \geq 0$$

Si nous **fixons**  $F$ ,  $\theta$ ,  $\bar{g}$  et  $\dot{F}$ , alors les lois de comportement nous permettent de dire que l'on **fixe** tous les **termes soulignés** de l'inégalité ci-dessus. On peut alors choisir arbitrairement  $\dot{\theta}$ ,  $\dot{D}$  et  $\dot{g}$ ; pour que l'inégalité soit identiquement vérifiées, il faut que :

$$\eta = -\frac{\partial \Psi}{\partial \theta} \quad \frac{\partial \psi}{\partial g} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial \psi}{\partial D} = 0$$

Par contre  $T$  et  $\bar{q}$  dépendront des quatre variables initiales ; nous écrivons que :

$$T = T^c (B, \theta) + T^v (B, \theta, \bar{q}, D)$$

(20)	$T = 2 \rho B \frac{\partial \psi}{\partial B} + T^v (B, \theta, \bar{q}, D)$		
	<table style="width: 100%; border: none;"> <tr> <td style="width: 50%; border: none;">partie réversible</td> <td style="width: 50%; border: none;">partie visqueuse</td> </tr> </table>	partie réversible	partie visqueuse
partie réversible	partie visqueuse		

Le second principe s'écrira alors :

$$T^v : D - \frac{\bar{q} \cdot \bar{g}}{\theta} \geq 0$$

## 4.4 THERMODYNAMIQUE DES PROCESSUS IRREVERSIBLES LINEAIRES

### 4.4.1 Potentiels de dissipation

Nous avons vu que la **dissipation**, dont on a déjà obtenu diverses formes ( $\Phi = -\rho \dot{u} + T : D \dots$ ), représente la **production interne d'entropie**, et doit donc toujours être **positive** ou **nulle**. De manière générale, on peut écrire la dissipation sous la forme d'un produit de facteurs :

$$(21) \quad \Phi = \sum_i X_i x_i = \underline{X}^T \underline{x} \geq 0$$

où :  $\underline{X}$  **forces thermodynamiques** (fonctions d'état) (Ex. : les **contraintes**)  
 $\underline{x}$  **flux thermodynamiques** (dérivées temporelles même si ce ne sont pas explicitement des dérivées par rapport au temps  $\dot{x}$ ). (Ex. : **les taux de déformation**)

A l'équilibre  $\underline{X} = 0$ ,  $\underline{x} = 0$ . Quand on n'est plus à l'équilibre, des « lois complémentaires » relient  $\underline{X}$  à  $\underline{x}$ .

$\underline{X}$  caractérise l'**écart** à l'**équilibre**  
 $\underline{x}$  représente la **vitesse** de **retour** vers l'**équilibre**

En TPI linéaire, on écrit une **relation linéaire** entre  $\underline{x}$  et  $\underline{X}$

$$(22) \quad \underline{X} = \underline{\underline{L}} \underline{x}$$

$$(23) \quad X_i = L_{ij}x_j \quad \text{avec} \quad L = L^T$$

où  $\underline{\underline{L}}$  est appelée matrices des **coefficients phénoménologiques**, est **définie positive**, en vertu du second principe. La matrice L est symétrique, cette propriété est connue sous le nom de **relation de symétrie d'Onsager**.

### Potentiel de dissipation

$$(24) \quad \Omega(x) = \frac{1}{2} \underline{x}^T \underline{\underline{L}} \underline{x} = \frac{1}{2} \sum_{ij} L_{ij} x_i x_j = \frac{1}{2} \Phi = \frac{1}{2} \underline{x}^T \underline{X}$$

On a :  $\frac{\partial \Omega}{\partial \underline{x}} = \underline{\underline{L}} \underline{x}$ , d'où  $\underline{X}$  **dérive du potentiel**  $\Omega$  :

$$(25) \quad \boxed{\underline{X} = \frac{\partial \Omega}{\partial \underline{x}}}$$

On peut également inverser ces équations :  $\underline{x} = \frac{\partial \omega}{\partial \underline{X}}$

Les formes quadratiques  $\Omega(x)$  et  $\omega(X)$  sont duales l'une de l'autre.

Il est aussi possible d'utiliser comme variables indépendantes, ni tous les flux  $\underline{x}$ , ni toutes les forces  $\underline{X}$ , mais plutôt certaines composante  $x_1$  des flux et les composantes complémentaires  $X_2$  des forces.

La **démarche générale** de mise en œuvre de la TPI comportera trois étapes :

1. **choisir** la forme du **potentiel thermodynamique** (par exemple l'énergie libre  $\psi$ ) en fonction d'un certain nombre de **variables** d'état.
2. utiliser **l'inégalité de Clausius-Duheim** pour construire la **dissipation** et **identifier** les **forces** et les **flux**.
3. choisir **la forme** du **potentiel de dissipation**.

#### 4.4.2 Matériaux hyperélastiques avec la TPI

Pour construire en TPI le modèle hyperélastique isotrope, on va faire les hypothèses suivantes :

1. les **variables d'état** du système sont la **déformation** et la **température** : F,  $\theta$

$$(26) \quad \psi = \psi(F, \theta) \xrightarrow{\text{isotropie}} \psi = \psi(B, \theta)$$

2. On calcule la **dissipation** en écrivant :

$$\rho \dot{\psi} = 2 \rho B \frac{\partial \psi}{\partial B} : D + \rho \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \cdot \dot{\theta}$$



où :  $2 \rho B \frac{\partial \psi}{\partial B}$  est un tenseur symétrique, puisque  $\psi$  est isotrope (cf. § 4.2.2). On reporte cette expression dans l'inégalité de Clausius-Duheim, et on a

$$(27) \quad -\rho \left[ \eta + \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right] \dot{\theta} + \left[ T - 2 \rho B \frac{\partial \psi}{\partial B} \right] : D - \frac{\bar{q} \cdot \bar{g}}{\theta} \geq 0$$

On identifie alors les **forces**  $\underline{X}$  et les **flux** thermodynamiques  $\underline{x}$  :  $\Phi = \underline{X}^T \underline{x} \geq 0$

$$\underline{X} = \begin{bmatrix} -\rho \left[ \frac{\partial \psi}{\partial \theta} + \eta \right] \\ T - 2 \rho B \frac{\partial \psi}{\partial B} \\ \bar{g} \end{bmatrix} \quad \underline{x} = \begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ D \\ -\bar{q}/\theta \end{bmatrix}$$

3. Hypothèse d'hyperélasticité : la seule source de dissipation est la conduction thermique.

$$(28) \quad \Omega = \Omega \left( -\frac{\bar{q}}{\theta} \right) = \frac{1}{2} \Phi$$

où  $\Omega$  est une forme quadratique. Les dérivations du potentiel donnent alors :

$$(29) \quad \begin{cases} -\rho \left[ \frac{\partial \psi}{\partial \theta} + \eta \right] = \frac{\partial \Omega}{\partial \dot{\theta}} = 0 & \Rightarrow \quad \eta = -\frac{\partial \psi}{\partial \theta} \\ T - 2 \rho B \frac{\partial \psi}{\partial B} = \frac{\partial \Omega}{\partial D} = 0 & \Rightarrow \quad T = 2 \rho B \frac{\partial \psi}{\partial B} \\ \bar{g}_i = \frac{\partial \Omega}{\partial \left( -\frac{\bar{q}}{\theta} \right)} \end{cases}$$

On retrouve donc pour  $T$  et  $\eta$  les lois obtenues au § 4.3.1. La loi de conduction est décrite par le potentiel  $\Omega$  ou plutôt par le potentiel de dissipation dual  $\omega(\bar{g})$  car il est plus habituel d'exprimer  $\bar{q}$  flux de chaleur en fonction de  $\bar{g}$  gradient de température plutôt que le contraire. (En toute rigueur il s'agit d'ailleurs plutôt du potentiel  $\chi(\bar{g}, \dot{\theta}, D) = \omega(\bar{g})$  mais après avoir éliminé les termes en  $\dot{\theta}$  et  $D$  on peut se permettre de les oublier).

$$-\frac{\bar{q}}{\theta} = \frac{\partial \omega}{\partial \bar{g}}$$

avec

$$\omega = \frac{1}{2} \bar{g} \cdot k \bar{g} = \frac{1}{2} k_{ij} g_i g_j$$

où  $k$  est symétrique. On a donc :

$$-\bar{q} = \theta k \bar{g} \text{ que l'on écrit :}$$

$$(30) \quad \boxed{\bar{q} = -K \bar{g}}$$

C'est la **loi de Fourier**, équation de base des **calculs de thermique**. K le tenseur de conductivité est symétrique :  $K = K^T$

Dans le cas isotrope, on peut utiliser les théorèmes de représentation :

$$\psi = \psi (B, \theta) = \psi (B_I, B_{II}, B_{III}, \theta) = \psi (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \theta)$$

où  $B_I, B_{II}, B_{III}$  sont **les invariants** principaux de B

$$B_I = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2$$

$$B_{II} = \lambda_1^2 \lambda_2^2 + \lambda_2^2 \lambda_3^2 + \lambda_3^2 \lambda_1^2$$

$$B_{III} = \lambda_1^2 \lambda_2^2 \lambda_3^2$$

$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  sont comme d'habitude les **allongements principaux**, c'est-à-dire les valeurs propres de  $V = B^{1/2}$  (ou de U)

$$\Omega = \Omega (B, \theta, \vec{g}) = \frac{1}{2} \Phi = \frac{1}{2\theta} \vec{g} (k_0 1 + k_1 B + k_2 B^2) \vec{g}$$

avec  $k_i (B_I, B_{II}, B_{III} \text{ et } \theta)$   $\vec{q} = -\theta \frac{\partial \Omega}{\partial \vec{g}} = - (k_0 1 + k_1 B + k_2 B^2) \vec{g}$

En théorie linéarisée :

$$(31) \quad \vec{q} = -k \vec{g}$$

Loi de Fourier, où  $k = k_0 + k_1 + k_2$  pour  $B = 1$ , est le coefficient de conduction thermique scalaire. On remarquera sur cet exemple les **différences** entre la TPI et la thermodynamique rationnelle :

**a.** Dans la formulation, la TPI distingue les variables d'état (intervenant dans le potentiel thermodynamique) des forces et flux thermodynamiques (intervenant dans les potentiels de dissipation), la thermodynamique ne fait pas a priori cette distinction. La démarche de la TPI est donc beaucoup plus physique car ses hypothèses (nature des variables d'état, origine des dissipations) se rattachent directement à la physique. La **modélisation** d'un **matériau** donné nécessite un minimum de **connaissance de sa physique** et il est préférable d'utiliser cette approche. Au contraire la thermodynamique rationnelle s'imposera pour tester l'influence de telle ou telle hypothèse, ou dégager une structure générale sans se référer à un matériau particulier.

**b.** Au niveau des résultats, à nouveau la TPI est plus **spécifique**. Elle conduit à un tenseur de conductivité thermique symétrique, alors que la T.R. ne lui imposait que d'être défini positif. Cette symétrie est une hypothèse physique confirmée par l'expérience. En général, la TPI est beaucoup **plus restrictive** que la TR, ce qui est plutôt un atout. Le risque majeur en MMC est plus un excès qu'un manque de généralité.

#### 4.4.3 Cas des matériaux viscoélastique de Kelvin-Voigt en TPI

En thermodynamique rationnelle, on avait rajouté la variable D à la liste des variables. En TPI, il est clair que c'est un flux thermodynamique.

1. Nous prendrons donc encore :

$$(32) \quad \psi = \psi (\theta, F)$$

2. On obtient donc la même expression que (27) de la dissipation, les mêmes forces et les mêmes flux.

3. Par contre, on rajoutera D à la liste des variables intervenant dans  $\Omega$ .

$$(33) \quad \Omega = \Omega \left( -\frac{\bar{q}}{\theta}, D \right)$$

Il existe **deux sources de dissipation** dans le matériau :

- ◇ la dissipation **thermique** :  $-\frac{\bar{q}}{\theta} \bullet \bar{g}$
- ◇ la dissipation **visqueuse** :  $\left( T - 2 \rho B \frac{\partial \psi}{\partial B} \right) : D = T^v : D$

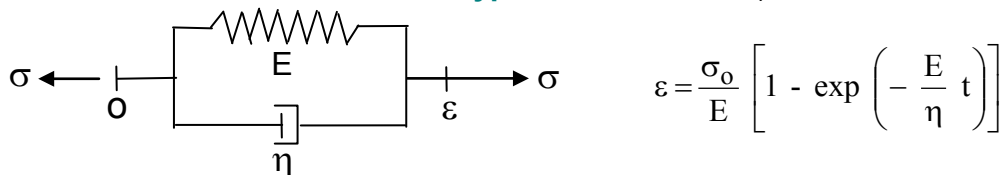
On a maintenant les relations linéaires suivantes :

$$(34) \quad \begin{cases} T - 2 \rho B \frac{\partial \psi}{\partial B} = \frac{\partial \Omega}{\partial D} = T^v \\ \bar{g} = \frac{\partial \Omega}{\partial \left( -\frac{\bar{q}}{\theta} \right)} \end{cases}$$

On a décomposé T en partie **élastique** et **visqueuse** :

$$(35) \quad \boxed{T = T^e + T^v \quad \text{avec} \quad T^e = 2 \rho B \frac{\partial \psi}{\partial B}}$$

Ceci généralise bien aux **grandes déformations** le modèle analogique de Kelvin-Voigt du ressort et amortisseur en parallèle : (**Hyper-viscoélasticité**)



Il n'y a pas de couplage entre la loi mécanique et la loi thermique (principe de Curie, qui découle de l'isotropie). On a :

$$(36) \quad \begin{cases} \bar{q} = -K\bar{g} \\ T^e = 2 \rho B \frac{\partial \psi}{\partial B} \\ T^v = \frac{\partial \Omega}{\partial D} \end{cases}$$

C'est-à-dire d'une part la loi de Fourier  $K(B, \theta)$  comme en élasticité ; d'autre part la loi visqueuse (théorème de représentation) :

$$T^v = \frac{\partial \Omega}{\partial D} = \alpha_0 (\text{tr } D)1 + \alpha_1 \text{tr } (BD) B + \alpha_2 \text{tr } (B^2 D) B^2 + \beta_0 D + \beta_1 (BD + DB) + \beta_2 (B^2 D + BD^2)$$

avec  $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \beta_0, \beta_1, \beta_2$  fonctions de  $B_I, B_{II}, B_{III}$  et  $\theta$  à déterminer par les essais (souvent très difficiles !).

**Cas particulier d'un fluide :**

$$T^e = 2 \rho_0 B \frac{\partial \psi}{\partial B} = \rho_0 \frac{\partial \psi}{\partial J} 1 = -p 1$$

On a :

$$(37) \quad \begin{cases} \vec{q} = - K (J, \theta) \vec{g} \\ T^v = \lambda (J, \theta) \text{tr} D 1 + 2 \mu (J, \theta) D \\ p = - \rho_0 \frac{\partial \psi}{\partial J} = p (J, \theta) \\ \eta = - \frac{\partial \psi}{\partial \theta} = \eta (J, \theta) \end{cases}$$

Fluide **visqueux newtonien compressible** et **conducteur**

#### 4.4.4 Milieux avec variables internes scalaires

On ne peut généraliser qu'en augmentant la liste des variables d'état c'est-à-dire en rajoutant aux variables « observables »  $F, \theta$  des **variables supplémentaires** que nous noterons  $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = \underline{\alpha}$ . Ces variables sont appelées **variables internes ou cachées**, car n'intervenant pas dans les équations du mouvement, elles ne peuvent pas être mesurées directement. D'un point de vue physique, elles sont une **caractérisation macroscopique de l'état microscopique du matériau**. Dans le cas isotrope nous prenons donc :

$$(38) \quad \psi = \psi (B, \theta, \underline{\alpha}).$$

L'inégalité de Clausius-Duheim s'écrit alors :

$$(39) \quad - \rho \frac{\partial \psi}{\partial \underline{\alpha}} \underline{\dot{\alpha}} + \left[ T - 2 \rho B \frac{\partial \psi}{\partial B} \right] : D - \frac{\vec{q} \cdot \vec{g}}{\theta} \geq 0$$

Comme plus haut on supprime le terme  $\dot{\theta}$  en postulant :  $\eta = - \frac{\partial \psi}{\partial \theta}$

On sépare forces et flux thermodynamiques :

$$\underline{X} = \begin{bmatrix} \underline{A} = - \rho \frac{\partial \psi}{\partial \underline{\alpha}} \\ T - 2 \rho B \frac{\partial \psi}{\partial B} \\ \vec{g} \end{bmatrix} \quad \underline{x} = \begin{bmatrix} \underline{\dot{\alpha}} \\ D \\ - \frac{\vec{q}}{\theta} \end{bmatrix}$$

On peut démontrer le **découplage** thermique-mécanique et le cas particulier des matériaux non visqueux s'obtient en annulant la dissipation non visqueuse :

$$\Omega = \Omega (\dot{\alpha})$$

$$T^v = 0$$

$$A = \frac{\partial \Omega}{\partial \underline{\dot{\alpha}}} = \underline{L} \underline{\dot{\alpha}} \quad \text{avec } L = L (B, \alpha)$$

Ce qui s'écrit aussi :

$$(40) \quad \begin{cases} T = 2 \rho B \frac{\partial \psi}{\partial B} \\ \underline{\dot{\alpha}} = \underline{\ell} \underline{A} \end{cases}$$

$\dot{\underline{\alpha}} = \underline{\ell} \underline{A}$  est la **loi d'évolution des variables internes** et puisque  $A = -\frac{\partial W}{\partial \alpha}$  on a une équation différentielle qui donne  $\underline{\alpha}$  par intégration. Il suffit ensuite de reporter dans la loi de comportement :


$$T = 2 \rho B \frac{\partial \Psi}{\partial B} = T (B, \alpha)$$

La loi d'évolution des variables internes peut-être obtenue à partir des essais de relaxation. Dans le cas de variables internes tensorielles, la situation est plus complexe car la dérivation temporelle nécessite une dérivée objective.

### 4.4.5 Configuration intermédiaire

Avant d'introduire la (visco) plasticité dans le cadre la TPI **non-linéaire**, nous précisons la notion de configuration intermédiaire relâchée libre de contraintes qu'implique la **décomposition multiplicative** du gradient de la déformation ou  $F^e$  apparaît comme une variable interne tensorielle.

Généralement un milieu **élasto(visco)plastique** peut souvent être décrit par le modèle rhéologique de type Maxwell où pour définir la puissance réversible et la puissance dissipée, on opère une partition des déformations :



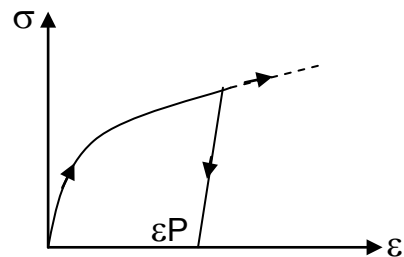
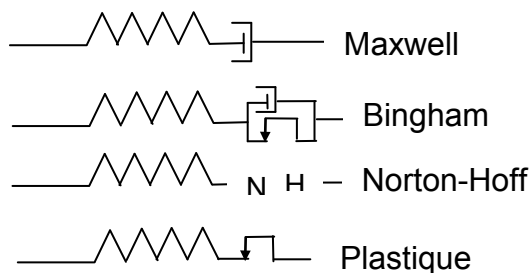
(41)

$\left\{ \begin{array}{l} \epsilon_{ij} = \epsilon_{ij}^e + \epsilon_{ij}^p \\ \epsilon = \epsilon^e + \epsilon^p \end{array} \right.$ 

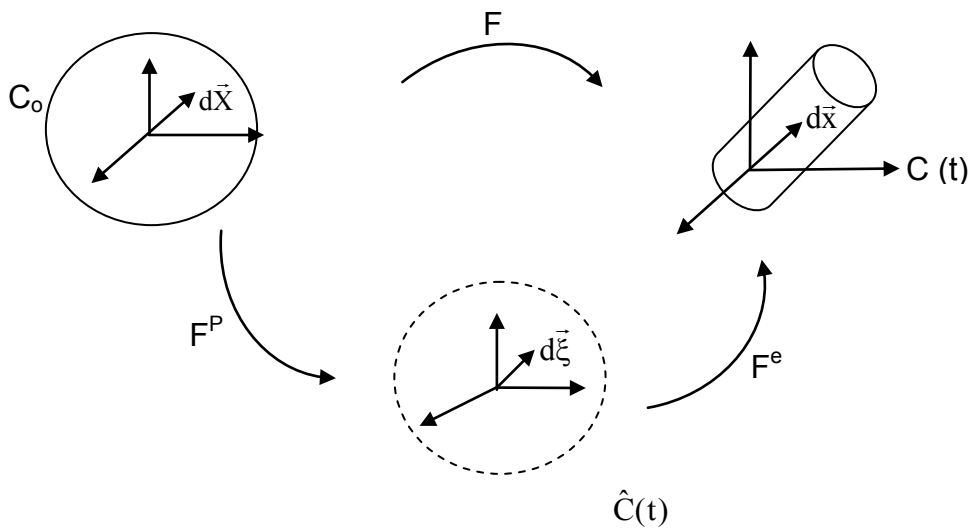
en petites déformations

décomposition additive

avec selon le cas :



$\epsilon^P$  = déformation résiduelle après relâchement des contraintes (ex : Maxwell – Plasticité). L'extension aux **grandes déformations** s'obtient en introduisant une **configuration intermédiaire relâchée** libre de contraintes  $\hat{C}(t)$ .



$$\begin{cases} d\vec{X} = F^{-1} dx \\ d\vec{x} = F d\vec{X} = F_e d\vec{\xi} \\ d\vec{\xi} = F_p d\vec{X} \end{cases}$$

(42)  $F = F^e F^p$

( $H = H^e + H^p$  en **petites déformations**, décomposition additive qui donne une décomposition multiplicative en grandes déformations).

$$F^e = 1 + H^e \quad F^p = 1 + H^p \quad F = F^e F^p = 1 + H^e + H^p + H^e H^p \approx 1 + H$$

**Thermodynamique**

◆ En petites déformations et théorie mécanique (dissipation mécanique seule) :

(43)  $\rho \psi = W(\epsilon_{ij}^e) = \frac{1}{2} A_{ijkl} \epsilon_{ij}^e \epsilon_{kl}^e$

Dissipation :

(44)  $\Phi = \sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij} - \dot{W} = \frac{\partial W}{\partial \epsilon_{ij}^e} \dot{\epsilon}_{ij}^p + \left( \sigma_{ij} - \frac{\partial W}{\partial \epsilon_{ij}^e} \right) \dot{\epsilon}_{ij}$

où :  $\frac{\partial W}{\partial \epsilon_{ij}^e} \dot{\epsilon}_{ij}^p = \sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij}^p$  est la **dissipation plastique**

car  $\left( \sigma_{ij} - \frac{\partial W}{\partial \epsilon_{ij}^e} \right) \dot{\epsilon}_{ij}$  ne dissipe pas d'où :  $\sigma_{ij} = \frac{\partial W}{\partial \epsilon_{ij}^e} = A_{ijkl} \epsilon_{kl}^e$

◆ En **grandes déformations** on a une démarche analogue :

Avec  $\psi = \psi(B^e)$  pour un matériau **isotrope**, où  $B^e = F^e F^{eT}$

On introduit une **variable interne** ( $F^e$  ou  $F^p$ ) tensorielle

$$\rho \dot{\psi} = 2 \rho \frac{\partial \psi}{\partial B^e} : \dot{B}^e = 2 \rho \frac{\partial \psi}{\partial B^e} : [\dot{F}^e F^{eT} + F^e \dot{F}^{eT}] = 2 \rho \frac{\partial \psi}{\partial B^e} : [L^e B^e]^s$$

ou encore :

$$(45) \quad \rho \dot{\psi} = 2 \rho \frac{\partial \psi}{\partial B^e} B^e : L^e \text{ car } B^e \text{ symétrique}$$

avec le gradient de vitesse élastique :

$$L^e = \dot{F}^e F^{e-1} \text{ mais : } F = F^e F^P \Rightarrow L = L^e + F^e L^P F^{e-1}$$

$$\text{D'où} \quad \rho \dot{\psi} = 2 \rho \frac{\partial \psi}{\partial B^e} B^e : L - 2 \rho \frac{\partial \psi}{\partial B^e} B^e : F^e L^P F^{e-1}$$

$$(46) \quad \rho \dot{\psi} = 2 \rho \frac{\partial \psi}{\partial B^e} B^e : D - 2 \rho \frac{\partial \psi}{\partial B^e} B^e : R^e \underbrace{U^e L^P U^{e-1}}_{D^P} R^{eT}$$

$\bar{D}^P = R^e D^P R^{eT}$  **Taux eulérien de déformation plastique**,  $R^e$  tenseur des rotations élastiques :  $F^e = R^e U^e$ .

En reportant dans l'inégalité de Clausius-Duheim :

$$(47) \quad \Phi = \underbrace{\left( T - 2 \rho \frac{\partial \psi}{\partial B^e} B^e \right) : D}_{\text{pas de dissipation}} + \underbrace{2 \rho \frac{\partial \psi}{\partial B^e} B^e : \bar{D}^P}_{\text{dissipation plastique}}$$

pas de dissipation

dissipation plastique

$$T = 2 \rho \frac{\partial \psi}{\partial B^e} B^e$$

$$T : \bar{D}^P$$

loi hyperélastique

forces thermodynamiques  
flux

## 4.5 THERMODYNAMIQUE DES PROCESSUS IRREVERSIBLES NON-LINEAIRES

### 4.5.1 Potentiel de dissipation

La dissipation  $\Phi$  est toujours le produit scalaire d'un **vecteur force**  $\underline{X}$  et d'un **vecteur flux**  $\underline{x}$  :

$$(48) \quad \Phi = \underline{X}^T \underline{x} \geq 0$$

Dans le cadre linéaire, nous avons défini deux formes quadratiques  $\Omega$  et  $\omega$  duales l'une de l'autre nous conservons cette écriture dans le cas non linéaire avec **deux potentiels** de dissipation  $\Omega(x)$  et  $\omega(X)$  non quadratique et duaux l'un de l'autre. Les lois de la T.P.I. non linéaire s'écrivent alors :

$$(49) \quad \boxed{\underline{X} = \frac{\partial \Omega}{\partial \underline{x}} \quad \text{et} \quad \underline{x} = \frac{\partial \omega}{\partial \underline{X}}}$$

**Cas particulier** : les fluides visqueux incompressibles

Leur loi de comportement s'écrit de façon générale :

$$\boxed{T = -p \mathbf{1} + t(D)}$$

Où  $t(D)$  est une fonction tensorielle a priori non linéaire

$$\Phi = T : D - \rho \dot{u}$$

mais  $\rho \dot{u} = 0$  et  $\text{tr} D = 0$  (incompressibilité)

donc  $\Phi = T^D : D \Rightarrow$

$$(50) \quad \boxed{\begin{cases} \underline{X} = T^D = \frac{\partial \Omega}{\partial D} \\ \underline{x} = D = \frac{\partial \omega}{\partial T^D} \end{cases}}$$

$T^D$  déviateur de  $T$ ,  $\text{tr} T^D = 0$

nous avons également vu au chapitre 3 d'autres exemples :

**Fluide de Norton-Hoff** :  $T = -p \mathbf{1} + K \frac{|D|^n}{|D|} \underline{D}$

(il s'agit de l'extension tensorielle de la loi monodimensionnelle  $\sigma = K \dot{\epsilon}^n$ ).

Avec cette loi nous obtenons :

$$\left\{ \begin{array}{l} T^D = K \frac{|D|^n}{|D|} \underline{D} \\ D = k \frac{|T^D|^N}{|T^D|} \underline{T^D} \end{array} \right. \quad \text{où } nN = 1 \quad \text{et} \quad k = K^{-N}$$

ceci nous permet d'écrire l'expression des **potentiels de dissipation** compte-tenu de (49) et (50) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Omega = \frac{K}{n+1} |D|^{n+1} = \Omega(D) \\ \omega = \frac{k}{N+1} |T^D|^{N+1} = \omega(T^D) \end{array} \right.$$

on a bien  $T^D = \frac{\partial \Omega}{\partial D}$  et  $D = \frac{\partial \omega}{\partial T^D}$



**Fluide de Bingham :**  $T = - p 1 + (2 \mu |D| + k) \frac{D}{|D|}$

$$\begin{cases} T^D = 2 \mu D + k \frac{D}{|D|} \\ D = \frac{1}{2\mu} \langle |T^D| - k \rangle \frac{T^D}{|T^D|} \end{cases}$$

(Le crochet représente la partie positive). D'où les potentiels de dissipation :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Omega = \mu |D|^2 + k |D| \quad \text{et} \quad \omega = \frac{1}{4\mu} \langle |T^D| - k \rangle^2 \end{array} \right.$$

**Cas du fluide parfaitement plastique :**

alors  $T^D = k \frac{D}{|D|} \Rightarrow \Omega = k |D|$

Problème : comment obtenir D et donc  $\omega$  ?

### 4.5.2 Principe du travail maximal

En **plasticité**, le comportement est **indépendant** des vitesses de déformation. On peut donc écrire formellement :

$$(51) \quad \underline{X}(\underline{x}) = \underline{X}(\lambda \underline{x}) \quad \forall \lambda > 0$$

$\underline{X}$  est une fonction homogène de degré 0 (positivement homogène). Cette relation traduit le fait que la réponse est identique si l'on accélère le processus. (f homogène de degré k si  $\frac{\partial f}{\partial x} x = kf(x)$ ). Par inversion de (51), on ne pourra donc pas obtenir  $\underline{x}$ , mais au mieux **sa**

**direction**.

$$\underline{x} = \lambda \underline{y}(\underline{X}) \quad \text{(loi d'écoulement)}$$

Les n composantes de X ( $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$ ) dépendent des n-1 paramètres fixant la direction de  $\underline{x}$ , le module de  $\underline{x}$  étant inconnu. Il existe donc une relation  $f(\underline{X}) = 0$  entre les n composantes de  $\underline{X}$ .

$f(X)$  désigne la **fonction seuil** ou **le critère de plasticité**.

La loi inverse s'écrira alors :

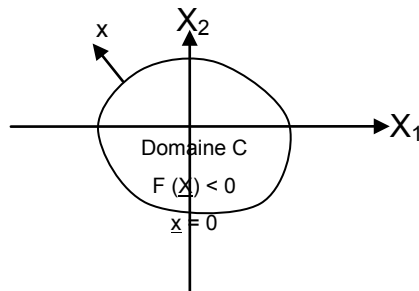
$$\begin{array}{ll} \underline{x} = \lambda \underline{y}(\underline{X}) & \text{si} \quad f(\underline{X}) = 0 \\ \underline{x} = 0 & \text{si} \quad f(\underline{X}) \neq 0 \end{array}$$

Pour **définir une loi plastique**, il faut donc :

- ◆ une **fonction seuil** (plus généralement une surface seuil limitant un **domaine élastique C**)
- ◆ une **loi d'évolution donnant la direction** de  $\underline{x}$  (la loi d'écoulement)

Exemple : Ellipse de Von-Mises en contrainte plane :  $f(\sigma) = \sigma_1^2 - \sigma_1 \sigma_2 + \sigma_2^2 - \bar{\sigma}^2 = 0$

Surface  $f(\underline{X}) = 0$



En **plasticité parfaite**, le domaine élastique ne change pas et la fonction  $f(\underline{X})$  est définie une fois pour toute. Dès que  $\underline{X}$  est sur la surface,  $\underline{x}$  est défini en direction uniquement. Nous allons introduire une hypothèse supplémentaire due à Hill.

**Principe du travail maximal :**

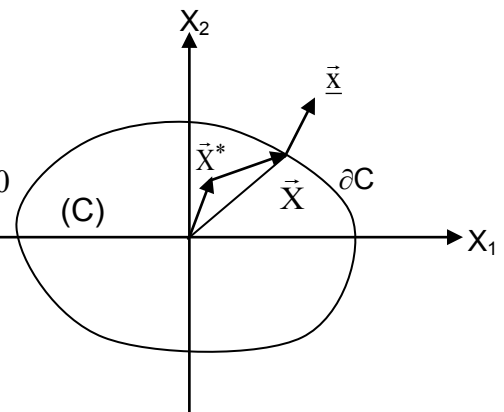
$$(52) \quad \underline{x}^T (\underline{X} - \underline{X}^*) \geq 0 \quad \forall \underline{X}^* \in C$$

(C) est le domaine élastique,  $\underline{x}^T \underline{X}$  indique la **dissipation**.

Prenons par exemple le cas des fluides visqueux plastiques

et incompressibles ; il s'écrit :

$$\begin{cases} D : (T^D - T^{D*}) \geq 0 \\ \forall T^{D*} \text{ admissible} \end{cases}$$

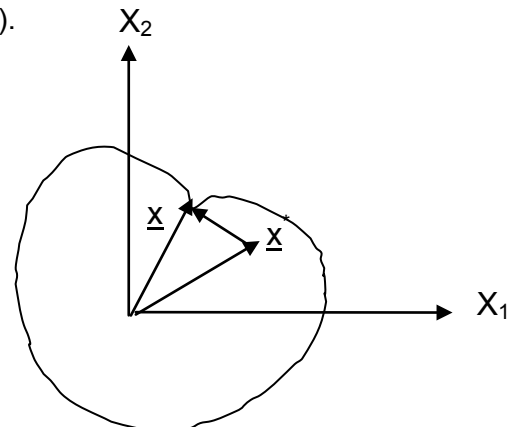
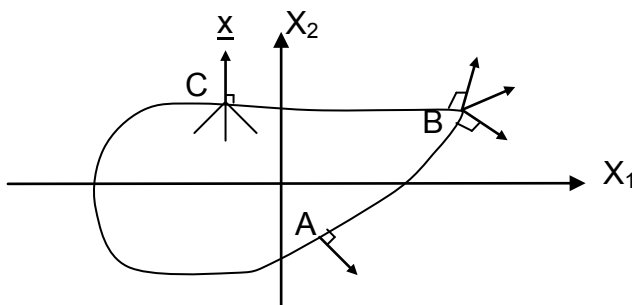


Ce principe a deux conséquences essentielles :

- (i) C est convexe
- (ii)  $\underline{x}$  est orthogonal à la frontière  $\partial C$  du domaine élastique.

La **démonstration** n'est **pas simple** et fait appel à la théorie des **fonctions convexes**, on donnera simplement un **exemple** et **une interprétation géométrique** à la fin du paragraphe.  $\underline{x}$  doit former un angle obtus avec tous les vecteurs aboutissant sur l'origine de  $\underline{x}$ .  $\underline{x}$  ne peut donc être que **normal** à  $\partial C$ . Il peut exister :

- ◆ une relation unique entre  $\underline{X}$  et la direction de  $\underline{x}$  (cas A)
- ◆ un seul vecteur  $\underline{X}$  pour plusieurs directions de  $\underline{x}$  (cas B)
- ◆ Plusieurs  $\underline{X}$  pour une direction de  $\underline{x}$  (cas C).



Si la surface seuil présente un point anguleux (cas B), c'est le cas du critère de TRESCA, le principe du travail maximal montre que le vecteur  $\underline{x}$  est dans le cône des normales.

Cependant dans ces trois cas,  $\underline{X}^T \cdot \underline{x}$  (fonction de dissipation) est définie de façon unique si  $\underline{x}$  est fixé.

Si le domaine n'est pas convexe, alors on constate aisément qu'il est impossible de trouver un vecteur  $\underline{x}$  vérifiant (52) pour tout  $\underline{X}^*$ . On tire du **principe du travail maximal** les propriétés de **convexité** du domaine élastique et de **normalité** de  $\underline{x}$  à la frontière seuil. Alors on montre qu'il existe  $\Omega(\underline{x})$ , tel que :

$$(53) \quad \left| \begin{array}{l} \underline{X} = \frac{\partial \Omega}{\partial \underline{x}} \end{array} \right.$$

$\Omega(\underline{x})$ , est le **potentiel de dissipation**, fonction positivement homogène de degré 1 :

$$(\Omega(\lambda \underline{x}) = \lambda \Omega(\underline{x}) \quad \forall \lambda > 0)$$

Le principe du travail maximal équivaut donc à l'existence d'un potentiel de dissipation.

La théorie sur les fonctions convexes permet d'exprimer le potentiel  $\omega$  à partir de  $\Omega$ . L'hypothèse de **dissipativité normale** revient à postuler l'existence de deux potentiels

convexes conjugués  $\Omega(\underline{x})$  et  $\omega(\underline{X})$   $\left( \Omega = \omega^* \right)$  permettant d'écrire :

$$\underline{x} \in \partial \omega(\underline{X}) \quad \text{et} \quad \underline{X} \in \partial \Omega(\underline{x})$$

C'est une écriture que l'on prend comme forme générale de la TPI non linéaire. Elle contient comme cas particuliers tous les exemples envisagés plus haut. En particulier, c'est la seule écriture cohérente permettant d'englober dans un même formalisme les relations de réciprocité d'Onsager et **le principe du travail maximal**.

En particulier, on retrouve les relations de la TPI linéaire si  $\Omega$  est quadratique

$$\Omega = \omega = \frac{1}{2} \Phi$$

Si  $\Omega$  est positivement homogène de degré n, alors :

$$\Omega = \frac{1}{n} \Phi \quad \text{et} \quad \omega = \frac{1}{N} \Phi \quad \text{où} \quad \frac{1}{n} + \frac{1}{N} = 2$$

C'est le cas des **fluides de Norton-Hoff**.

- ◇ Si  $\Omega$  est quelconque (cas des fluides de Bingham),  $\Omega$  et  $\omega$  ne sont pas reliés à  $\Phi$ .
- ◇ En plasticité standard (c'est-à-dire obéissant au principe du travail maximal),  $\Omega$  est positivement homogène de degré 0, alors  $\Omega = \Phi$  et  $\omega$  est la fonction indicatrice du convexe de plasticité C.

- ◇ On peut traiter dans ce cadre une liaison interne (exemple de l'incompressibilité).

Considérons le fluide visqueux newtonien incompressible :

$$\omega(\underline{T}) = \frac{1}{4\mu} \underline{T}^D : \underline{T}^D \quad \Rightarrow \quad \underline{D} = \frac{\partial \omega}{\partial \underline{T}} = \frac{1}{2\mu} \underline{T}^D$$

Le potentiel  $\Omega$  fonction convexe conjuguée de  $\omega$  et :

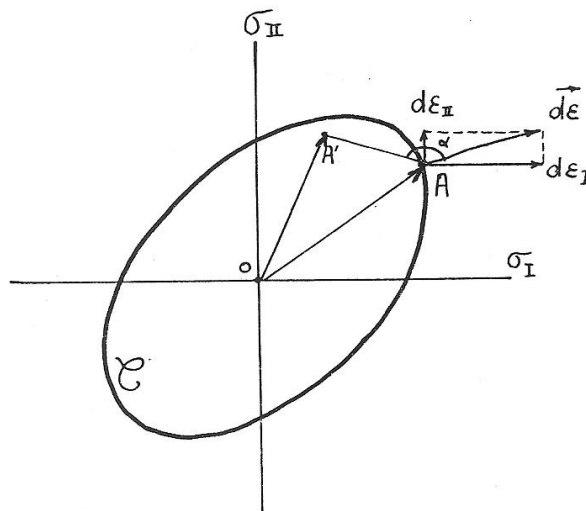
$$\begin{array}{ll} \Omega(\underline{D}) = \mu \underline{D} : \underline{D} & \text{si } \text{tr}(\underline{D}) = 0 \\ \Omega(\underline{D}) = \infty & \text{si } \text{tr}(\underline{D}) \neq 0 \end{array}$$

la loi de comportement s'écrit alors :

$$T = \partial \Omega (D) \quad \Rightarrow \quad T = - p 1 + 2 \mu D$$

**Exemple :**

Considérons la surface seuil de plasticité de Von-Mises en **contraintes planes** déjà citée plus haut et notons  $\sigma_I$  et  $\sigma_{II}$  les **contraintes principales de Cauchy** et les **incrément** de déformation **plastique notés** ici :  $d\varepsilon_I = D_I^p \Delta t$  et  $d\varepsilon_{II} = D_{II}^p \Delta t$



L'état de contrainte **réel** est  $\sigma_I$  et  $\sigma_{II}$  , soit  $\sigma_I^*$  et  $\sigma_{II}^*$  un autre état de contrainte **admissible** tel que  $f(\sigma^*) \leq 0$  , alors l'expression (52) du **principe du travail maximal** s'écrit ici :

$$\sigma_I d\varepsilon_I + \sigma_{II} d\varepsilon_{II} \geq \sigma_I^* d\varepsilon_I + \sigma_{II}^* d\varepsilon_{II}$$

Autrement dit, au cours de la déformation  $d\vec{\varepsilon}$  , le **travail** des contraintes **admissibles** est **maximal** pour l'état **réel** des contraintes.

Soit **géométriquement** :  $O\vec{A} \cdot d\vec{\varepsilon} \geq O\vec{A}' \cdot d\vec{\varepsilon}$  ou  $A\vec{A}' \cdot d\vec{\varepsilon} \leq 0$

qui exprime que l'angle  $\alpha$  doit être **obtus** et  $\alpha \rightarrow \frac{\pi}{2}$  lorsque  $A' \rightarrow A$

L'incrément de déformation plastique  $d\vec{\varepsilon}$  est **normal** à la **surface** seuil qui doit être **convexe**.

Le théorème du travail maximal est à la base des **théorèmes d'extremum** utilisés parfois en plasticité.

## 5 PLASTICITE et ENDOMMAGEMENT

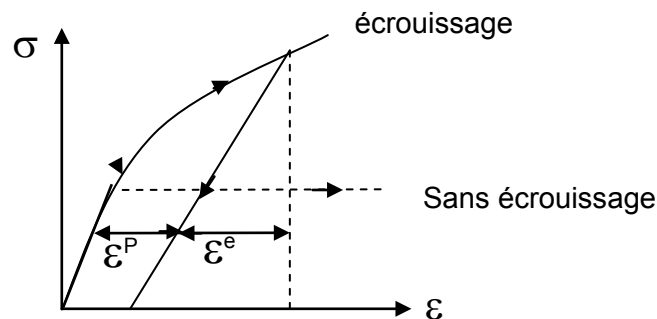
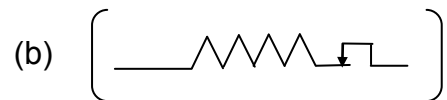
### 5.1 FORMULATION GENERALE

#### 5.1.1 Taux de déformation plastique

En **petites déformations**, le modèle rhéologique de Maxwell (a)



est remplacé par le modèle **élasto-plastique** (b). Le modèle le plus simple est celui de la plasticité parfaite c'est-à-dire sans écrouissage. Le domaine élastique reste alors fixe.



Comme nous l'avons discuté à la fin du chapitre précédent soit 4.4.5 en grandes déformations, nous introduisons la notion de configuration intermédiaire qui permet d'écrire la **décomposition multiplicative** :

$$F = F^e F^P$$

L'énergie de déformation  $W = W(F^e)$  devient en isotrope,  $W = W(B^e)$  où  $B^e = F^e F^{eT}$ .

Les calculs réalisés en 4.4.5. ont conduit aux résultats suivants :

$$\left\{ \begin{array}{l} T = 2 \rho B^e \frac{\partial \Psi}{\partial B^e} \\ T : \bar{D}^P \geq 0 \quad \text{où} \quad \bar{D}^P = R^e D^P R^{eT} \quad (F^e = R^e U^e) \end{array} \right.$$

$\bar{D}^P$  est une mesure des **vitesse de déformations plastiques**. Dans le cas du fluide de Maxwell, on avait défini le potentiel :  $\Omega \left( \bar{D}^P \right) = \mu \bar{D}^P : \bar{D}^P$ , en **élasto-plasticité**, on

posera le potentiel: 
$$\Omega \left( \bar{D}^P \right) = k \left| \bar{D}^P \right|.$$

ce qui correspond dans ce cas au **critère de Von Mises**, k **fonction scalaire** d'une **variable interne** p :

$$\left| T^D \right| = \sqrt{T_{ij}^D T_{ij}^D} \leq k(p)$$

La **loi d'écoulement plastique** s'écrit alors sous la forme :

$$\begin{cases} \bar{D}^P = 0 & \text{si } \left| T^D \right| < k \\ \bar{D}^P = \lambda \frac{T^D}{\left| T^D \right|} & \text{si } \left| T^D \right| = k \\ \bar{D}^P \text{ indéterminé} & \text{si } \left| T^D \right| > k \end{cases}$$

On peut bien évidemment introduire sans difficulté un critère de plasticité autre que Von Mises en écrivant :

$$\begin{cases} f(T, k) \leq 0 \\ \bar{D}^P = \lambda \frac{\partial f}{\partial T} \end{cases}$$

On peut encore définir de même des modèles élasto-viscoplastiques (de Norton Hoff, Bingham, etc ...) en utilisant les potentiels introduits dans le chapitre 4.

### 5.1.2 Formulation en vitesse de contrainte

Les **applications** de la plasticité **grandes déformations** concernent essentiellement la **mise en forme**, le **crash** et les **déformations élastiques**  $\epsilon^e$  peuvent être alors considérées comme **petites**. On peut écrire en première approximation, l'indice J désignant la dérivée de Jaumann pour la vitesse de déformation élastique :

$$\begin{aligned} B^e &\simeq 1 + 2 \epsilon^e \\ V^e &\simeq 1 + \epsilon^e \quad \text{or} \quad L = L^e + F^e L^P F^{e-1} \end{aligned}$$

Après quelques calculs,

on montre que l'on obtient la **décomposition additive** :

$$(1) \quad \boxed{D = \mathcal{E}^{eJ} + \bar{D}^P}$$

La linéarisation de la loi élastique donne alors une loi élastique linéaire isotrope, c'est-à-dire la loi de Hooke :

$$T = \frac{E}{1 + \nu} \left[ \mathcal{E}^e + \frac{\nu}{1 - 2\nu} \text{tr} \mathcal{E}^e \mathbf{1} \right]$$

Soit par **dérivation objective corotationnelle** :

$$T^J = \frac{E}{1+\nu} \left[ \epsilon^{eJ} + \frac{\nu}{1-2\nu} (\text{tr} \epsilon^{eJ}) 1 \right] = C^e : \epsilon^{eJ}$$

$$T^J = \dot{T} - W T + T W \quad \text{avec } W \text{ tenseur taux de rotation}$$

Car comme on l'a remarqué la dérivée de Jaumann permet d'écrire  $(\text{tr} \epsilon^e)^J = \text{tr} \dot{\epsilon}^e$ .

En utilisant la **décomposition de D** en **partie élastique** et **plastique** et en remarquant que la trace de  $\bar{D}^P = 0$  on peut encore écrire :

$$(2) \quad \boxed{T^J = \frac{E}{1+\nu} \left[ D + \frac{\nu}{1-2\nu} (\text{tr} D) 1 - \bar{D}^P \right]}$$

avec la **loi d'écoulement** :

$$(3) \quad \boxed{\begin{aligned} \bar{D}^P &= 0 && \text{si } |T^D| - k \leq 0 \\ \bar{D}^P &= \dot{\lambda} \frac{T^D}{|T^D|}, \dot{\lambda} \geq 0 && \text{si } |T^D| - k = 0 \end{aligned}}$$

Pour expliciter (3), il faut calculer le multiplicateur plastique  $\lambda$  en écrivant qu'en évolution plastique le point représentatif de l'état de contrainte se déplace sur la surface seuil (**condition de consistance**) :

$$|T^D|^{\bullet} = 0 \quad \text{or} \quad T^D : D^e = T^D : \left( D - \dot{\lambda} \frac{T^D}{|T^D|} \right) = 0$$

ce qui donne

$$\frac{T^D : T^D}{|T^D|} \dot{\lambda} = k \dot{\lambda} = T^D : D \Rightarrow \dot{\lambda} = \frac{1}{k} T^D : D$$

mais  $\lambda$  doit **être positif** ; si la quantité calculée est négative, cela signifie que l'on est en décharge  $|T^D|^{\bullet} < 0$  , et donc que  $\lambda$  **est nul**. Nous pouvons donc écrire :

$$\boxed{\dot{\lambda} = \frac{1}{k} \langle T^D : D \rangle}$$

d'où :

$$(4) \quad \boxed{T^J = \frac{E}{1+\nu} \left\{ D + \frac{\nu}{1-2\nu} (\text{tr} D) 1 - \frac{1}{k^2} \langle T^D : D \rangle T^D \right\}}$$

qui montre que  $T^J$  est fonction de D et T. On retrouve **une loi de type hypoélastique** à deux déterminations c'est-à-dire à deux lois hypoélastiques différentes à choisir suivant le signe de  $T^D : D$ .

C'est la **forme incrémentale** ou en vitesse de la loi plastique, cette loi apparaît comme **l'extension directe** aux grandes déformations de la **loi incrémentale petites déformations** en remplaçant  $\sigma_{ij}$ ,  $\dot{\sigma}_{ij}$  et  $\dot{\epsilon}_{ij}$  respectivement par :  $T_{ij}$ ,  $T_{ij}^J$  et  $D_{ij}$  forme que l'on aurait pu postuler a priori. L'expression de la vitesse de contrainte ou incrémentale en petite déformation est donnée dans le paragraphe suivant.

Le cas de l'érouissage isotrope peut se traiter de manière analogue par l'extension directe des modèles petites déformations. L'anisotropie plastique (matériau anisotrope ou érouissage anisotrope) pose des problèmes plus délicats notamment pour le choix de la **rotation des axes** d'orthotropie, voir paragraphe 5.1.5 suivant.

★ Remarque :

L'introduction de (4) dans la formulation Lagrangienne réactualisée (voir 2.4.2 et 2.4.3) conduit **en toute rigueur** à une matrice de rigidité de comportement **non-symétrique**, dans ce cas la dérivée de Jaumann de Kirchoff  $\tau^J = (JT)^J$  s'avère préférable dans (4).

### 5.1.3 Matrice élasto-plastique continue

Nous prenons ici une **notation « petites déformations »** mais ça ne **restreint pas la généralité** car il suffira de se placer dans un repère « tournant » tel que le repère corotationnel, les  $\sigma$  étant les contraintes de Cauchy, les  $\Delta\epsilon$  les incréments du taux de déformation  $D\Delta t$ .

Une surface seuil ou de charge s'écrit donc d'une manière générale :

$$F(\sigma, k) = f(\sigma) - k(p) = 0$$

où  $k(p)$  s'identifiera plus loin avec la notion de **contrainte équivalente** et  $p$  la variable interne appelée **déformation plastique équivalente**.

Par exemple (voir plus loin) avec le critère de Hill :

$$q = f(\sigma) = \sqrt{\sigma^T M \sigma}$$

où :

$$q^2 = \left\{ \begin{matrix} \sigma_x & \sigma_y & \sigma_{xy} & \sigma_z \end{matrix} \right\} \begin{bmatrix} g+h & -h & 0 & -g \\ -h & f+h & 0 & -f \\ 0 & 0 & 2n & 0 \\ -g & -f & 0 & f+g \end{bmatrix} \left\{ \begin{matrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_z \end{matrix} \right\}$$

si  $f=g=h=1/2$  et  $n=3/2$  on retrouve le critère isotrope de Von Mises  $q = \sqrt{\frac{3}{2} s_{ij} s_{ij}}$ .

En rappelant qu'en évolution plastique le point représentatif de l'état de contrainte se déplace sur la surface seuil (**condition de consistance**), on a :

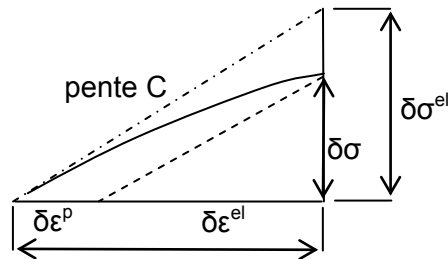
$$dF = \frac{\partial F}{\partial \sigma} d\sigma + \frac{\partial F}{\partial p} dp = 0$$

ou encore :  $a^T d\sigma - A d\lambda = 0$  en posant  $A = -\frac{1}{d\lambda} \frac{\partial F}{\partial p} dp$   $a = \frac{\partial f}{\partial \sigma} = \frac{1}{q} M \sigma$



De la **décomposition additive** de l'incrément de déformation totale (figure ci-dessous) :

$$d\varepsilon = d\varepsilon^{el} + d\varepsilon^p$$



On notera  $C$  la matrice élastique (loi de Hooke), avec la loi de normalité d'écoulement plastique, il vient :

$$d\varepsilon = C^{-1}d\sigma + d\lambda a$$

en multipliant par  $a^T C$  les deux membres :

$$a^T C d\varepsilon = A d\lambda + d\lambda a^T C a$$

d'où le multiplicateur plastique :

$$(5) \quad \boxed{d\lambda = \frac{a^T C d\varepsilon}{A + a^T C a}}$$

La **matrice** (dite **continue**) **élasto-plastique** s'écrit alors :

$$(6) \quad \boxed{d\sigma = C^{ep} d\varepsilon = \left[ C - \frac{C a a^T C}{A + a^T C a} \right] d\varepsilon}$$

Il reste à expliciter le scalaire  $A$  au dénominateur avec l'**équivalence** énergétique du travail de déformation plastique, dans ce cas  $k$  s'identifie avec la **contrainte équivalente** et  $p$  avec la **déformation plastique équivalente** tel que :

$$dW^p = k dp = \sigma_{eq} d\varepsilon^{eq} = d\varepsilon^{pT} \sigma = d\lambda a^T \sigma$$

De plus si le **critère** est une **fonction homogène** (cas de Hill, Von-Mises, ...), on a :

$$\left( \frac{\partial f}{\partial \sigma} \right)^T \sigma = a^T \sigma = k = \sigma_{eq}$$

d'où le multiplicateur plastique s'identifie avec la déformation plastique équivalente :

$$d\lambda = dp = d\varepsilon^{eq}$$

Donc :

$$A = -\frac{1}{d\lambda} \frac{\partial F}{\partial p} dp = \frac{1}{d\lambda} \frac{dk}{dp} dp = H'$$

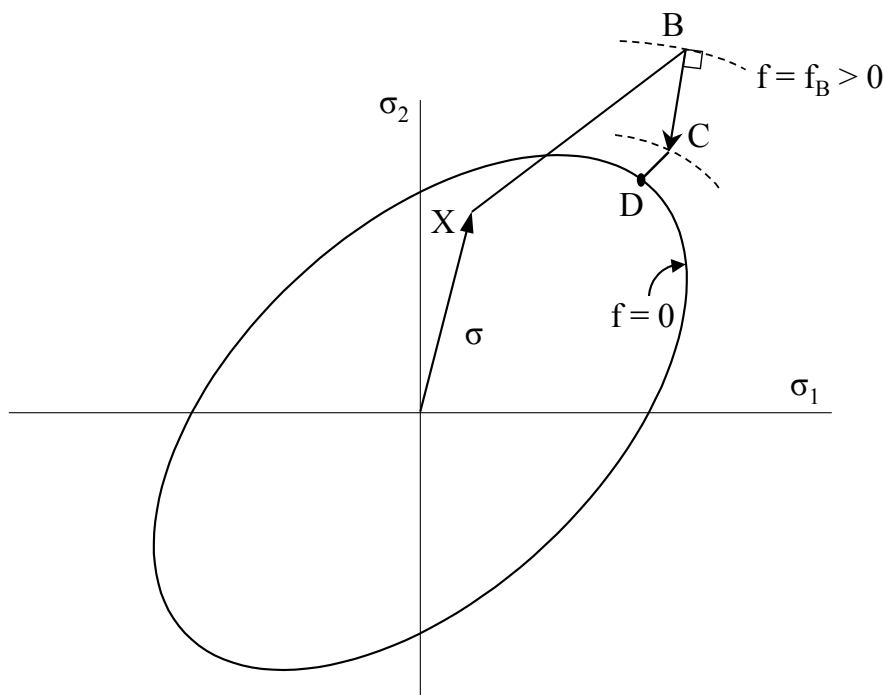
$H' = \frac{d\sigma_{eq}}{d\varepsilon_{eq}}$  est le **module tangent plastique** qui dans les calculs est pris sur la **courbe de traction uniaxiale** (dite de **comparaison**) en **contrainte vraie** et **déformation logarithmique plastique**.

### 5.1.4 Intégration élasto-plastique implicite

Nous donnons ici l'**algorithme d'intégration implicite** d'un comportement élasto-plastique où pour un **incrément de déformation donné** en un **point de calcul** (point de Gauss) il faut évaluer l'état de **contrainte** à la **fin de l'incrément** (**codes explicites**, routine VUMAT d'Abaqus par exemple) et **en plus** dans le cas des **codes implicites** la **matrice de comportement tangente** (routine UMAT d'Abaqus standard par exemple)

#### ★ Remarque importante :

Comme pour le paragraphe précédent, nous conservons une **notation « petites déformation »** étant entendu que dans le cas général grandes déformations et anisotropie plastique, on se placera dans un **repère « tournant »** des axes d'anisotropie judicieusement **construit** ou **fourni** par le code de calcul en argument d'entrée d'une routine « Utilisateur » (Ex : UMAT ou VUMAT d'Abaqus), voir plus loin.



Sur la figure ci-dessus en espace des contraintes,  $\{\sigma_C\}$  est l'état à **atteindre** à partir d'un état  $\{\sigma_X\}$  **élastique** ou déjà **plastique**, ( $F_X < 0$  ou  $F_X = 0$ ).  $F = q - \sigma_{eq}$  avec les notations du paragraphe précédent qui nous indiquent que pour une **prédiction élastique** qui nous amène en B on **doit vérifier** :

$$\{\sigma_C\} = \{\sigma_X\} + \{\Delta\sigma\} = \{\sigma_B\} - \Delta\lambda[C]\{a_C\}$$

où 
$$\{a_c\} = \frac{\partial q}{\partial \{\sigma_c\}}$$

Le **problème** est donc **implicite** mais on peut également considérer plusieurs algorithmes avec le vecteur gradient fonction de :

$$\{a\} = (1-\eta) \frac{\partial q}{\partial \{\sigma_x\}} + \eta \frac{\partial q}{\partial \{\sigma_c\}}$$

Si  $\eta=0$  le schéma est celui **d'Euler explicite** qui en général nécessite une **sous-incrémentation** et une **correction** à la fin du pas mais qui est facile à coder (Voir listing d'une UMAT explicite et d'une UMAT implicite en [annexe du polycop](#)).

On se place dans le cas  $\eta=1$  (Euler implicite ou « Backward Euler) et on considère un développement de Taylor au 1<sup>er</sup> ordre de F au point B :

$$F = F_B + \frac{\partial F^T}{\partial \{\sigma_B\}} \{\Delta\sigma\} + \frac{\partial F}{\partial \varepsilon_{eq}} \Delta\varepsilon_{eq} = F_B - \Delta\lambda \{a_B\}^T [C] \{a_B\} - \Delta\lambda H' = 0$$

où du fait qu'en B,  $\{\Delta\varepsilon\}$  a déjà été appliquée pour passer de X à B, on a :  $\{\Delta\sigma\} = -\Delta\lambda [C] \{a_B\}$

On note comme précédemment la **courbe d'érouissage donnée** :  $\sigma_{eq} = H(\varepsilon_{eq})$  en

**contrainte vraie** et **déformation plastique logarithmique** et  $H' = \frac{d\sigma_{eq}}{d\varepsilon_{eq}}$

On a donc une première **estimation** du multiplicateur plastique avec :

$$\Delta\lambda = \frac{q_B - \sigma_{eq}}{\{a_B\}^T [C] \{a_B\} + H'} = \Delta\varepsilon_{eq} \quad \text{et} \quad \{\sigma_c\} = \{\sigma_B\} - \Delta\lambda [C] \{a_B\}$$

**Sauf** cas très particulier (Von-Mises, **érouissage linéaire**, mais **pas** en contraintes planes) l'état de contrainte obtenu **ne satisfait pas** à  $F_c=0$ . Des itérations sont donc nécessaires.

**★ Remarque :**

Par rapport au **schéma explicite** il n'y a pas de **point de transition** élastique-plastique à calculer pour un point initialement élastique qui devient plastique.

Pour **itérer** plusieurs **variantes** sont possibles, nous développons ici un schéma de type Newton en introduisant un vecteur **résidu** r avec un indice d'itération i tel que :

$$\begin{aligned} \{r\}^i &= \{\sigma_c\}^i - (\{\sigma_B\} - \Delta\lambda^i [C] \{a_c\}^i) \rightarrow 0 \\ \{r\}^{i+1} &= \{r\}^i + \{\dot{r}\} \rightarrow 0 \end{aligned}$$

Comme tout se passe maintenant sur **les itérés** en C on peut **alléger** la **notation** en omettant C en indice et en notant la différentiation par point:

$$\{\dot{r}\} = d\{r\} \quad \{\dot{\sigma}\} = d\{\sigma\} \quad \dot{\lambda} = d(\Delta\lambda) \quad \Delta\lambda^{i+1} = \Delta\lambda^i + \dot{\lambda}$$

$$\{r\}^{i+1} = \{r\}^i + \{\dot{\sigma}\} + \dot{\lambda} [C] \{a\} + \Delta\lambda [C] [N] \{\dot{\sigma}\} = 0$$

où 
$$[N] = \frac{\partial \{a\}}{\partial \{\sigma\}} = \frac{1}{q} [M] - \frac{1}{q} \{a\} \{a\}^T \quad \text{si } a \text{ de la forme} \quad \{a\} = \frac{1}{q} [M] \{\sigma\}$$

Soit :  $\{\dot{\sigma}\} = -[Q]^{-1} \{r\}^i - \dot{\lambda}[Q]^{-1}[C]\{a\}$  où on pose :  $[Q] = (I + \Delta\lambda[C][N])$

Pour la variation de  $\Delta\lambda$  on écrit le développement en série de Taylor au 1<sup>er</sup> ordre de F:

$$F^{i+1} = F^i + \dot{F} = F^i + \{a\}^T \{\dot{\sigma}\} - H' \dot{\lambda} = 0$$

d'où à l'itération i :

$$\dot{\lambda}^i = \frac{F^i - \{a\}^T [Q^i]^{-1} \{r\}^i}{\{a\}^T [Q^i]^{-1} [C] \{a\}^i + H'^i}$$

$$\{\sigma^{i+1}\} = \{\sigma^i\} - [Q^i]^{-1} \{r\}^i - \dot{\lambda}^i [Q^i]^{-1} [C] \{a\}^i$$

$$\Delta\lambda^{i+1} = \Delta\lambda^i + \dot{\lambda} = \Delta\epsilon_{eq}^{i+1} \quad \rightarrow \epsilon_{eq}^{i+1} \rightarrow \sigma_{eq}^{i+1}$$

En général **quelques itérations** (3 à 5) suffisent pour obtenir la **convergence** au sens d'une **norme** sur les contraintes.

**Matrice tangente cohérente avec l'intégration implicite :**

Il peut être intéressant d'introduire dans un code implicite au premier membre de la matrice de raideur globale, les **matrices tangentes cohérentes** au lieu des **matrices continues** bien que les **calculs** soient **plus nombreux** (inversion de [Q]), les itérations globales sur l'équilibre s'en trouvant en principe réduites s'il n'y a pas d'autres non-linéarités (contacts).

On a :

$$\{\sigma\} = \{\sigma_B\} - \Delta\lambda[C]\{a\}$$

$$\{\dot{\sigma}\} = [C]\{\dot{\epsilon}\} - \dot{\lambda}[C]\{a\} - \Delta\lambda[C][N]\{\dot{\sigma}\}$$

$$\{\dot{\sigma}\} = [Q]^{-1}[C](\{\dot{\epsilon}\} - \dot{\lambda}\{a\}) = [R](\{\dot{\epsilon}\} - \dot{\lambda}\{a\})$$

or :  $\dot{F} = \{a\}^T \{\dot{\sigma}\} - H' \dot{\lambda} = 0$  d'où :

$$\dot{\lambda} = \frac{\{a\}^T [R] \{\dot{\epsilon}\}}{\{a\}^T [R] \{a\} + H'}$$

et en définitive la **matrice cohérente**:

$$\{\dot{\sigma}\} = \left[ [R] - \frac{[R]\{a\}\{a\}^T[R]}{\{a\}^T[R]\{a\} + H'} \right] \cdot \{\dot{\epsilon}\}$$

**Remarque :**

$[R] = [Q]^{-1}[C]$  si on fait  $[Q]=[I]$  voir ci-dessus,  $[R]=[C]$  et on **retrouve** la **matrice tangente continue**. (**Attention** : suivant les critères et potentiels plastiques qui peuvent être différents, la matrice peut être **non-symétrique**)

### 5.1.5 Ecouissage isotrope, cinématique et anisotropie

Nous avons vu que pour caractériser le comportement parfaitement plastique du matériau il était nécessaire de définir une **fonction seuil** (le critère) et une **loi d'écoulement** plastique. On se replace dans le cas général.

Ainsi, dans le cas isotrope où le second invariant apparaît seul, on a le critère de Von-Mises en **écriture tensorielle** générale:

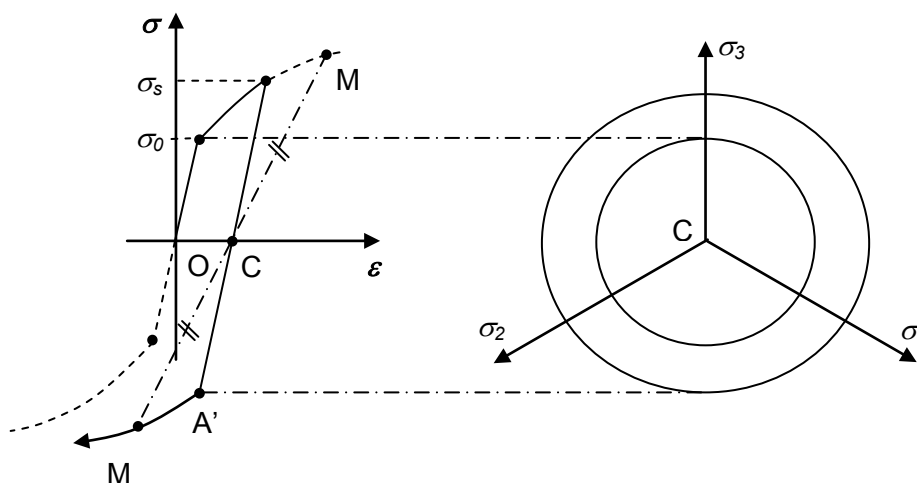
$$q = \sqrt{\frac{3}{2}} |T^D| = \sqrt{\frac{3}{2}} k = \sigma_{eq} \text{ ou en } \textbf{écriture matricielle} \text{ classique: } \boxed{q = \sqrt{\sigma^T M \sigma} = \sigma_{eq}}$$

Tout état de **contrainte tridimensionnel** tel que  $q = \sigma_{eq}$  est un état de contrainte **unidimensionnel** de **comparaison** défini par le seuil de plasticité et la **courbe d'écrouissage** isotrope donnant  $\sigma_{eq}$

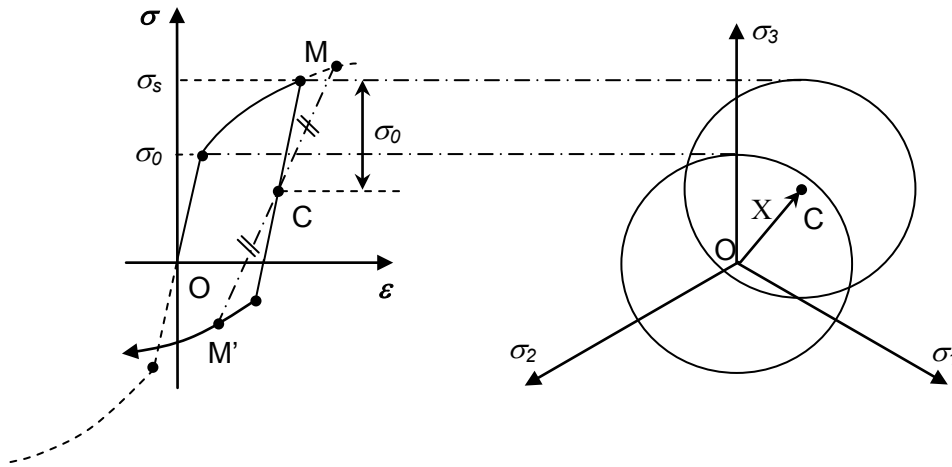
Cependant les milieux élasto(visco)plastiques présentent un **écrouissage** qui peut être représenté par les **variables internes** de nature **scalaire** ou **tensorielle** qui définissent l'état actuel de la matière.

Donc il faut définir des **lois d'écrouissage** où on utilise classiquement une variable **scalaire** pour l'**écrouissage isotrope** (la déformation plastique équivalente  $p$  ou le travail plastique dissipé) et une **variable tensorielle** qui caractérise l'**écrouissage cinématique**.

#### Représentation de l'écrouissage isotrope dans l'espace des contraintes :



Représentation de l'érouissage cinématique dans l'espace des contraintes :



Les figures ci-dessus montrent schématiquement les rôles de ces deux variables dans la description de l'état d'érouissage par l'évolution du domaine d'élasticité : **la taille** du domaine est une fonction de la **variable isotrope** p tandis que son centre O puis C est repéré par la **variable cinématique** X permettant ainsi de représenter des **comportements différents** en **traction** et en **compression**.

Dans ce qui suit, on postule toujours une loi de comportement **hypoélastique** du chapitre 3:

$$T^J = C^e : \varepsilon^{eJ}$$

On suppose que la **surface seuil** a la forme générale :

$$(7) \quad F(q, Y) = q - Y(p) = 0$$

où Y est la contrainte d'écoulement en traction simple p un paramètre scalaire qui décrit **l'érouissage isotrope** et q la contrainte équivalente avec une **anisotropie initiale** telle que :

$$(8) \quad \boxed{q^2 = (T - X) : M : (T - X)} \quad \text{ou} \quad \boxed{q^2 = \{\sigma - x\}^T [M] \{\sigma - x\}}$$

où X est **le tenseur** des contraintes de **rappel** associées à **l'érouissage cinématique** et M un tenseur symétrique du 4<sup>ème</sup> ordre avec les propriétés suivantes :

$$M_{ijkl} = M_{jikl} = M_{klij} \quad \text{et} \quad M_{iikm} = 0$$

Les composantes de T et X sont prises par rapport **aux axes d'orthotropie** ainsi que M.

**Exemple : l'orthotropie initiale** (notamment des tôles laminées) peut-être décrite par le critère de Hill pour lequel dans les axes d'orthotropies 1, 2, 3 on a :

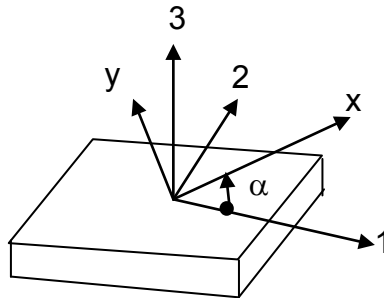
$$q^2 = F (T_{22} - X_{22} - T_{33} + X_{33})^2 + G (T_{33} - X_{33} - T_{11} + X_{11})^2 + H (T_{11} - X_{11} - T_{22} + X_{22})^2 + 2L (T_{23} - X_{23})^2 + 2M (T_{13} - X_{13})^2 + 2N (T_{12} - X_{12})^2$$

F, G, H, L, M et N sont des paramètres du matériau. Dans le cas d'un matériau initialement plastique isotrope on retrouve le critère de Von-Mises avec :

$$F = G = H = 1/2 \quad \text{et} \quad L = M = N = 3/2$$

Bien que ces 6 paramètres qui caractérisent l'anisotropie initiale puissent être déterminés à l'aide de **trois essais de traction simple** et **3 expériences de cisaillement simple** avec les limites d'élasticité observées il est souvent préférable de les obtenir avec les coefficients de "Lankford"  $r_0$ ,  $r_{90}$  et  $r_{45}$  dans le cas particulier de l'état de contrainte plan (cas des tôles) où sans écrouissage cinématique, on a (6) qui s'écrit :

$$q^2 = [T_{11} \ T_{22} \ T_{12}] \begin{bmatrix} G+H & -H & 0 \\ -H & F+H & 0 \\ 0 & 0 & 2N \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_{11} \\ T_{22} \\ T_{12} \end{Bmatrix}$$



$$c = \cos \alpha$$

$$s = \sin \alpha \quad \text{avec } \vec{1} \text{ Direction de référence à choisie à } 0^\circ$$

Si on effectue un **essai de traction** suivant la direction  $\vec{x}$  faisant un angle  $\alpha$  avec la direction  $\vec{1}$  d'orthotropie choisie comme **direction de référence** nous avons :

$$(9) \quad r_{(\alpha)} = \frac{d\varepsilon_y^p}{d\varepsilon_3^p} \quad \text{coefficient d'anisotropie de "Lankford"}$$

où  $d\varepsilon_3^p$  est l'incrément de déformation plastique dans la direction normale du plan de la tôle. En faisant l'hypothèse de l'incompressibilité plastique et deux jauges grandes déformations collées sur les éprouvettes déformées par incréments de déformation et relâchées, on obtient les valeurs  $r_0$ ,  $r_{90}$  et  $r_{45}$  ( $\alpha = 0, 90$  et  $45^\circ$ ) qui se stabilisent après un certain niveau de déformation. D'autre part avec la **loi d'écoulement** et en éliminant le multiplicateur plastique on a :

$$r_{(\alpha)} = \frac{[(G+H)c^2 - Hs^2]s^2 + [(F+H)s^2 - Hc^2]c^2 - 2Ns^2c^2}{-[Gc^2 + Fs^2]}$$

d'où  $(G + H) = 1 \quad H = \frac{r_0}{1 + r_0} \quad F = \frac{r_0}{r_{90} (1 + r_0)}$

$$N = \frac{(r_{90} + r_0) (2 r_{45} + 1)}{2 r_{90} (1 + r_0)}$$

Il est clair qu'il existe d'autres critères **d'anisotropie initiale** que le critère de Hill (1948) rappelé ici et en particulier les critères **non-quadratiques**.

Ensuite d'une manière générale et toujours dans les axes d'orthotropie, on suppose que la vitesse de déformation plastique est donnée par la **loi d'écoulement associée** définie par :

$$(10) \quad D^p = \dot{\lambda} \frac{\partial F}{\partial T} = \dot{\lambda} \frac{\partial q}{\partial T} \quad \dot{\lambda} \geq 0$$

où  $\lambda$  est le multiplicateur plastique et la fonction seuil  $f$  joue le rôle de **potentiel plastique**, autrement l'écoulement est **non-associé**. En introduisant (8) dans (10), il vient :

$$(11) \quad \boxed{D^P = \dot{\lambda} \frac{M : (T - X)}{q}} \quad \text{ou} \quad \boxed{\{\Delta \varepsilon^P\} = \frac{\Delta \lambda}{q} [M] \{\sigma - x\}}$$

Par la suite on choisit comme paramètre d'écroissage isotrope  $p$  la **déformation plastique équivalente** telle que :

$$p = \varepsilon_{eq}^P = \int_0^t \dot{\varepsilon}_{eq}^P dt$$

où

$$(12) \quad \boxed{\dot{\varepsilon}_{eq}^P = \frac{(T - X) : D^P}{q}} \quad \text{ou} \quad \Delta W^P = q \Delta \varepsilon_{eq}^P = \{\sigma - x\}^T \{\Delta \varepsilon^P\}$$

est la vitesse de déformation plastique équivalente. En introduisant (11) dans (12) et en tenant compte de l'équation de la surface (8), on obtient :

$$(13) \quad \boxed{\dot{\varepsilon}_{eq}^P = \dot{\lambda}}$$

Le matériau est **élastique** on a  $f(q, Y) < 0$  tandis que pour **l'état plastique** :  $f(q, Y) = 0$ . Comme précédemment, on peut déterminer la valeur de  $\lambda$  pendant la charge plastique en imposant la **condition de consistance** (ou de cohérence) c'est-à-dire que :

$$\boxed{\dot{f} = 0}$$

doit être satisfaite identiquement par rapport au temps d'où :

$$\dot{q} - H' \dot{\varepsilon}_{eq}^P = 0$$

avec

$$(14) \quad \boxed{H' = \frac{dY}{d\varepsilon_{eq}^P}}$$

qui est le **module tangent** d'écroissage **isotrope**. Pour l'état élastique et en décharge on a  $\lambda = 0$ . On peut identifier la courbe d'écroissage du matériau obtenue par un essai de traction en contrainte vraie et déformation plastique logarithmique pour **l'écroissage isotrope** sous la forme par exemple :

$$Y = \sigma_{eq} = \sigma_0 + Q_\infty (1 - e^{-b\varepsilon_{eq}}) \quad (\text{loi de Vocé})$$

mais d'autres formes sont évidemment possibles et notamment des données points par points dans les codes de calcul.

Pour **l'écroissage cinématique** on peut postuler une **loi d'évolution linéaire de Prager** :

$$(15) \quad \boxed{\dot{X}^J = \beta D^P} \quad \beta = \text{constante}$$



où on choisit une dérivée **objective** pour  $X$  telle que la dérivée de Jaumann mais ce n'est pas la meilleure solution car elle donne une réponse oscillante en cisaillement simple au-delà de 100% de déformation. D'une manière générale :

$\sigma_0, Q_\infty, b$  sont des paramètres du matériau pour l'écroutissage isotrope,  $\beta$  pour l'anisotropie induite par l'écroutissage cinématique et  $F, G, H, N$  les paramètres de l'anisotropie initiale. Le paramètre  $\beta$  peut être constant ou non et des formes plus réalistes sont postulées, voir la fin du paragraphe. On a vu que les modèles en **grandes déformations** sont donc souvent construits par extension des modèles en petites déformations. Ils sont écrits dans la configuration eulérienne (où Lagrange réactualisée d'un point de vue numérique) ce qui est naturel pour la plasticité isotrope.

Si on cherche à prendre en compte comme ici une **anisotropie initiale** et (ou) une anisotropie **induite**, le formalisme eulérien pose le problème de **l'objectivité**. Il existe de nombreuses théories souvent rattachées aux **aspects numériques** de **l'intégration** des lois de comportement en vitesse entre un pas de temps fini  $t$  et  $t + \Delta t$  début et fin de l'incrément ce qui conduit à la notion de **l'objectivité incrémentale**. Les aspects des algorithmes d'intégration ne seront pas abordés ici car ils nécessitent des développements importants.

Tout en restant dans une formulation en vitesse, l'idée de base consiste alors à utiliser dans la loi de comportement des tenseurs eulériens par leurs valeurs propres et Lagrangiens par leurs orientations : ainsi, un tenseur  $T$  se transforme en :

$$(16) \quad \hat{T} = Q^T T Q \quad \text{avec } Q \text{ un tenseur rotation}$$

C'est la **formulation en référentiel tournant** déjà aperçue au Chapitre 3.

Les **dérivées rotationnelles** sont alors définies relativement à un **repère orthonormé** par la relation :

$$(T)^Q = Q (Q^T T Q)^\bullet Q^T = \dot{T} + T \dot{\Omega}_Q - \dot{\Omega}_Q T$$

$$\dot{\Omega}_Q = \dot{Q} Q^T$$

où  $Q$  est un **tenseur rotation**,  $\dot{\Omega}_Q$  est le tenseur **vitesse** de **rotation associé**. Pour que cette dérivation soit objective, on montre qu'il suffit que la quantité :

$$W_Q = W - \dot{\Omega}_Q \quad \text{soit un tenseur } \mathbf{objectif}$$

Le choix particulier  $\dot{\Omega}_Q = W$  taux de rotation nous donne la **dérivée corotationnelle** (Jaumann) que nous avons déjà rencontrée. Le choix  $Q = R$  dont il résulte  $\dot{\Omega}_Q = \dot{R} R^T$  où  $R$  est la rotation issue de la décomposition polaire de  $F$ , donne la **dérivée en rotation propre**.

On peut définir également la vitesse de rotation des directions principales des tenseurs de déformation pure ( $U$  et  $V$ ) et encore d'autres types de vitesse de rotation. On suppose donc que le matériau garde son **orthotropie plastique initiale** et que les **axes d'orthotropie tournent** avec la vitesse de rotation  $\Omega_Q$  **choisie**. Seule la confrontation à des expériences permet de juger du **bon choix** de la mesure de rotation des axes d'orthotropie. L'**avantage**

du formalisme en repère tournant est que l'écriture des lois d'évolution en petites déformations reste la même dans le repère tournant. Ainsi des lois d'évolution non linéaires du centre de la surface de charge en écrouissage cinématique :

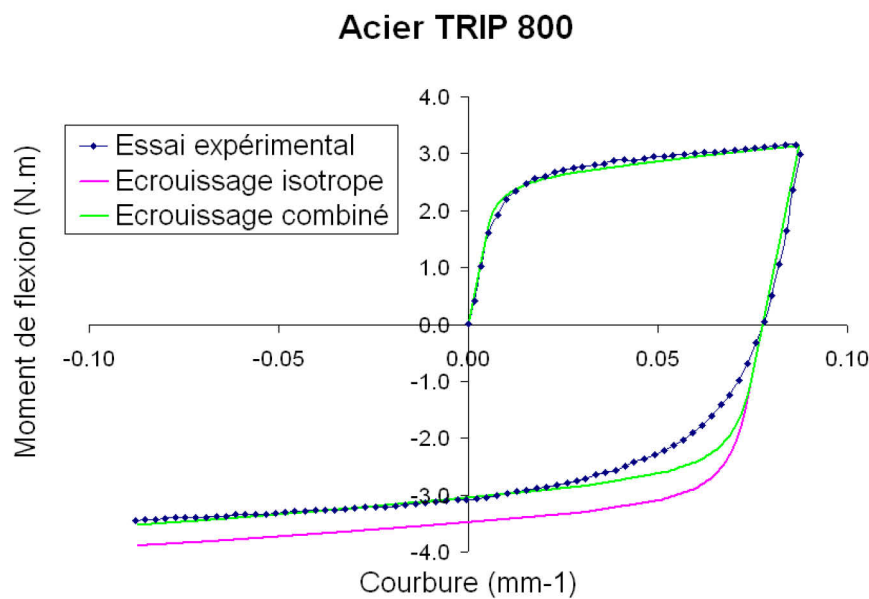
$$\{\Delta x\} = C \frac{\Delta \varepsilon_{eq}}{q} [M] \{\sigma - x\} - \gamma \{x\} \Delta \varepsilon_{eq}$$

Les X sont déviatoriques dans cette loi de Prager-Chaboche, C et  $\gamma$  sont des constantes à identifier sur des essais cycliques ou encore :

$$\{\Delta x\} = C \frac{\Delta \varepsilon_{eq}}{q} \{\sigma - x\} - \gamma \{x\} \Delta \varepsilon_{eq}$$

loi non linéaire de Ziegler-Chaboche (Ex. ci-dessous)

**Exemple :** Comparaison sur une courbe moment-courbure de pliage-dépliage d'une bande de tôle entre le modèle isotrope pur et le modèle combiné isotrope et cinématique.



✶ **Remarque :** Résultat obtenu avec un seul couple de paramètres C et  $\gamma$  mais on peut introduire deux, voire plusieurs, couples de paramètres C et  $\gamma$ .

### 5.1.6 Chargement radial et loi intégrée

En plasticité la déformation dépend de l'histoire du trajet de chargement et ceci se traduit par le caractère en vitesse (ou incrémental) des lois d'écoulement. Une exception importante correspond au cas du chargement radial (ou simple, ou proportionnel) pour lequel l'intégration ne dépend que d'un scalaire et peut être faite une fois pour toute. Ce sont les lois intégrées de Hencky-Ilyushin. En effet, le cas du chargement radial permet d'intégrer analytiquement la plasticité de l'état initial à l'état final. Ce fait est à la base des méthodes inverses en modélisation de l'emboutissage ou à partir de la forme finale connue de la pièce emboutie, on a accès à l'état de contrainte et de déformation. Ainsi on considère le cas du chargement proportionnel où :

$$T(M, t) = \alpha(t) T(M) \quad \text{tel que } \alpha(0) = 0$$

Avec un écrouissage isotrope et éventuellement une anisotropie initiale, on peut définir les **déformations plastiques totales logarithmiques** en fonction des contraintes:

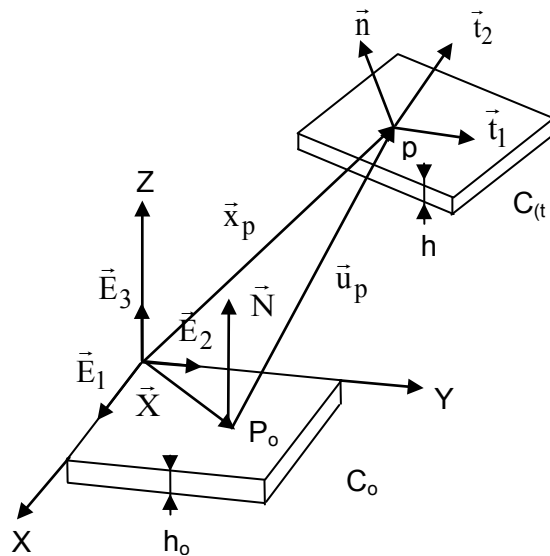
$$(17) \quad \boxed{\boldsymbol{\varepsilon}^P = \frac{\boldsymbol{\varepsilon}_{eq}^P}{q} \mathbf{M} : \mathbf{T}} \quad \text{ou} \quad \boxed{\{\boldsymbol{\varepsilon}^P\} = \frac{\boldsymbol{\varepsilon}_{eq}^P}{q} [\mathbf{M}]\{\boldsymbol{\sigma}\}}$$

car le facteur  $\alpha(t)$  s'élimine au numérateur et au dénominateur de (11) après intégration en temps ou dans l'incrément. Ainsi une représentation en composantes dans les **axes d'orthotropies** notés  $x, y, z$  de (17) pour le cas des tôles minces sera par exemple :

$$(18) \quad \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}_{xx}^P \\ \boldsymbol{\varepsilon}_{yy}^P \\ \boldsymbol{\gamma}_{xy}^P \end{Bmatrix} = \frac{\boldsymbol{\varepsilon}_{eq}^P}{q} \begin{bmatrix} 1 & -\bar{r}/(1+\bar{r}) & 0 \\ -\bar{r}/(1+\bar{r}) & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2(1+2\bar{r})/(1+\bar{r}) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_{xx} \\ T_{yy} \\ T_{xy} \end{Bmatrix}$$

où  $\bar{r} = \frac{1}{4} (r_0 + 2r_{45} + r_{90})$  est le coefficient d'anisotropie transverse moyen (isotropie :  $\bar{r} = r_0 = r_{45} = r_{90} = 1$ ).

On peut ensuite donner comme exemple les grandes lignes de **l'approche inverse simplifiée** (*déformation élastique négligée*) pour traiter des **grandes transformations** des structures **minces** :



On considère un **repère local** orthonormé  $(\vec{t}_1, \vec{t}_2, \vec{n})$  en  $p$  tangent à la surface moyenne dans la configuration déformée  $C_{(t)}$ .

$$\vec{u}_p = u\vec{t}_1 + v\vec{t}_2 + w\vec{n}$$

$$\vec{N} = k_x \vec{t}_1 + k_y \vec{t}_2 + k_z \vec{n}$$

En utilisant l'hypothèse de la **conservation des normales** et si on introduit l'élongation suivant l'épaisseur  $\lambda_3$ , on peut écrire le vecteur position du point  $q$  à **travers l'épaisseur** suivant la normale  $\vec{n}$  en  $p$  par rapport à sa configuration initiale  $C_0$  :

$$\vec{X}_q = \left( x_p - u + \frac{z}{\lambda_3} k_x \right) \vec{t}_1 + \left( y_p - v + \frac{z}{\lambda_3} k_y \right) \vec{t}_2 + \left( -w + \frac{z}{\lambda_3} k_z \right) \vec{n}$$

car  $\bar{x}_q = \bar{x}_p + z \bar{n}$  où  $z$  représente la position de  $q$  dans l'épaisseur par rapport à la surface moyenne dans  $C_{(t)}$ . Nous pouvons alors déterminer l'inverse du tenseur gradient de la transformation dans le cas d'un **comportement membranaire** ( $z = 0$  surface moyenne) :

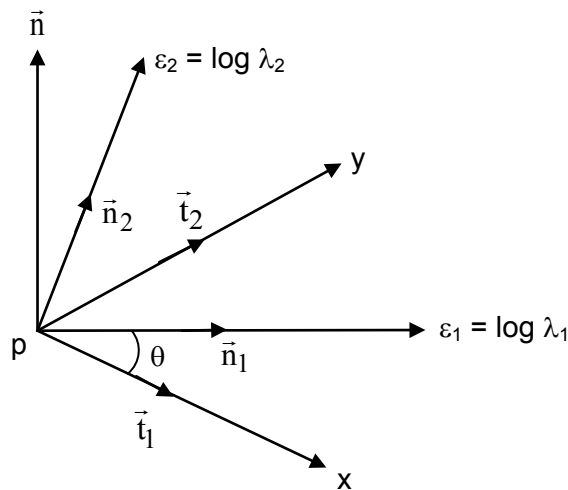
$$(19) \quad F^{-1} = \frac{\partial X_q}{\partial x_p} = \begin{bmatrix} 1 - u, x & -u, y & k_x / \lambda_3 \\ -v, x & 1 - v, y & k_y / \lambda_3 \\ -w, x & -w, y & k_z / \lambda_3 \end{bmatrix}$$

Il convient d'introduire alors l'inverse du tenseur de Cauchy-Green gauche  $B^{-1}$

$$B^{-1} = F^{-T} F^{-1}$$

dont les composantes se calculent aisément avec (19). Les **élongations principales** ainsi que leurs directions dans  $C_{(t)}$  se déterminent avec la diagonalisation de  $B^{-1}$  :

$$B^{-1} = m [\lambda^{-2}] m^T$$



La matrice de transformation  $[m]$  est déterminée par les directions des élongations principales dans le repère local soit :

$$[m] = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{où} \quad \theta = (\bar{n}_1, \bar{t}_1)$$

est l'angle entre le repère des déformations principales et le repère local tel que :

$$\text{tg}2\theta = \frac{-2 \bar{B}_{12}}{\bar{B}_{11} - \bar{B}_{22}}$$

$$\left\{ \begin{matrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{matrix} \right\} = \left[ \frac{1}{2} (\bar{B}_{11} + \bar{B}_{22}) \pm \frac{1}{2} \left\{ (\bar{B}_{11} - \bar{B}_{22})^2 + 4 \bar{B}_{12}^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \right]^{\frac{-1}{2}}$$

où  $\bar{B}_{11}, \bar{B}_{12}, \bar{B}_{22}$  sont les composantes de  $B^{-1}$  Avec la condition **d'incompressibilité plastique** de la surface de Von-Mises, l'élongation à travers l'épaisseur est :

$$\lambda_3 = 1 / (\lambda_1 \lambda_2) = h / h_0$$

Par conséquent les **déformations logarithmiques principales** sont :

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \log \lambda_1 & \varepsilon_2 &= \log \lambda_2 \\ \text{et } \log \lambda_3 &= \varepsilon_3 = -(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) \end{aligned}$$

On obtient alors le tenseur des déformations logarithmiques (ou matérielles) dans **le repère local** dans la configuration finale  $C_{(t)}$  :

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2} \gamma_{xy} & 0 \\ \frac{1}{2} \gamma_{xy} & \varepsilon_y & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \end{bmatrix} = [\mathbf{m}] [\log \lambda] [\mathbf{m}]^T$$

En négligeant l'élasticité (mais pas nécessairement), l'accès aux contraintes de Cauchy est immédiat avec l'inverse de la loi intégrée (18) si les axes d'orthotropie sont faits coïncidant avec les axes locaux en p.

## 5.2 PLASTICITE SEULE

### 5.2.1 Formules de Prandtl-Reuss

Dans ce qui suit on **néglige** les déformations **élastiques**, les déformations sont les seules **déformations plastiques**, donc **logarithmiques** car **cumulables** et on reprend la notation habituelle  $\sigma$  pour les contraintes mais qui restent les **contraintes vraies de Cauchy**. Dans ces conditions, on peut résoudre des problèmes simples en **grandes déformations plastiques** en raisonnant dans les **axes principaux** de ces déformations pour **cumuler** les incréments.

Avec ces **hypothèses simplificatrices**, la plasticité **seule** nécessite un jeu d'équations **limité** et pour **alléger la notation** on **enlève** l'indice p (Plastique) inutile pour les déformations.

- a / Le **critère** qui définit également la **surface de charge** ici Von-Mises

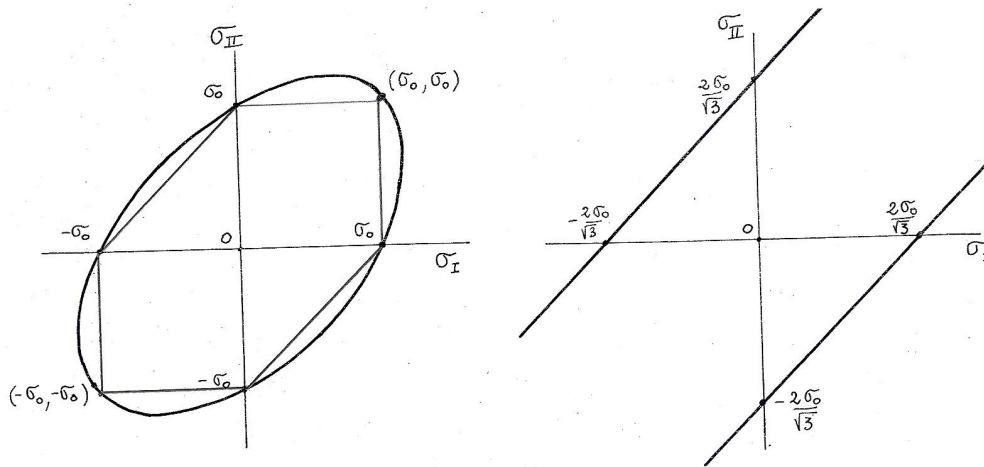
$$(20) \quad q = \sqrt{\frac{3}{2} s_{ij} s_{ij}} = \left[ \{\sigma\}^T [\mathbf{M}] \{\sigma\} \right]^{1/2} = \sigma_{eq}$$

$\sigma_{eq}$  est la contrainte équivalente de comparaison sur la courbe d'érouissage

Par exemple en **contraintes planes** :

$$q^2 = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{22} & \sigma_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1/2 & 0 \\ -1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix} \quad \text{ou} \quad q^2 = \sigma_{11}^2 - \sigma_{11} \sigma_{22} + \sigma_{22}^2 + 3\sigma_{12}^2$$

Représentations en contraintes planes et en déformations planes :



La figure de **gauche** est la représentation de l'ellipse de Von Mises en **contrainte plane** et **éléments principaux** qui englobe le critère de **Tresca (segments)**. Par contre **la figure de droite** est le cas très particulier des **déformations planes** ici  $\Delta \epsilon_3 = 0$  qui avec la loi

d'écoulement implique  $\sigma_3 = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}$  due à l'incompressibilité (à comparer avec  $\sigma_3 = \nu(\sigma_1 + \sigma_2)$  en élasticité isotrope). Si bien que le critère en **contraintes principales** et

**déformations planes** s'écrit : 
$$\sigma_{eq}^2 = \frac{3}{4}(\sigma_1 - \sigma_2)^2$$

Ce qui veut dire que les contraintes principales peuvent être aussi **grandes** que l'on veut pourvu qu'elles restent **voisines**.

- b / Le matériau plastique est déterminé par sa **courbe d'écrouissage** en **contrainte vraie** et **déformation logarithmique** d'un essai de **traction** qui peut être lissé sous la forme :

- $\sigma_{eq} = K \epsilon_{eq}^n$  Hollomon (2 paramètres K, n)
- $\sigma_{eq} = B(c + \epsilon_{eq})^n$  Swift (3 paramètres B, c, n)
- $\sigma_{eq} = \sigma_0 + Q_\infty(1 - e^{-b\epsilon_{eq}})$  Vocé (3 paramètres  $\sigma_0, Q_\infty, b$ )
- $\sigma_{eq} = Q - (Q - \sigma_0)e^{-b\epsilon_{eq}^n}$  Hockett-Sherby (4 paramètres Q,  $\sigma_0, b, n$ )

autres.....

Le coefficient n est souvent appelé *coefficient d'écrouissage*.

- c / **Loi d'écoulement** :

C'est le troisième ingrédient de la plasticité comme vu dans les chapitres précédents, la **normalité** de l'écoulement plastique implique :

$$(21) \quad \left\{ d\epsilon \right\} = d\lambda \frac{\partial F}{\partial \left\{ \sigma \right\}} = \frac{3}{2q} d\lambda \left\{ s \right\} = d\lambda \left\{ a \right\}$$

$\left\{ s \right\}$  déviateur

avec le **vecteur gradient** : (22) 
$$\boxed{\{a\} = \frac{3}{2q} \{s\} = \frac{1}{q} [M] \{\sigma\}}$$

Avec l'équivalence en énergie de déformation plastique :

(23) 
$$dW^p = \sigma_{eq} d\varepsilon_{eq} = \{\sigma\}^T \{d\varepsilon\}$$

il vient que 
$$d\lambda = d\varepsilon_{eq} \quad \text{car} \quad \sigma_{eq} = q = \{\sigma\}^T \{a\}$$

(24) 
$$\boxed{\{d\varepsilon\} = \frac{d\varepsilon_{eq}}{q} [M] \{\sigma\}}$$

Soit encore pour la déformation plastique équivalente :

(25) 
$$d\varepsilon_{eq}^2 = \{d\varepsilon\}^T [M]^{-T} \{d\varepsilon\}$$

Avec Von-Mises il vient : 
$$d\varepsilon_{eq} = \sqrt{\frac{2}{3} d\varepsilon_{ij} d\varepsilon_{ij}} \quad \varepsilon_{eq} = \int d\varepsilon_{eq}$$

Par exemple en axes principaux et contraintes planes, la relation d'écoulement (24) s'écrit :

$$\begin{Bmatrix} d\varepsilon_1 \\ d\varepsilon_2 \end{Bmatrix} = \frac{d\varepsilon_{eq}}{q} \begin{bmatrix} 1 & -1/2 \\ -1/2 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \end{Bmatrix}$$

avec la relation auxiliaire (incompressibilité plastique) : 
$$d\varepsilon_3 = -(d\varepsilon_2 + d\varepsilon_1)$$

Inversement, il vient :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \end{Bmatrix} = \frac{4q}{3d\varepsilon_{eq}} \begin{bmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d\varepsilon_1 \\ d\varepsilon_2 \end{Bmatrix}$$

Ce jeu de **relations** est **pratique** pour résoudre des **problèmes simples de plasticité seule** (voir la série d'exemples suivants), l'anisotropie initiale est facile à introduire également par l'intermédiaire de la matrice M.

★ **Remarque : Viscoplasticité seule**

La **viscoplasticité** implique que la **courbe d'écrouissage n'est plus unique** mais fonction de la **vitesse de déformation**, le multiplicateur plastique est remplacé dans la loi d'écoulement (21) par la **vitesse de déformation équivalente** donnée **explicitement** en fonction de la contrainte équivalente  $\sigma_{eq}$  de comparaison, du critère q et des paramètres du matériau. On a donc :

$$\boxed{\{\dot{\varepsilon}^{VP}\} = \dot{\lambda} \frac{\partial F}{\partial \{\sigma\}} = \frac{3}{2q} \dot{\lambda} \{s\} = \dot{\lambda} \{a\} = \dot{\varepsilon}_{eq}^{VP} \{a\}}$$

avec par exemple:

$$\dot{\varepsilon}_{eq}^{VP} = \left(\frac{q}{K}\right)^M \quad (\text{loi de Norton}) \quad \text{ou} \quad \dot{\varepsilon}_{eq}^{VP} = \left(\frac{q - \sigma_{eq}}{K}\right)^M \quad \text{avec contrainte seuil et écrouissage}$$

isotrope additif par la déformation dans  $\sigma_{eq}$  pouvant prendre les formes citées plus hauts

comme en plasticité. La contrainte  $\sigma_{eq}$  dépend alors de la déformation viscoplastique cumulée.

ou encore de la forme  $\dot{\epsilon}_{eq}^{VP} = a_0 a_2 (q)^{a_1} (t)^{a_2-1}$  (« Time hardening »).

Dans la forme :  $\dot{\epsilon}_{eq}^{VP} = \dot{\epsilon}_0 \left( \frac{q}{\sigma_{eq}} \right)^{\frac{1}{m}}$  m est le **coefficient** de **sensibilité** à la vitesse et

$\dot{\epsilon}_0$  est une vitesse de déformation de référence.

La **température** peut également intervenir de façon **explicite** par l'intermédiaire de termes d'activation, par exemple avec :

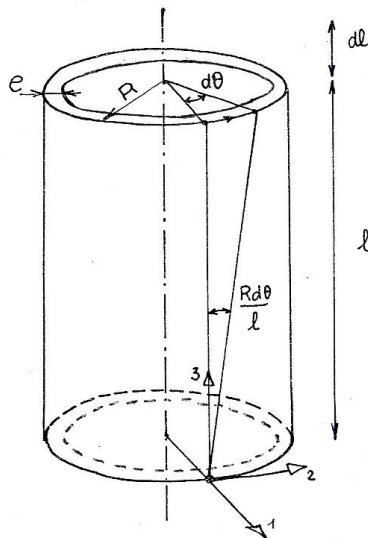
$$\dot{\epsilon}_{eq}^{VP} = \dot{\epsilon}_0 [\text{sh}(Kq)]^N \exp\left(-\frac{Q}{kT}\right)$$

Q énergie d'activation (Kcal/mole)  $10 \leq Q \leq 150$  et k énergie d'autodiffusion (Kcal/mole)  $20 \leq k \leq 200$ .

## 5.2.2 Exemples

### 5.2.2.1 Traction-torsion d'un tube mince

Le tube est soumis à une **histoire d'accroissements** imposés par la machine  $d\ell$  et  $d\theta$



Dans le repère cylindrique 1,2,3 l'état de contrainte et en déviateur s'écrit :

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \tau \\ 0 & \tau & \sigma \end{bmatrix} \quad [s] = \begin{bmatrix} -\sigma/3 & 0 & 0 \\ 0 & -\sigma/3 & \tau \\ 0 & \tau & 2\sigma/3 \end{bmatrix}$$

la **loi d'écoulement** (21) donne en posant  $d\hat{\lambda} = \frac{3}{2q} d\lambda$  :

$$\frac{de}{e} = d\epsilon_{11} = -\frac{\sigma}{3} d\hat{\lambda} \quad \frac{dR}{R} = d\epsilon_{22} = -\frac{\sigma}{3} d\hat{\lambda} \quad \frac{d\ell}{\ell} = d\epsilon_{33} = \frac{2\sigma}{3} d\hat{\lambda} \quad \frac{Rd\theta}{2\ell} = d\epsilon_{23} = \tau d\hat{\lambda}$$



d'où l'incrément de la déformation plastique équivalente avec (25) :

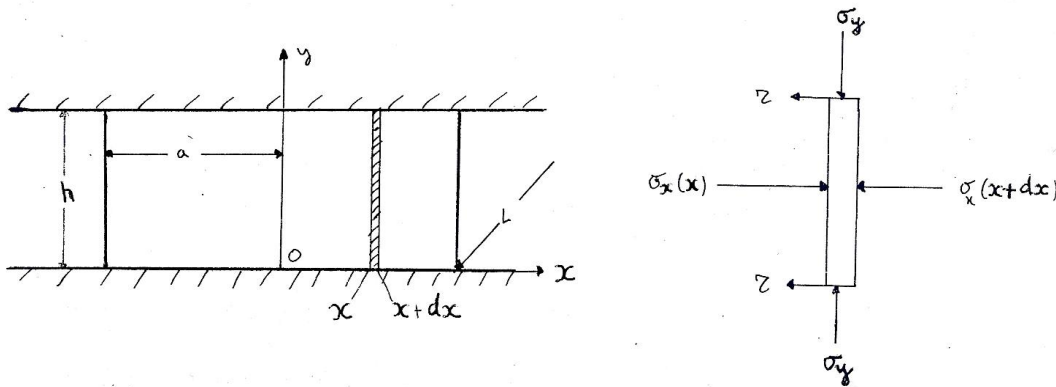
$$d\varepsilon_{eq} = \sqrt{\frac{d\ell^2}{\ell^2} + \frac{R^2 d\theta^2}{3\ell^2}} \text{ qui par cumulo donne : } \varepsilon_{eq} = \sum d\varepsilon_{eq} \text{ d'où } q = \sigma_{eq} = H(\varepsilon_{eq}) \text{ avec la loi}$$

d'écrouissage du matériau supposée donnée. Comme  $d\hat{\lambda} = \frac{3}{2q} d\varepsilon_{eq}$  est maintenant connu, le retour aux lois d'écoulement donne les déviateurs et les contraintes dans ce cas de contrainte plane où la pression hydrostatique  $p$  est égale à :  $p = -\frac{\sigma}{3} = -\frac{d\ell}{2\ell} \frac{1}{d\hat{\lambda}}$  et la

contrainte de cisaillement  $\tau = \frac{q}{3d\varepsilon_{eq}} \frac{Rd\theta}{\ell}$ . Par intégration sur la section on a, après chaque

incrément  $d\ell$  et  $d\theta$  appliqués, l'effort de traction et le couple de torsion :  $F = 2\pi R e \sigma$  et  $C = 2\pi R^2 e \tau$ .

### 5.2.2.2 Forgeage d'une barre en déformation plane



On veut calculer de manière approchée l'effort de forgeage en tenant compte d'un frottement entre le lopin (la barre) et les outils. L'opération s'effectuant à chaud, le matériau est plastique parfait c'est à dire pas d'écrouissage :  $\sigma_{eq} = \sigma_0 = cte$

Le frottement se traduit par un cisaillement  $\tau$  sur les faces supérieure et inférieure et si on admet une uniformité en  $y$  dans une tranche  $dx$ , l'équilibre de cette tranche s'écrit :

$$-hL\sigma_x + hL(\sigma_x + \frac{d\sigma_x}{dx} dx) - 2\tau L dx = 0 \quad \text{soit} \quad \frac{d\sigma_x}{dx} = \frac{2\tau}{h}$$

Si on considère un frottement de type couche limite (Tresca) alors :

$$\tau = m \frac{\sigma_0}{\sqrt{3}} \quad 0 \leq m \leq 1 \quad \text{l'équation s'intègre en : } \sigma_x = \frac{2m\sigma_0}{h\sqrt{3}}(x - a) + \sigma_x(a)$$

comme les surfaces latérales sont libres :  $\sigma_x = \frac{2m\sigma_0}{h\sqrt{3}}(x - a)$  qui est bien négative

le critère de Von-Mises en déformation plane s'écrit :  $\sigma_x - \sigma_y = \frac{2\sigma_0}{\sqrt{3}}$

$$\sigma_y = \frac{2\sigma_0}{\sqrt{3}} \left[ \frac{m}{h}(x - a) - 1 \right]$$

d'où :

Sous l'influence du frottement, la contrainte verticale de compression croît en valeur absolue du bord vers le centre, c'est la colline de frottement des forgerons.

**Effort de forgeage :** 
$$P = -2L \int_0^a \sigma_y(x) dx = 2La \frac{2\sigma_0}{\sqrt{3}} \left(1 + m \frac{a}{2h}\right)$$

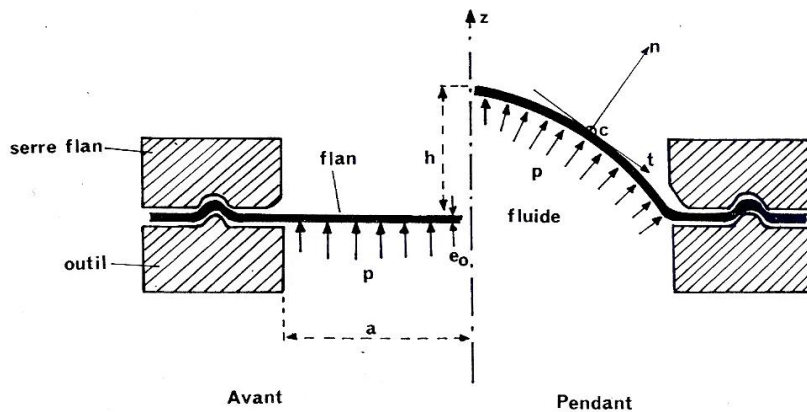
**Pression moyenne :** 
$$p_m = \frac{P}{S} = \frac{2\sigma_0}{\sqrt{3}} \left(1 + m \frac{a}{2h}\right)$$

Par exemple pour un **aplatissement** de la barre  $\frac{2a}{h} = 20$  et  $m=1$ , on atteint des valeurs

élevées : 
$$\left| \sigma_y \right|_{\text{Max}} = 11 \frac{2\sigma_0}{\sqrt{3}} \quad \text{et} \quad p_m = 6 \frac{2\sigma_0}{\sqrt{3}}$$

★ **Remarque :** Ce sont des valeurs approchées mais significatives, même si effectivement la barre présente un « bombé » dû au frottement et perte d'homogénéité en y.

**5.2.2.3 Gonflement d'une coupelle axisymétrique**



L'analyse qui suit est l'histoire de la **compétition** entre l'effet de **courbure** et l'**écrouissage** d'un coté qui **consolide** la pièce et l'**amincissement** qui l'**affaiblit** de l'autre.

**Hypothèses :**

Pour une coupelle **mince** et **isotrope**, le gonflement est pratiquement **sphérique** et les **trajectoires** matérielles sont des **cercles** dans les plans **méridiens**. Le rayon de courbure s'exprime en fonction de la hauteur h par :

$$\rho = \frac{a^2 + h^2}{2h}$$

Les déformations sont principales : **circonférentielles**, **tangentielles** et **normales** donc cumulables avec par raison de symétrie de révolution :

$$\epsilon_\theta = \epsilon_t = \text{Ln}\left(1 + \frac{hz}{a^2}\right)$$

et maximales au pôle  $z=h$  où l'incompressibilité plastique donne : 
$$\epsilon_n = -2\text{Ln}\left(1 + \frac{h^2}{a^2}\right) = -\epsilon_{eq}$$

L'état de contrainte est un état **équibiaxial membranaire** dont l'équation d'équilibre avec la pression p est : 
$$p = \frac{2\sigma e}{\rho} = \frac{2\sigma_{eq} e}{\rho}$$
 qui est la **pression de mise en forme** avec

$$\epsilon_{eq} = \sqrt{\frac{2}{3}(\epsilon_\theta^2 + \epsilon_t^2 + \epsilon_n^2)}$$

par exemple avec un **écrouissage** de la forme : 
$$\sigma_{eq} = K \epsilon_{eq}^n$$

La pression passe par un maximum qui se traduit par un critère d'instabilité comme en traction avec ici :

$$\frac{dp}{p} = \frac{d\sigma}{\sigma} + \frac{de}{e} - \frac{d\rho}{\rho}$$

L'érouissage par la loi puissance ci-dessus donne :

$$\frac{d\sigma}{\sigma} = n \frac{d\varepsilon_{eq}}{\varepsilon_{eq}} \quad \text{et} \quad \frac{de}{e} = -d\varepsilon_{eq}$$

car  $\varepsilon_n = -\varepsilon_{eq}$ . Compte tenu des **hypothèses géométriques**, le rayon de courbure est égal

à :  $\rho = \frac{a^2 + h^2}{2h} = \frac{ae^{\varepsilon_{eq}/2}}{2\sqrt{e^{\varepsilon_{eq}/2} - 1}}$  d'où  $\frac{d\rho}{\rho} = \frac{d\varepsilon_{eq}}{2} - \frac{1}{4} \frac{e^{\varepsilon_{eq}/2} d\varepsilon_{eq}}{e^{\varepsilon_{eq}/2} - 1}$  et finalement la

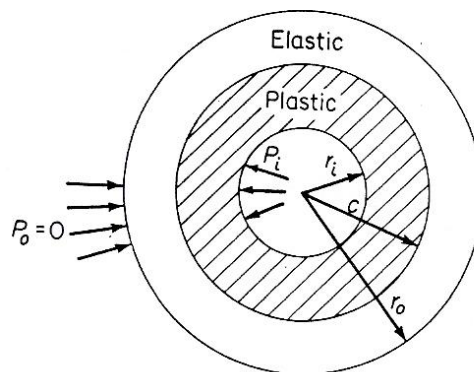
condition d'instabilité s'écrit :

$$\frac{n}{\varepsilon_{eq}} = \frac{3}{2} - \frac{1}{4} \frac{e^{\varepsilon_{eq}/2}}{e^{\varepsilon_{eq}/2} - 1}$$

Un développement limité fournit :  $\varepsilon_{eq} = \frac{4}{11}(2n + 1)$  à l'**instabilité**

On constate que même pour un matériau parfaitement plastique  $n=0$ , il y a gonflement tant que la consolidation par la croissance de la courbure surpasse l'affaiblissement par amincissement.

### 5.2.2.4 Plastification d'un tube épais sous pression



Le comportement **élastique** d'un tube long sous pression avec des fonds est donné par les formules de Lamé (voir TD d'élasticité) en coordonnées cylindriques :

$$\sigma_r = a + b/r^2 \quad \sigma_\theta = a - b/r^2 \quad \sigma_z = \frac{p_i \pi r_i^2 - p_o \pi r_o^2}{\pi r_o^2 - \pi r_i^2}$$

Les constantes a et b se déterminent avec les conditions aux limites et on néglige la pression extérieure ( $p_o = 0$ ), on pose le rapport :  $k = \frac{r_o}{r_i} > 1$  d'où la **solution élastique** :

$$\sigma_r = \frac{p_i}{k^2 - 1} \left[ 1 + k^2 \left( \frac{r_i^2}{r^2} \right) \right] \quad \sigma_\theta = \frac{p_i}{k^2 - 1} \left[ 1 - k^2 \left( \frac{r_i^2}{r^2} \right) \right] \quad \sigma_z = \frac{p_i}{k^2 - 1}$$

Le tube est supposé **élastique parfaitement plastique** avec le critère de Von-Mises on a :

$$2\sigma_0^2 = (\sigma_r - \sigma_\theta)^2 + (\sigma_\theta - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_r)^2$$

d'où pour le tube :

$$\sqrt{3} \frac{p_i}{k^2 - 1} k^2 \left( \frac{r_i^2}{r^2} \right) = \sigma_0$$

La pression augmente, le critère est atteint et on voit que le **début de plastification** est à l'**intérieur** du tube pour  $r = r_i$  (voir figure).

### Solution plastique :

La pression de début de plastification est donc :

$$p_i = \frac{\sigma_0}{\sqrt{3}} \left( 1 - \frac{1}{k^2} \right)$$

Hypothèses : la pression augmente, le tube est suffisamment long pour que les sections aussi bien élastiques que plastiques restent droites, les déformations plastiques axiales sont contenues par l'élasticité d'où négligeables, nous avons donc un régime de déformation

plane dans la zone plastique et avec Von-Mises :  $\sigma_z = \frac{\sigma_r + \sigma_\theta}{2}$  et  $\sigma_\theta - \sigma_r = \frac{2\sigma_0}{\sqrt{3}}$

Or les **équations d'équilibres** sont bien connues :

$$\frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = 0$$

D'où :

$$\frac{d\sigma_r}{dr} - \frac{2\sigma_0}{r\sqrt{3}} = 0 \quad \text{soit} \quad \sigma_r = \frac{2}{\sqrt{3}} \sigma_0 \text{Ln}r + A$$

La contrainte radiale à l'**extérieur** de la **zone plastique** où  $r=c$  (voir figure) doit être **égale** et **opposée** à la contrainte radiale à l'**intérieur** de la **zone élastique**, si bien que :

$$\frac{2\sigma_0}{\sqrt{3}} \text{Lnc} + A = -\frac{\sigma_0}{\sqrt{3}} \left( 1 - \frac{1}{r_0^2} \right) \quad \text{soit} \quad A = \frac{-\sigma_0}{\sqrt{3}} \left( 2\text{Lnc} + 1 - \frac{c^2}{r_0^2} \right)$$

La solution en contrainte dans la zone plastique est donc :

$$\sigma_r = \frac{\sigma_0}{\sqrt{3}} \left( 2\text{Ln} \frac{r}{c} - 1 + \frac{c^2}{r_0^2} \right) \quad \sigma_\theta = \frac{\sigma_0}{\sqrt{3}} \left( 2\text{Ln} \frac{r}{c} + 1 + \frac{c^2}{r_0^2} \right) \quad \sigma_z = \frac{\sigma_0}{\sqrt{3}} \left( 2\text{Ln} \frac{r}{c} + \frac{c^2}{r_0^2} \right)$$

Le rayon  $c$  du **front plastique** augmente avec la pression, il est **déterminé** avec la condition à la limite  $\sigma_r = -p_i$  pour  $r = r_i$  soit :

$$-p_i = \frac{\sigma_0}{\sqrt{3}} \left( 2\text{Ln} \frac{r_i}{c} - 1 + \frac{c^2}{r_0^2} \right)$$

La plastification du tube est complète quand  $c = r_0$  c'est à dire pour une pression :

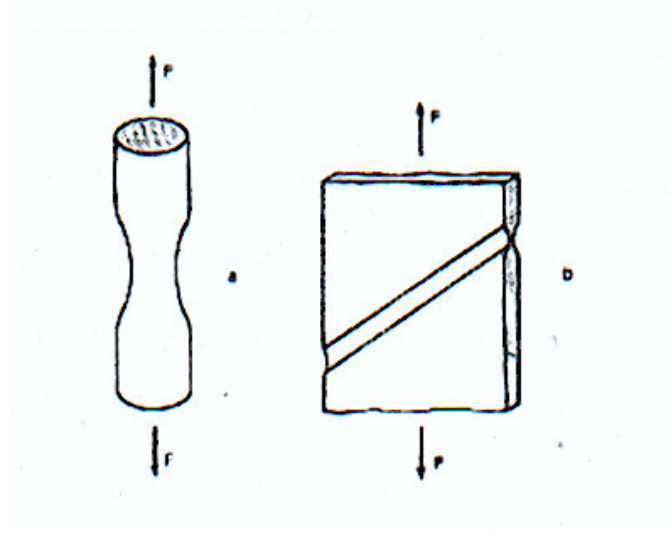
$$p_i = \frac{2\sigma_0}{\sqrt{3}} \text{Ln} \frac{r_0}{r_i}$$

### 5.2.3 Striction diffuse et striction localisée

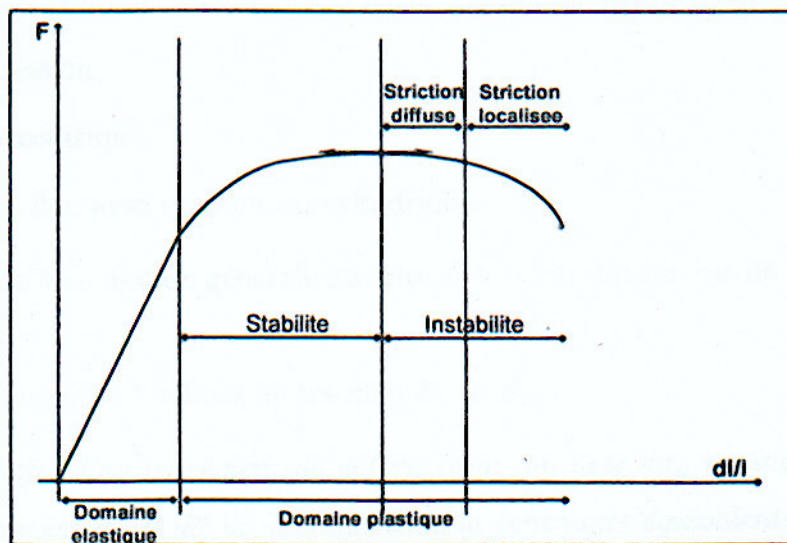
Le phénomène de striction apparaît de manière assez naturelle. En effet, un simple test de traction sur une éprouvette plane permet de constater la formation, dans le domaine plastique, à partir d'une certaine limite de déformation, d'une bande étroite appelée « bande de striction »

Toutefois, derrière le terme de striction se cachent deux phénomènes distincts. Il convient en effet de séparer la **striction diffuse** de la **striction localisée**.

Si la première correspond à une variation homogène de la section, la seconde se traduit par l'apparition d'une bande étroite où se concentre la déformation et correspond à la dernière étape avant la **rupture ductile** du matériau.



Exemple ci-dessus : striction diffuse lors de la traction d'une barre à section circulaire : la variation de section s'effectue sur une zone étendue puis localisée de même que dans le cas d'une plaque en traction : une bande étroite de localisation apparaît.



Un critère établi en 1885 par l'ingénieur Considère est basé sur l'observation de la représentation de la force  $F$  de traction en fonction de l'allongement relatif  $\frac{\Delta l}{l}$  dans le cas d'une éprouvette soumise à un état de traction uniaxiale. On constate alors que la courbe  $F(\frac{\Delta l}{l})$  passe par un **maximum** qui est un point de perte de stabilité de l'équilibre. Mais, l'expérience montre que cette singularité correspond à l'apparition de **striction diffuse** et non pas à l'apparition de striction localisée.

Soient  $F$  la force de traction,  $\sigma$  la contrainte de traction et soient  $L$  la longueur,  $S$  la section et  $V=LS$  le volume utile de l'éprouvette de traction.

La force F passe par un extremum lorsque :  $dF=0$

$$F=\sigma S \qquad dF=d\sigma S+\sigma dS \qquad \frac{dF}{F} = \frac{d\sigma}{\sigma} + \frac{dS}{S}$$

D'après la définition du volume utile  $V=S.L$ , sa différenciation donne :  $\frac{dS}{S} = \frac{dV}{V} - \frac{dL}{L}$

$$\frac{dF}{F} = \frac{d\sigma}{\sigma} - \frac{dL}{L}$$

La plasticité étant incompressible:

La force passant par un **maximum**, on obtient :

$$(26) \quad \boxed{\frac{d\sigma}{d\varepsilon} = \sigma}$$

Cette dernière équation est appelée **critère de force maximum** ou **critère de Considère**. Mais c'est un **critère uniaxial**, cependant il peut être généralisé de plusieurs façons. En 1952, a repris le critère de contrainte maximum afin de déterminer l'apparition de striction. Mais une **condition de localisation a été rajoutée**. En effet, ce critère est basé sur l'observation expérimentale montrant que la striction localisée se développe suivant une **bande d'extension nulle**.

**Localisation en contrainte plane : un critère de force maximum modifié :**

Après la striction diffuse (force maximum) on observe que l'état de déformation dans la **bande de localisation** tend vers un état de **déformation plane**. On émet l'hypothèse que la striction apparaît lorsque l'une des forces de traction exprimée dans le **repère principal** des contraintes est maximale. On admet que la force F1 de traction est la force atteignant la première un maximum. L'expression de la condition d'instabilité est alors la même que dans (26) mais dans l'axe principale de contrainte max  $\sigma_1 \geq \sigma_2$  et  $\sigma_3 = 0$  :

$$(27) \quad \frac{d\sigma_1}{d\varepsilon_1} = \sigma_1$$

On note  $\beta = \frac{d\varepsilon_2}{d\varepsilon_1}$  le **chemin de déformation** incrémental. L'état de déformation se doit d'**évoluer** vers un **état de déformation plane** dans la bande. Cette transformation de l'état de déformation s'obtient par un changement de l'état de contrainte. Il y a alors un effet d'**écrouissage additionnel** pour que la contrainte  $\sigma_1$  soit dépendante du chemin de **déformation incrémental**  $\beta$  et de la déformation principale soit :  $\sigma_1 = \sigma_1(\varepsilon_1, \beta)$  donc :

$$d\sigma_1 = \frac{\partial\sigma_1}{\partial\varepsilon_1} d\varepsilon_1 + \frac{\partial\sigma_1}{\partial\beta} d\beta$$

et (27) devient :

$$(28) \quad \boxed{\frac{\partial\sigma_1}{\partial\varepsilon_1} + \frac{\partial\sigma_1}{\partial\beta} \frac{d\beta}{d\varepsilon_1} = \sigma_1}$$

Dans (28), il est possible de développer **analytiquement** toutes les dérivées (à faire en exercice) pour une surface de charge quadratique (Von-Mises, Hill) ou non quadratique. Ce **critère** donne de bons résultats comparés aux mesures et permet de tracer des **Courbes**

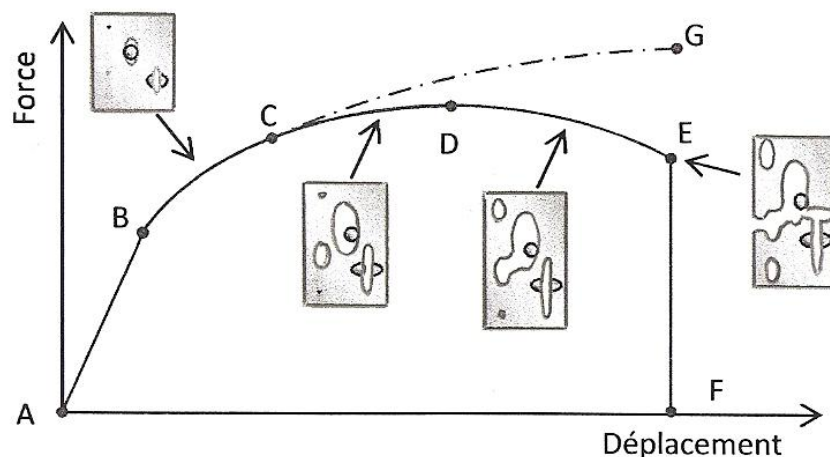
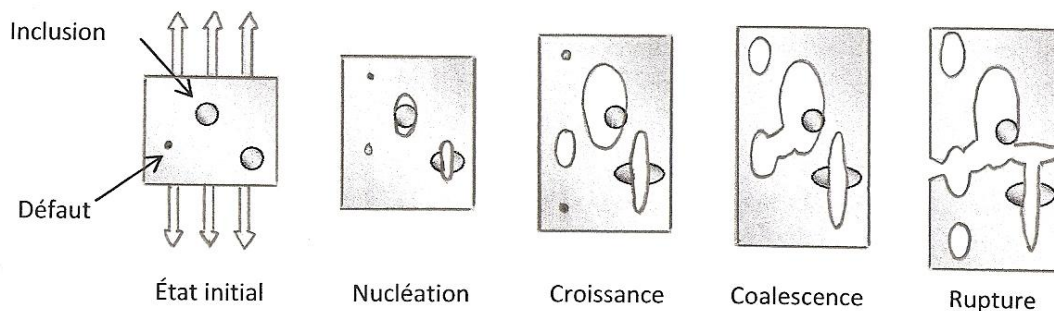
**Limites de Formage** (CLF) théoriques pour des trajets de déformations aussi bien linéaires que non linéaires.

## 5.3 ENDOMMAGEMENT DUCTILE

### 5.3.1 Modèles découplés

Après le phénomène de striction localisée, apparaît la rupture ductile, voir figure précédente. Il est clairement établi que la **rupture ductile** des matériaux métalliques peut être décrite par une succession de **3 stades** avant la rupture :

1. apparition de **cavités** par rupture ou par décohésion d'interfaces matrice/inclusion ou de précipités (**germination** ou **nucléation**)
2. **croissance** des cavités jusqu'à une dimension critique,
3. **coalescence** de ces cavités amenant la rupture finale.



Les approches proposées dans la littérature peuvent se regrouper en **2 grandes familles**.

La **première** famille, **les modèles découplés**, suppose que l'endommagement du matériau n'affecte pas le comportement global. La rupture de la structure se produit lorsque

l'endommagement atteint une **valeur critique** qui est supposée être **intrinsèque** au matériau.

La **seconde** famille, **modèles couplés** essentiellement **thermodynamiques** et **poreux**, définit des **potentiels élastoplastiques endommageables**. Le comportement du matériau et l'endommagement sont alors liés. La rupture est décrite implicitement par l'adoucissement de la réponse globale de la structure.

Ce paragraphe regroupe les modèles utilisés pour la prévision de la rupture ductile. Ces modèles sont dits « découplés » car **le calcul de l'endommagement est effectué après un calcul purement élastoplastique** sur la structure à étudier. Les hypothèses émises sont que l'endommagement n'affecte pas le comportement global du matériau et que l'instabilité au moment de la rupture peut être décrite par une **valeur critique** d'un paramètre d'endommagement. Ce paramètre découle soit d'un point de vue global (modèles phénoménologiques issus de constatations expérimentales ou d'approches thermodynamiques), soit d'un point de vue local par l'étude de la croissance de cavité. Lorsque l'endommagement atteint cette valeur critique, la rupture ou l'amorçage se produit.

L'**identification** de l'endommagement se fait sur des éprouvettes de traction lisses et entaillées qui donnent les courbes **effort-déplacement** tel que celle dessinée ci-dessus où se **superposent** les effets de **striction** (instabilité plastique) et les effets d'**endommagement** surtout à partir du point C. La branche virtuelle CG est pratiquement jamais observée pour un matériau ductile. Ces **courbes** sont à la **base** des **modèles élasto-plastiques couplés**.

D'une façon générale, les **modèles découplés** prennent la forme suivante :

$$\int_0^{\bar{\varepsilon}_r} f(\sigma, \bar{\varepsilon}) d\bar{\varepsilon} = \alpha_c$$

où  $\bar{\varepsilon}_r$  est la déformation équivalente à rupture et  $\alpha_c$  est la **valeur critique de l'endommagement** qui est considérée comme une **constante intrinsèque au matériau**. La fonction  $f(\sigma, \bar{\varepsilon})$  dépend du modèle.

### Revue limitée de différentes approches

#### a/ Critère de Latham et Cockcroft (1968) :

Ce critère est principalement destiné au cas du formage et de la compression de cylindres :

$$\int_0^{\bar{\varepsilon}_r} \max(\sigma_1, 0) d\bar{\varepsilon} = \alpha_c$$

où  $\sigma_1$  est la **plus grande contrainte principale**. Ce critère fait intervenir un seul paramètre  $\alpha_c$ . Le domaine d'application de ce modèle se limite aux cas où la **triaxialité** des contraintes est peu élevée. Ici  $\bar{\varepsilon}$  est la déformation plastique équivalente.

#### b/ Critère d'Oyane (1972) :

Il a été défini à l'aide de modèles microscopiques et a pour expression :

$$\int_0^{\bar{\varepsilon}_r} \left( 1 + a_0 \frac{\sigma_m}{\sigma_{eq}} \right)^{-c_0} d\bar{\varepsilon} = b_0$$



où  $a_0, b_0$  et  $c_0$  sont des constantes caractéristiques du matériau. Ce modèle, comme le précédent, s'applique à des cas où la triaxialité est relativement faible.

**c/ Critère de Norris :**

Ce critère a été développé à partir d'essais sur des éprouvettes entaillées et fissurées. Il s'écrit de la façon suivante :

$$\int_0^{\bar{\epsilon}_r} \frac{d\bar{\epsilon}}{1 - b \cdot \sigma_m} = \alpha_c$$

où  $b$  et  $\alpha_c$  sont des constantes matériau.

**d/ Lois basées sur la croissance de cavités :**

Dans le cas d'un matériau parfaitement plastique et pour une **cavité sphérique** isolée dans un milieu infini sans interaction, Rice et Tracey ont proposé la loi de croissance suivante :

$$\ln\left(\frac{R}{R_0}\right) = \int_{\epsilon_0}^{\epsilon_r} 0.283 \text{sign}(\sigma_m) \exp\left(\frac{3}{2} \frac{|\sigma_m|}{\sigma_0}\right) d\epsilon_{eq}^p$$

avec  $\sigma_0$  la contrainte d'écoulement plastique

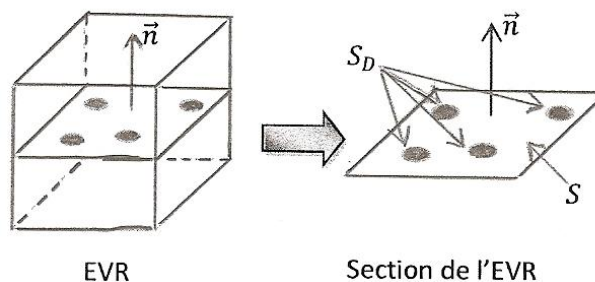
Dans le cas d'un matériau avec écrouissage :

$$\ln\left(\frac{R}{R_0}\right) = \int_{\epsilon_0}^{\epsilon_r} 0.283 \text{sign}(\sigma_m) \exp\left(\frac{3}{2} \frac{|\sigma_m|}{\sigma_{eq}}\right) d\epsilon_{eq}^p$$

Ce modèle découplé d'endommagement est basé sur le calcul du **taux de croissance**. On définit ensuite un **taux de croissance critique** qui est indépendant du taux de triaxialité des contraintes (à l'aide d'essais sur des éprouvettes axisymétriques entaillées, par exemple). Dès que le taux de croissance  $(R/R_0)$  atteint **une valeur critique**  $(R/R_0)_c$ , on pose que le matériau perd toute résistance mécanique et que la rupture de l'élément de volume est instantanée.

★ **Remarque** : Ce modèle de croissance est à la **base** des modèles **poreux couplés**

**5.3.2 Modèle thermodynamique couplé**



Dans un solide qui s'endommage, isolons un **Élément de Volume Représentatif (EVR)** repéré par sa normale  $\vec{n}$ . Si  $\tilde{S} = S - S_D$  l'aire résistante effective, l'endommagement de la

section se définit comme :  $D_n = \frac{S - \tilde{S}}{S} = \frac{S_D}{S}$  si  $D_n = 1 \Rightarrow$  rupture de l'EVR

Dans ce polycop, nous faisons l'hypothèse de l'**isotropie** de l'endommagement si bien que nous avons une **variable scalaire** :  $D_n = D \quad \forall \vec{n}$

L'endommagement découle donc du concept de surface résistante effective. On définit le **tenseur** des **contraintes de Cauchy effectives** avec :

$$\tilde{\sigma} = \frac{\sigma}{1 - D}$$

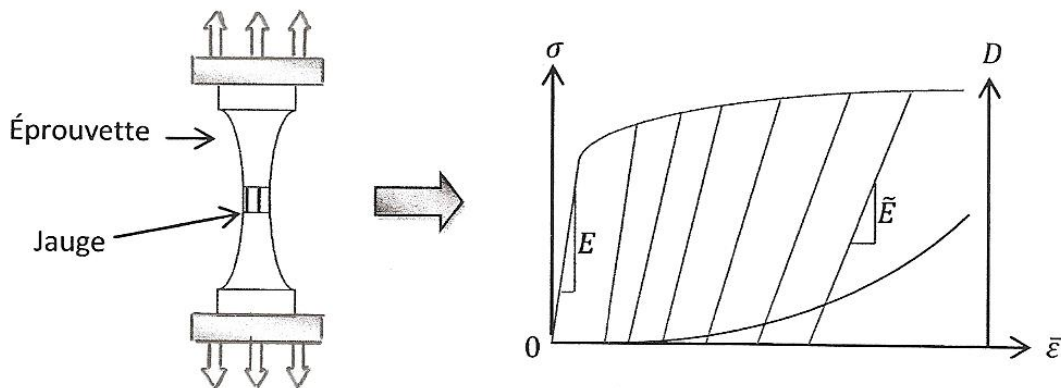
**5.3.2.1 Principe d'équivalence en déformation : (J. Lemaître 1980)**

« Le comportement du matériau endommagé est traduit par les lois de comportement du matériau vierge dans lesquelles on remplace la contrainte usuelle par la contrainte effective »

L'apparition de l'endommagement dans un matériau ductile se traduit par l'évolution de nombreuses propriétés mécaniques et physiques comme :

- La diminution du **module d'élasticité**
- La diminution de la **densité**
- La diminution de la **dureté**
- .....autres.....

pour ne citer que les principaux effets



Avec le principe d'équivalence en déformation, la loi élastique linéaire 1D d'un matériau endommagé s'écrit :  $\sigma = (1 - D)E\varepsilon^e$  d'où le module endommagé  $\tilde{E} = (1 - D)E$

Ainsi, en **mesurant (difficilement)** l'évolution du module E par une série de charge-décharge il est possible de déterminer la **variation** de l'**endommagement** D.

**5.3.2.2 Potentiel thermodynamique**

On postule que la variable associée à la variable d'état d'endommagement D est le **taux de restitution d'énergie élastique** Y qui par le produit  $-Y\dot{D}$  correspond à la **puissance dissipée** par le processus de **décohésion**. L'**énergie libre** est donnée par la somme :

$$\psi = \psi^{ed}(\varepsilon^e, D) + \psi^p(\mathbf{r})$$

où  $\psi^{ed}$  et  $\psi^p$  sont respectivement le **potentiel élastique endommageable** et le **potentiel plastique** fonction de la variable d'état d'érouissage isotrope  $r$ . Le choix de ce potentiel donne accès à la loi d'élasticité endommageable avec :

$$\sigma = \rho \frac{\partial \psi^{ed}}{\partial \varepsilon^e} = (1-D)C^e : \varepsilon^e \quad \text{ou} \quad \boxed{\tilde{\sigma} = C^e : \varepsilon^e = 2\mu\varepsilon^e + \lambda \text{tr}\varepsilon^e \mathbf{I}} \quad \text{loi de Hooke avec :}$$

le module de cisaillement  $\mu = \frac{E}{2(1+\nu)}$  et coefficient de Lamé  $\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}$

Le **taux de restitution d'énergie**, variable thermodynamique associée à l'endommagement, est donné par :

$$Y = -\rho \frac{\partial \psi^{ed}}{\partial D} = \frac{1}{2} \varepsilon^e : C^e : \varepsilon^e$$

En **inversant** la loi élastique et en décomposant le tenseur des contraintes en partie **déviatorique**  $s$  et en partie **sphérique**  $p$ , on obtient :

$$Y = \frac{1}{2(1-D)^2} \sigma : C^e : \sigma = \frac{1}{2E(1-D)^2} [(1+\nu)\sigma : \sigma - \nu \text{tr}(\sigma)^2]$$

Soit encore:

$$\boxed{Y = \frac{\sigma_{eq}^2}{2E(1-D)^2} \left[ \frac{2}{3}(1+\nu) + 3(1-2\nu) \left( -\frac{p}{\sigma_{eq}} \right)^2 \right]}$$

où apparaît la **contrainte équivalente**  $\sigma_{eq} = \sqrt{\frac{3}{2} s : s}$  et le **taux de triaxialité**  $-\frac{p}{\sigma_{eq}}$  qui

donnent en première approximation le type d'état de contrainte local de la matière. De la même manière, la variable thermodynamique associée à l'érouissage isotrope est:

$$R = \rho \frac{\partial \psi^p}{\partial r} = R(r)$$

Le **2ème principe** sous la forme de l'inégalité de Clausius-Duhem est toujours **satisfait** si le taux d'endommagement est **positif** :

$$\sigma : \dot{\varepsilon}^p - R\dot{r} + Y\dot{D} \geq 0$$

### 5.3.2.3 Potentiel des dissipations et lois d'évolution

On suppose l'existence d'un potentiel des dissipations  $F$ , fonction convexe des variables associées, qui se décompose en **2 parties** :  $F = f + F_Y$

$f$  est ici le critère isotrope de Von-Mises (ce n'est pas une limitation) auquel on applique le principe d'**équivalence** en **déformation** :

$$f(\tilde{\sigma}, R) = \tilde{\sigma}_{eq} - \sigma_0(r, \dot{r}) \leq 0 \quad \text{ou} \quad f(\sigma, R, D) = \frac{\sigma_{eq}}{1-D} - \sigma_0(r, \dot{r}) \leq 0$$

$F_Y$  est le potentiel de dissipation lié à l'endommagement qui est **postulé** sous la forme :

$$F_Y = \frac{S_0}{(b+1)(1-D)} \left( \frac{Y}{S_0} \right)^{b+1}$$

où  $b$  et  $S_0$  sont des **constantes matériau** à **identifier** par la suite sur des courbes **effort-déplacement** jusqu'à rupture. Les **lois d'évolutions** des variables internes sont obtenues en **dérivant** les potentiels des dissipations :

- Pour le tenseur des taux de déformations plastiques :

$$\dot{\epsilon}^p = \dot{\lambda} \frac{\partial F}{\partial \sigma} = \frac{\dot{\lambda}}{1-D} \frac{3}{2\sigma_{eq}} s$$

Ici la vitesse de déformation équivalente s'identifie à :

$$\dot{\epsilon}_{eq} = \frac{\dot{\lambda}}{1-D}$$

- Pour la variable d'écroissage isotrope :

$$\dot{r} = -\dot{\lambda} \frac{\partial F}{\partial R} = \dot{\lambda} = (1-D)\dot{\epsilon}_{eq}$$

- Pour le taux d'endommagement :

$$\dot{D} = \dot{\lambda} \frac{\partial F}{\partial Y} = \frac{\dot{\lambda}}{1-D} \left( \frac{Y}{S_0} \right)^b$$

### 5.3.2.4 Le multiplicateur plastique

Comme pour l'élasto-plasticité nous appliquons le **critère de consistance** :  $f=0$  et  $\dot{f} = 0$ , soit :

$$\dot{f} = \frac{\partial f}{\partial \tilde{s}} : \tilde{s} + \frac{\partial f}{\partial \sigma_0} \frac{\partial \sigma_0}{\partial r} \dot{r} = 0$$

et après quelques calculs en déviateurs et en 3D. (c'est différent en contrainte plane, exercice):

$$\dot{\epsilon}_{eq} = \frac{\dot{\lambda}}{1-D} = \frac{\langle \tilde{s} : \dot{\epsilon} \rangle}{\tilde{\sigma}_{eq} \left( 1 + \frac{1-D}{3\mu} \frac{\partial \sigma_0}{\partial r} \right)} = \frac{\langle s : \dot{\epsilon} \rangle}{\sigma_{eq} \left( 1 + \frac{1-D}{3\mu} \frac{\partial \sigma_0}{\partial r} \right)}$$

où  $\frac{\partial \sigma_0}{\partial r} = H'$  le **module tangent plastique** de la **courbe d'écroissage**.

Si l'endommagement est nul ( $D=0$ ) on retrouve l'expression du multiplicateur plastique en élasto-plasticité de Von-Mises. L'expression ci-dessus permet d'écrire le **module tangent continu** du matériau **élasto-plastique endommagé**.

### 5.3.2.5 Effets de triaxialité et de fermeture des fissures

Il se pose le problème de la **distinction** de l'endommagement en **traction** de celui en **compression** où dans ce cas les microcavités ou les fissures vont se **refermer** et redonner de la résistance au matériau et diminuer la vitesse d'endommagement. Le problème est **complexe** mais une **approximation simple** peut être faite avec un **coefficient h** tel que ( $0 \leq h \leq 1$ ) où :

- En traction :  $\tilde{\sigma} = \frac{\sigma}{1-D}$  si  $-\frac{p}{\sigma_{eq}} > 0$

- En compression : 
$$\tilde{\sigma} = \frac{\sigma}{1 - hD} \quad \text{si} \quad -\frac{p}{\sigma_{eq}} < 0$$

De plus il y a une **limite inférieure** (-1/3) à la triaxialité où la rupture n'apparaît guère d'où :

$$\begin{aligned} \dot{D} &= \frac{\dot{\lambda}}{1 - D} \left( \frac{Y}{S_0} \right)^b & \text{si} & \quad -\frac{p}{\sigma_{eq}} > 0 \\ \dot{D} &= \frac{\dot{\lambda}}{1 - hD} \left( \frac{Y}{S_0} \right)^b & \text{si} & \quad -\frac{1}{3} < -\frac{p}{\sigma_{eq}} \leq 0 \\ \dot{D} &= 0 & \text{si} & \quad -\frac{p}{\sigma_{eq}} \leq -\frac{1}{3} \end{aligned}$$

### 5.3.3 Modèles poreux couplés

Cette approche consiste à assimiler des cavités de différentes tailles à un **matériau poreux**. Le comportement du matériau est alors décrit à l'aide de **potentiels élastoplastiques endommageables**, où l'endommagement, la **fraction volumique des cavités**  $f$ , est **explicitement** formulé par la **conservation** de la **masse** et des **formules** de **nucléation** (voir plus loin).

#### 5.3.3.1 Modèle de Gurson

Gurson en 1977 à partir d'un modèle microstructural a défini pour différentes géométries de microcavités des potentiels plastiques. Dans son approche, la matrice est rigide et parfaitement plastique. Pour des cavités sphériques, avec ( $\sigma_{eq} = q$ ) le critère de plasticité de Von Mises, on a:

$$\Phi = \frac{\sigma_{eq}^2}{\sigma_0^2} + 2f \cosh\left(\frac{3}{2} \frac{\sigma_m}{\sigma_0}\right) - (1 + f^2) = 0 \quad \text{où} \quad f = \frac{V - V_m}{V}$$

avec  $f$  la **fraction volumique de cavités** et  $\sigma_0$  la contrainte d'écoulement de la matrice. On peut remarquer que pour une porosité nulle ( $f = 0$ ), le potentiel se réduit au critère de Von Mises. ( $V - V_m$ ) est le **volume apparent** des **cavités**.

Pratiquement, ce modèle surévalue la ductilité, ce qui est attribué au fait que l'interaction entre les cavités n'est pas prise en compte. Pour tenir compte de cette interaction, Tvergaard en 1982 estime qu'une meilleure représentation est obtenue si on introduit dans le potentiel de Gurson 3 paramètres  $q_1$ ,  $q_2$  et  $q_3$ .

$$\Phi = \frac{\sigma_{eq}^2}{\sigma_0^2} + 2f \cdot q_1 \cosh\left(\frac{3}{2} \frac{q_2 \cdot \sigma_m}{\sigma_0}\right) - (1 + q_3 \cdot f^2) = 0$$

Avec l'appui de calculs par éléments finis, Tvergaard aboutit aux valeurs suivantes des paramètres :  $q_1=1.5$ ,  $q_2=1$  et  $q_3= q_1^2$ , ce qui revient à multiplier la proportion de cavités. Récemment il a été montré que le paramètre  $q_1$  est fonction de la porosité  $f$ . Pour une

porosité (f) tendant vers 0, le paramètre  $q_1$  est égal à  $4/e \approx 1.47$ . Lorsque la porosité est de 1 (100% de vide), la valeur de  $q_1$  est de 1.

Mais si ce potentiel décrit convenablement le comportement global, il ne peut rendre compte de l'accélération de la déformation qui se produit juste avant la coalescence des cavités. Ainsi, on introduit également une **fraction volumique effective**  $f^*$  qui va atteindre une **valeur critique**:

$$\Phi = \frac{\sigma_{eq}^2}{\sigma_0^2} + 2f^* \cdot q_1 \cosh\left(\frac{3}{2} \frac{q_2 \cdot \sigma_m}{\sigma_0}\right) - (1 + q_1^2 \cdot f^{*2}) = 0 \quad \text{si } \sigma_m > 0$$

$$\Phi = \frac{\sigma_{eq}^2}{\sigma_0^2} + 2f^* q_1 - (1 + q_1^2 f^{*2}) = 0 \quad \text{si } \sigma_m \leq 0$$

où  $\sigma_0$  est la contrainte d'écoulement du matériau non endommagé, la fonction  $f^*$  veut représenter l'étape de **coalescence** des cavités pour des matériaux avec des fractions volumiques faibles :

$$f^* = \begin{cases} f^* = f & f \leq f_c \\ f^* = f_c + \delta(f - f_c) & f > f_c \end{cases} \quad \text{avec } \delta = \frac{f_u - f_c}{f_F - f_c}$$

$\delta$  représente la **pen**te « d'accélération » de la croissance de porosité.  $f_c$  est la valeur du début de la coalescence,  $f_F$  correspond à la porosité pour laquelle le matériau perd toute résistance. Pour  $f^*$  égal à  $1/q_1$ , on montre que la contrainte  $\sigma_{eq}$  est nulle. Si ce formalisme est souvent utilisé dans les codes de calcul, le défaut est que la **porosité critique** à **coalescence** n'est **pas** une valeur **intrinsèque** au **matériau**.

Les **paramètres** du modèle de Gurson sont ainsi au **nombre** de **5** :  $f_0$  (la porosité initiale),  $\delta$ ,  $f_c$ ,  $q_1$ ,  $q_2$ . sans compter ceux qui sont liés à l'évolution de la porosité (voir plus loin).

### 5.3.3.2 Modèle de Rousselier

Dans le cadre d'une approche **thermodynamique**, Rousselier a développé une théorie en considérant **la porosité comme une variable interne**. Le potentiel retenu est de la forme avec ( $\sigma_{eq} = q$ ) le critère de plasticité de Von Mises:

$$\Phi = \frac{\sigma_{eq}}{(1-f)\sigma_0} + \frac{\sigma_1}{\sigma_0} f D \exp\left(\frac{\sigma_m}{(1-f)\sigma_1}\right) - 1 = 0$$

Les paramètres D et  $\sigma_1$  sont fonctions du matériau :

- La contrainte  $\sigma_1$  caractérise la résistance de la matrice à la croissance et à la coalescence des cavités. Généralement, la contrainte  $\sigma_1$  est prise au voisinage des 2/3 de la contrainte d'écoulement du matériau soit  $\sigma_1 = (R_e + R_m)/3$
- Pour  $D = 3 \times 0.283$  et  $\sigma_1 = 2 \sigma_{eq} / 3$ , une analogie est retrouvée avec le potentiel de Gurson et la modèle de Rice et Tracey. Pour une bonne description de la rupture, D est compris entre 1.5 et 2.

Ce potentiel est identique à celui de Von Mises lorsque la fraction volumique est nulle ( $f = 0$ ). Le matériau perd toute résistance pour une porosité  $f$  égale à 1 (100%).

Lorsque la fraction volumique est non nulle, la forme du potentiel est linéaire alors que le potentiel de Gurson-Tvergaard est de forme quadratique. De plus, la formulation du modèle de Rousselier conduit à un comportement dissymétrique par rapport à l'axe  $\sigma_{eq}/\sigma_0$ . Les paramètres du modèle de Rousselier sont au nombre de 3 :  $f_0$  (la porosité initiale),  $\sigma_1$ ,  $D$ .

★ **Remarque :**

A partir de ces modèles de type croissance de porosité, il y a de nouveaux modèles d'endommagement ductile qui prennent en compte l'**anisotropie** du matériau, la **rotation** et la présence d'**inclusions** dans les cavités.

**5.3.3.3 Evolution de la porosité**

En général, l'évolution de la porosité  $f$  est liée à deux phénomènes : la **germination (ou nucléation)** de nouvelles cavités et la **croissance** de celles-ci. Cette évolution est usuellement écrite sous la forme additive :

$$\dot{f} = \dot{f}_{germination} + \dot{f}_{croissance}$$

où la **conservation de la masse** impose :

$$\dot{f}_{croissance} = (1-f)tr\dot{\epsilon}^p$$

Pour la germination, le modèle le plus simple est le **modèle linéaire continu** avec une déformation seuil à partir de laquelle la germination démarre :

$$\dot{f}_{germination} = A_0 H(\epsilon_{eq}^p - \epsilon_0^p) \dot{\epsilon}_{eq}^p$$

où  $H$  est la fonction échelon unité de Heavyside,  $A_0$  et  $\epsilon_0^p$  des **paramètres matériau à identifier** avec les autres par **analyse inverse** sur les **courbes effort-déplacement** d'essais de traction d'éprouvettes lisses et entaillées pour faire varier le taux de triaxialité. En standard dans les codes de calcul on trouve également pour la nucléation le modèle de **distribution normale** :

$$\dot{f}_{germination} = \frac{f_N}{S_N \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} \left( \frac{\epsilon_{eq}^p - \epsilon_N}{S_N} \right)^2} \dot{\epsilon}_{eq}^p = A_1(\epsilon_{eq}^p) \dot{\epsilon}_{eq}^p$$

avec ici 3 paramètres au lieu de 2 dans le modèle linéaire.

L'**identification** de tous les paramètres est **délicate** car c'est un problème d'**optimisation** qui peut conduire à des minima locaux sans signification physique. De plus se pose le problème de la **localisation numérique** et la dépendance au maillage éléments finis dès que le comportement présente un **adoucissement**, question traitée au chapitre 6. Ce problème se pose pour **tous** les modèles d'endommagement dès qu'il s'agit de d'identifier celui-ci sur un **matériau réel**, c'est aussi le cas des paramètres  $b$  et  $S_0$  du modèle thermodynamique.

5.3.3.4 Le multiplicateur plastique

Le travail plastique du matériau endommagé s'écrit :  $(1 - f)\sigma_{eq} \dot{\epsilon}_{eq}^p = \sigma : \dot{\epsilon}^p$

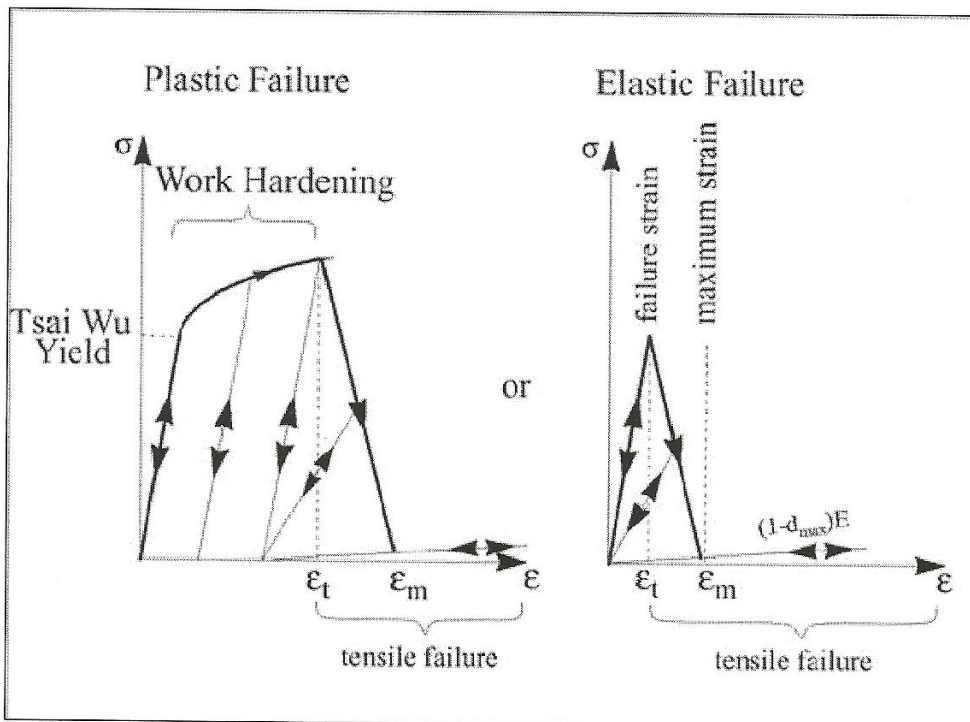
La condition de consistance :  $\dot{\Phi} = 0$  permet après quelques calculs d'écrire:

$$\dot{\lambda} = \frac{\Phi}{\frac{\partial \Phi}{\partial \sigma} : C^e : \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma} - \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma_{eq}} \frac{\partial \sigma_{eq}}{\partial \epsilon_{eq}^p} A_2 - \frac{\partial \Phi}{\partial f} \left[ (1 - f) \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma} : I + A_1 A_2 \right]}$$

où  $A_2 = \frac{\sigma : \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma}}{(1 - f)\sigma_{eq}}$

5.3.4 Endommagement des plaques composites

Dans ce paragraphe nous présentons un exemple de modèle adapté aux matériaux composites matrice-fibres tels que les polymères chargés de fibres de verre aux applications industriels nombreuses. Ainsi des plastiques thermodurcissables tels que les « SMC Sheet Moulding Compound » obtenus par moulage par compression ou les thermoplastiques tels que les polypropylènes chargés obtenus par moulage par injection. Ils constituent des pièces dites de peau ou de structure de nombreux véhicules.



De part leur structure, ils présentent une orthotropie élastique, une dimension faible devant les deux autres (plaque, coque) un comportement élasto-plastique avec une rupture plastique ou élastique fragile tel que résumé sur la figure ci-dessus.



5.3.4.1 Comportement élastique endommagé

Comme le montre la figure ci-dessus, au-delà d'un certain seuil de déformation élasto-plastique l'élasticité présente un endommagement que l'on caractérise dans les **axes d'orthotropie** sens long 1 et sens travers 2 en situation de **contrainte plane** tel que :

$$\underline{\underline{\tilde{H}(\varepsilon)}} = \begin{bmatrix} \frac{(1-d_1)^2 E_{11}}{1-\nu_{12}\nu_{21}} & \frac{(1-d_1)(1-d_2)E_{11}\nu_{21}}{1-\nu_{12}\nu_{21}} & 0 \\ \frac{(1-d_1)(1-d_2)E_{22}\nu_{12}}{1-\nu_{12}\nu_{21}} & \frac{(1-d_2)^2 E_{22}}{1-\nu_{12}\nu_{21}} & 0 \\ 0 & 0 & (1-d_1)(1-d_2)G_{12} \end{bmatrix}$$

C'est la **matrice élastique orthotrope endommagée ou non**. Les deux **facteurs d'endommagement**  $d_i$  **varient** avec la déformation correspondante tel que :

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ii} < \varepsilon_{Ti} &\rightarrow d_i(\varepsilon_{ii}) = 0 \\ \varepsilon_{Si} \geq \varepsilon_{ii} \geq \varepsilon_{Ti} &\rightarrow d_i(\varepsilon_{ii}) = \left( \frac{\varepsilon_{ii} - \varepsilon_{Ti}}{\varepsilon_{Mi} - \varepsilon_{Ti}} \right)^n \\ \varepsilon_{ii} > \varepsilon_{Si} &\rightarrow d_i(\varepsilon_{ii}) = d_{imax} \quad \text{avec } i=1,2 \end{aligned}$$

On pose comme endommagement max :

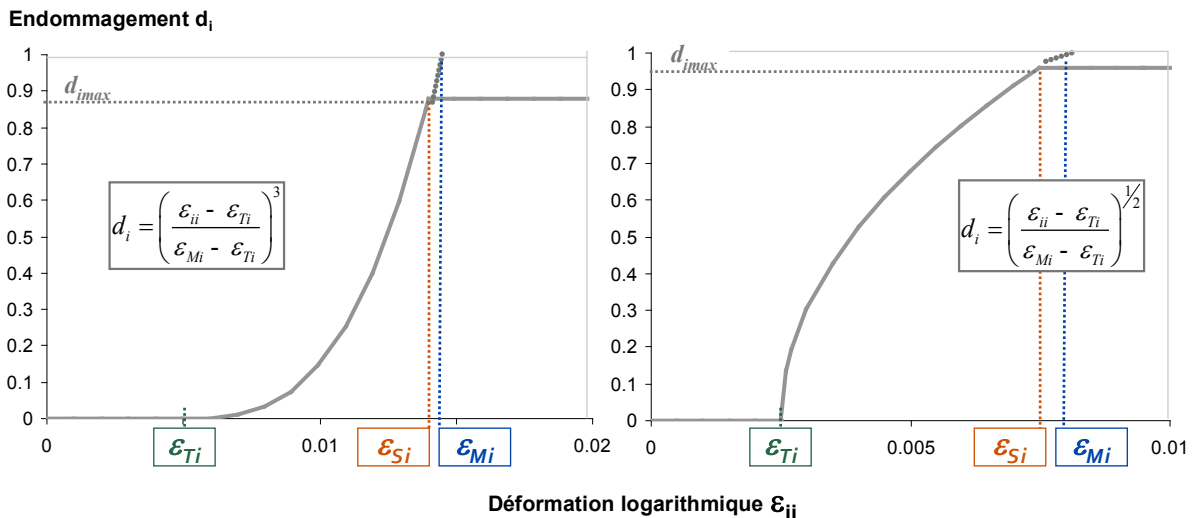
$$d_{1max} = \left( \frac{\varepsilon_{S1} - \varepsilon_{T1}}{\varepsilon_{M1} - \varepsilon_{T1}} \right)^n \quad \text{et} \quad d_{2max} = \left( \frac{\varepsilon_{S2} - \varepsilon_{T2}}{\varepsilon_{M2} - \varepsilon_{T2}} \right)^n$$

tel que :  $d_1 \geq d_{1max} \rightarrow \sigma_{11} = \sigma_{res}$        $d_2 \geq d_{2max} \rightarrow \sigma_{22} = \sigma_{res}$

Les valeurs **d'endommagement maximum**  $d_{imax}$  permettent de modéliser de la **raideur résiduelle** par l'intermédiaire des contraintes résiduelles. Les **paramètres** suivants sont **donnés** par les essais de traction :

- $\varepsilon_{Ti}$  = Déformation élastique de début d'endommagement dans la direction  $i$
- $\varepsilon_{Si}$  = Déformation à l'endommagement maximal  $\sigma_{ii} = \sigma_{res}$
- $\varepsilon_{Mi}$  = Déformation maximale à  $d_i = 1$

**Exemple** pour des **thermoplastiques** et des **thermodurcissables** chargés de **fibres** :



**5.3.4.2 Comportement plastique**

Un critère qui généralise celui de Hill pour les composites est le **critère de Tsai-Wu** qui s'écrit :

$$F(\underline{\sigma}) = F_1\sigma_{11} + F_2\sigma_{22} + F_{11}\sigma_{11}^2 + F_{22}\sigma_{22}^2 + 2F_{12}\sigma_{11}\sigma_{22} + F_{44}\sigma_{12}^2$$

avec

$$\begin{aligned} F_1 &= -\frac{1}{\sigma_{1y}^c} + \frac{1}{\sigma_{1y}^t} & F_{11} &= \frac{1}{\sigma_{1y}^t \sigma_{1y}^c} & F_{12} &= \frac{-\alpha}{2} \sqrt{F_{11}F_{22}} \\ F_2 &= -\frac{1}{\sigma_{2y}^c} + \frac{1}{\sigma_{2y}^t} & F_{22} &= \frac{1}{\sigma_{2y}^t \sigma_{2y}^c} & F_{44} &= \left(\frac{1}{\sigma_{12y}}\right)^2 \end{aligned}$$

les limites d'élasticité  $\sigma_{iy}^t$  et  $\sigma_{iy}^c$  en **traction** t et **compression** c pouvant être différentes. Souvent le critère est pris dans sa forme simplifiée et **homogène** avec :

$$F(\underline{\sigma}) = F_{11}\sigma_{11}^2 + F_{22}\sigma_{22}^2 + 2F_{12}\sigma_{11}\sigma_{22} + F_{44}\sigma_{12}^2$$

avec :

$$\begin{aligned} F_{11} &= \left(\frac{1}{\sigma_{1y}^t}\right)^2 & F_{12} &= \frac{-\sqrt{F_{11}F_{22}}}{2} \\ F_{22} &= \left(\frac{1}{\sigma_{2y}^t}\right)^2 & F_{44} &= \left(\frac{1}{\sigma_{12y}}\right)^2 \end{aligned}$$

avec les **limites élastique** en **tension** et en **cisaillement** seulement. La surface de charge est alors définie par :

$$f(\sigma, W_p) = F(\sigma) - k(W_p) = F_{11}\sigma_{11}^2 + F_{22}\sigma_{22}^2 + 2F_{12}\sigma_{11}\sigma_{22} + F_{44}\sigma_{12}^2 - k(W_p)$$

où l'**écrouissage** se fait par le **travail plastique** :

$$k(W_p) = (1 + bW_p^m) \left(1 + cLn \frac{\dot{W}_p}{\dot{W}_0}\right)$$

où une sensibilité à la **vitesse de déformation** peut être introduite si le coefficient (c) est différent de 0.

$$\dot{W}_p = \sigma : \dot{\epsilon}_p \quad W_p = \int \dot{W}_p dt$$

**Remarque :**

La surface de charge de Tsai-Wu est aussi utilisée pour estimer la **rupture** à l'aide de **deux valeurs limites** :

- Le travail plastique maxi :  $W_p^{Max}$
- Le maximum de la surface de charge :  $F_{Max}(\sigma)$

5.3.4.3 Le multiplicateur plastique

La **condition de consistance** s'écrit ici en écriture incrémentale par exemple :

$$df = \frac{\partial f(\sigma, W_p)}{\partial \sigma} d\sigma + \frac{\partial f(\sigma, W_p)}{\partial W_p} dW_p = 0$$

avec le vecteur gradient qui s'écrit dans le cas simplifié :

$$a = \frac{\partial f(\sigma, W_p)}{\partial \sigma} = \begin{Bmatrix} 2F_{11}\sigma_{11} + 2F_{12}\sigma_{22} \\ 2F_{22}\sigma_{22} + 2F_{12}\sigma_{11} \\ 2F_{44}\sigma_{12} \end{Bmatrix} \quad \text{et} \quad A = -\frac{dW_p}{d\lambda} \frac{\partial f(\sigma, W_p)}{\partial W_p}$$

soit encore :  $df = a^T d\sigma - Ad\lambda = 0$

En appliquant la **partition additive** des déformations élastique et plastique, il vient avec la matrice élastique avec ou sans endommagement:

$$a^T C^e (d\varepsilon - d\varepsilon^p) - Ad\lambda = 0$$

$$a^T C^e (d\varepsilon - d\lambda a) - Ad\lambda = 0$$

d'où :

$$d\lambda = \frac{1}{A + a^T C^e a} a^T C^e d\varepsilon$$

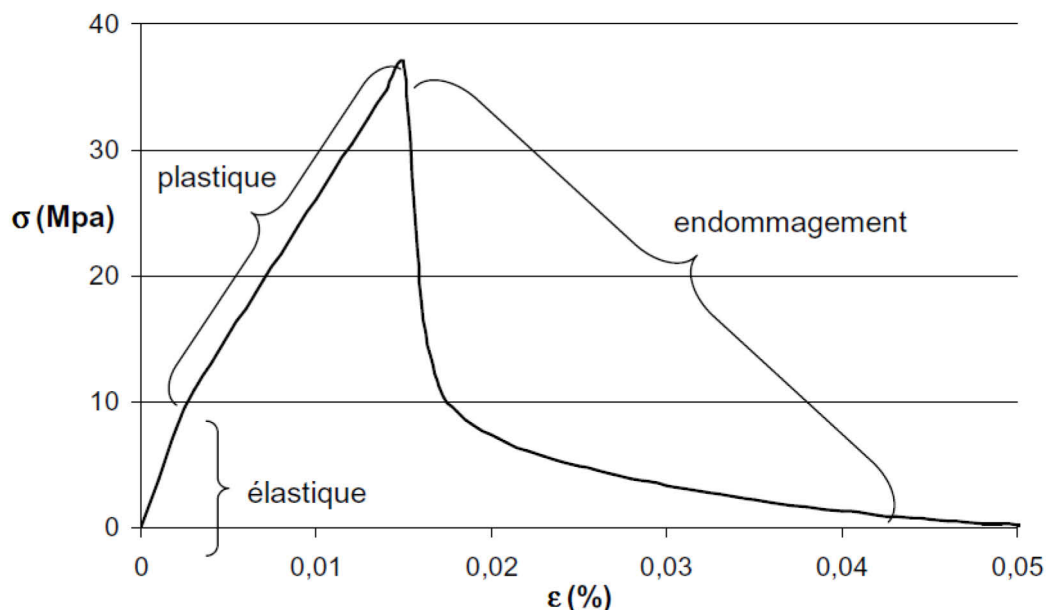
Le coefficient d'écroissage A se détermine avec l'incrément du travail plastique tel que :

$$dW_p = d\varepsilon_p^T \sigma = d\lambda a^T \sigma$$

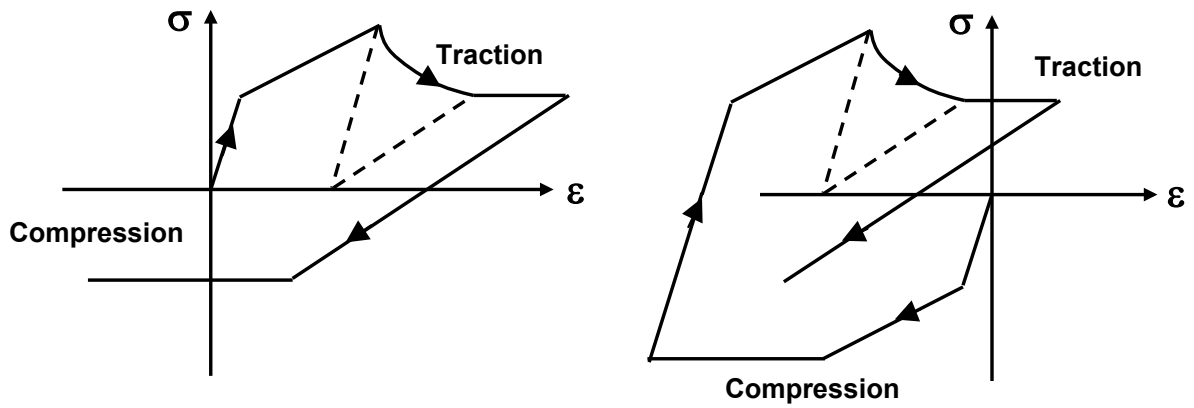
soit :

$$A = -\frac{dW_p}{d\lambda} \frac{\partial f(\sigma, W_p)}{\partial W_p} = a^T \sigma \frac{\partial k(W_p)}{\partial W_p}$$

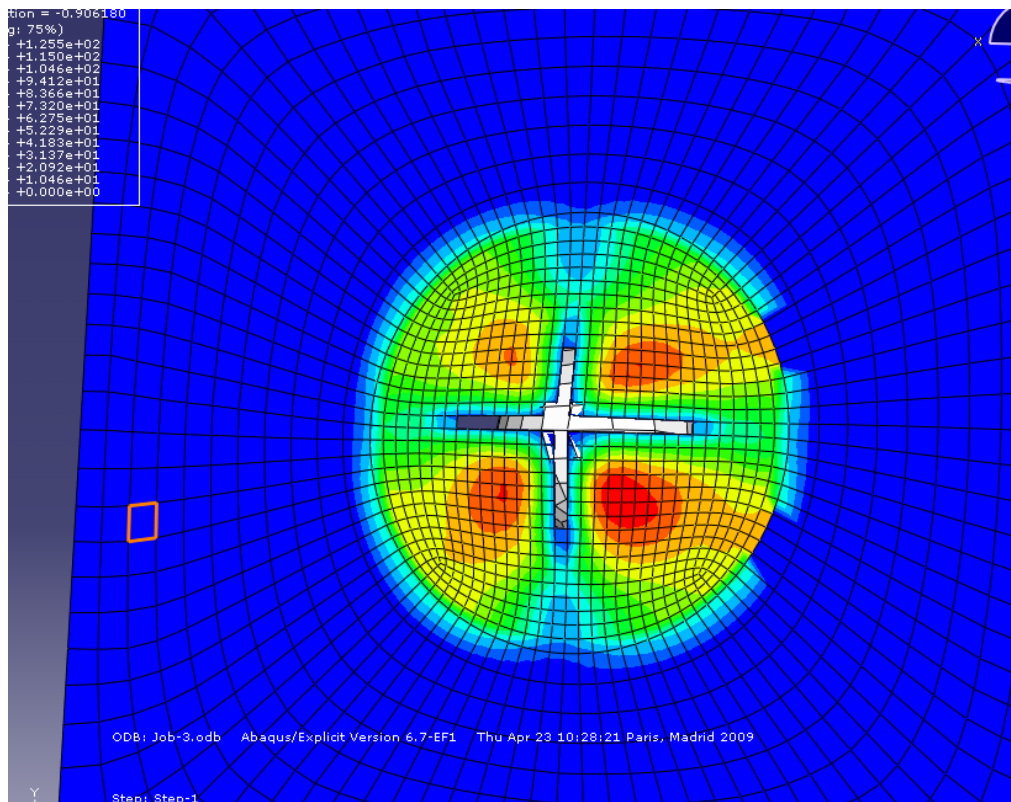
qui fait apparaître la dérivée de la **fonction d'écroissage** k fonction du **travail plastique**.  
d=0



Le modèle peut tenir compte de **contraintes résiduelles** tel que :



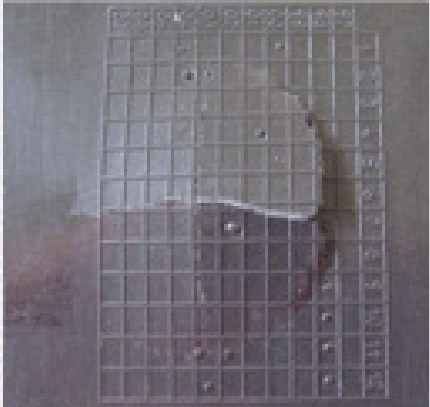
**Exemple : Plaque en polypropylène chargée de fibres impactée par une sphère**



**Rupture**



Face supérieure



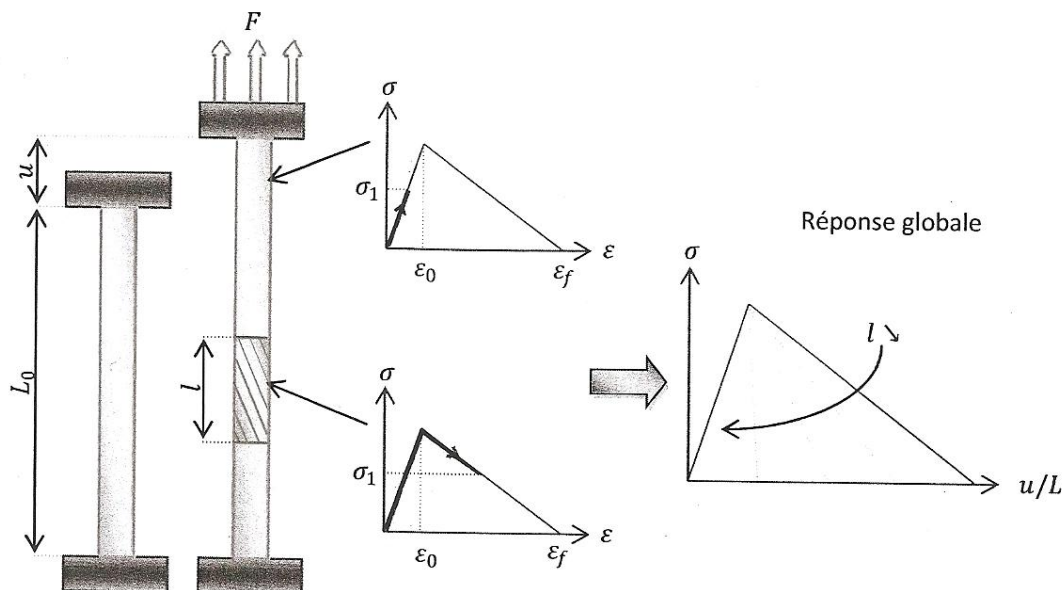
Face inférieure

## 6 FORMULATIONS NON-LOCALES

### 6.1 LE PHENOMENE DE LOCALISATION

#### 6.1.1 La localisation

Nous allons présenter ici de manière **simple** sur un **exemple** le **phénomène de localisation** lorsqu'un **matériau** dans une **structure** présente un **endommagement** ou plus généralement un **adoucissement** de son comportement. Il en découle un important désagrément qui est que du point de vue numérique, la solution obtenue est fortement **dépendante** de la taille et de l'orientation du **maillage**, le raffinement du maillage aggravant même le problème.



Considérons la barre ci-dessus avec un comportement **élastique** qui **s'endommage** au-delà d'un certain seuil  $\varepsilon_0$ , c'est-à-dire qui présente ici un **adoucissement linéaire**. Tant que la déformation reste inférieure à  $\varepsilon_0$ , le comportement est **élastique « sain »** :

$$\sigma = E\varepsilon \quad \text{si} \quad \varepsilon \leq \varepsilon_0 \quad \text{jusqu'à} \quad \sigma_Y = E\varepsilon_0$$

au-delà on a l'adoucissement avec le **module sécant négatif**:  $H = -\frac{\sigma_Y}{\varepsilon_f - \varepsilon_0}$

où la contrainte uniaxiale est donnée par:

$$\sigma = E\varepsilon_0 + H(\varepsilon - \varepsilon_0) \quad \text{si} \quad \varepsilon_0 < \varepsilon \leq \varepsilon_f$$

Imposons le déplacement  $u$  à la barre. La réponse de celle-ci est linéaire tant que le déplacement  $u$  reste inférieur à  $u_0 = L\varepsilon_0$ . Au-delà, la raideur de la barre est dégradée mais pour chaque point matériel, il y a alors **deux possibilités** pour cette **baisse** de contrainte au même niveau:

- Soit un **déchargement** élastique « sain »
- Soit un **adoucissement** linéaire

Introduisons  $\ell$  une **longueur arbitraire** de la zone de la barre qui s'adoucit. Par conséquent la longueur de la zone qui se décharge élastiquement vaut  $L - \ell$  avec  $L = L_0 + u$ . La déformation dans ces deux zones est respectivement :

$$\begin{cases} \varepsilon_e = \frac{\sigma}{E} \\ \varepsilon_D = \varepsilon_0 + \frac{\sigma - E\varepsilon_0}{H} \end{cases}$$

Le **déplacement**  $u$  de la barre est obtenu par intégration sur les deux zones :

$$u = \int_0^L \varepsilon dx = \int_0^{L-\ell} \varepsilon_e dx + \int_0^{\ell} \varepsilon_D dx = (L - \ell) \frac{\sigma}{E} + \ell \left( \varepsilon_0 + \frac{\sigma - E\varepsilon_0}{H} \right)$$

et la **contrainte** dans la barre :

$$\sigma = \frac{u - \ell \left( \varepsilon_0 - \frac{E\varepsilon_0}{H} \right)}{\left[ \frac{L - \ell}{E} + \frac{\ell}{H} \right]}$$

La **réponse** de la barre est donc **fonction** de la **longueur**  $\ell$  qui est arbitraire donc **indéterminée** entre 0 et  $L$ . Le problème mécanique a une infinité de solutions. En mathématique on dit qu'il y a perte d'ellipticité (en statique) ou d'hyperbolicité (en dynamique) des équations différentielles qui gouvernent le problème.

D'un point de vue numérique que risque t-il de se passer ? Supposons la barre discrétisée en  $N$  éléments linéaires à 2 nœuds et donc à déformation constante par élément. A cause des erreurs d'arrondis, un élément va atteindre le seuil avant les autres (dans les cas plus complexes la seule inhomogénéité des déformations suffit). Ses éléments **voisins** risquent de se **décharger** et lui de **concentrer** l'endommagement : il y a **localisation numérique** et  $\ell = L/N$ . La **réponse** de la barre **dépend** de la **taille** de maille. Dans les cas plus complexes 2D. et 3D., les déformations et donc l'endommagement se concentrent dans des bandes de largeur d'un élément fini. De plus on peut montrer que si la taille de maille tend vers 0, la rupture de la barre a lieu à énergie dissipée nulle ce qui n'est pas physique.

## 6.1.2 Les méthodes de régularisation

Il apparaît donc un problème de perte d'unicité de la solution à partir du moment où le matériau a un comportement adoucissant. Tous les modèles matériaux prenant en compte un **couplage** entre l'**endommagement** et les **lois de comportement** sont donc sujets au phénomène de localisation des déformations et de l'endommagement. Ce ne sont pas les seuls cas possibles, par exemple en plasticité sans endommagement pour un état de **contrainte plane** et de **grandes déformations** on observe une localisation.

Pour résoudre plus ou moins ce problème de sensibilité des résultats vis-à-vis de la taille de maille, de nombreuses méthodes appelées **méthodes de régularisation** ont été proposées durant ces 30 dernières années. Nous donnons simplement une **liste non limitative** des plus utilisées avec quelques indications, la **suite du chapitre** développant plus particulièrement les **méthodes non-locales** ayant un fondement au départ plus basé sur la microstructure.

### 6.1.2.1 Les modèles à effet retard

Ces méthodes de **régularisation** sont basées sur le fait que le **taux d'endommagement** dans les modèles d'endommagement classiques peut **croître indéfiniment**. L'idée de départ est d'introduire une **limitation** au taux d'endommagement dans les lois d'évolution. Dans un modèle développé ici au LaMCoS il est par exemple proposé pour la variable taux d'endommagement la limitation :

$$\dot{D} = \frac{1}{\tau_c} \left[ 1 - \exp(-a \langle f(Y) - D \rangle) \right] \quad \text{si } D < 1 \quad \text{autrement } D = 1$$

où  $\tau_c$  est un temps caractéristique et  $a$  un second paramètre.  $f(Y)$  est la fonction du taux de restitution d'énergie (revoir chapitre 5 où ici ( $\sigma > 0$ )) on a les relations :

$$\sigma = (1 - D)E\varepsilon \quad E_D = \frac{1}{2} \left[ \frac{\sigma^2}{E(1 - D)} \right] \text{ qui est la densité d'énergie de déformation}$$

Le taux de restitution d'énergie: 
$$Y = -\frac{\partial E_D}{\partial D} = \frac{\sigma^2}{2E(1 - D)^2} = \frac{E\varepsilon^2}{2}$$

avec :

$$f(Y) = \frac{\sqrt{Y} - \sqrt{Y_0}}{\sqrt{Y_c} - \sqrt{Y_0}} \quad \text{et} \quad D = \sup_{\tau \leq t} [f(Y_\tau)] \text{ si } D < 1 \text{ sans effet retard}$$

On voit que le **taux** d'endommagement est calculé avec la différence entre la fonction dommage sans délais  $f(Y)$  et l'endommagement  $D$  avec l'effet retard. Ainsi, une variation rapide du taux de restitution d'énergie ne conduit pas à une variation immédiate de  $D$ . Après **calage** des **paramètres**  $\tau_c$  et  $a$  par rapport à des tests expérimentaux, cette méthode de régularisation est particulièrement **efficace** notamment en **dynamique de la rupture**.

### 6.1.2.2 La régularisation viscoplastique

Cette méthode est d'essence **mathématique** d'après les travaux de Duvaut et Lions sur les inéquations en Mécanique et en Physique. Nous allons en donner le **principe** sur un exemple de **comportement élasto-plastique** donc **indépendant** du **temps** mais pouvant présenter un adoucissement dont peu importe l'origine.

Soit à un moment donné  $\tilde{\sigma}$  le tenseur des contraintes vraies et  $\tilde{\alpha}$  la variable interne (la déformation plastique équivalente par exemple) **solutions** du problème **élasto-plastique** indépendant du temps. Avec les hypothèses classiques de décomposition additive des déformations (revoir plasticité chapitre 5) on a :

$$\dot{\varepsilon} = \dot{\varepsilon}_{el} + \dot{\varepsilon}_{in} \quad \dot{\sigma} = C_{el} \dot{\varepsilon}_{el} \quad \dot{\varepsilon}_{in} = \dot{\varepsilon}_p = \dot{\lambda} \frac{\partial F}{\partial \sigma}$$



On introduit via un **temps de relaxation**  $\eta > 0$  un comportement **viscoplastique** tel que par **différence**:

$$\dot{\varepsilon}_{in} = \dot{\varepsilon}_{vp} = \frac{1}{\eta} C_{el}^{-1} (\sigma - \tilde{\sigma})$$

$$\dot{\alpha} = -\frac{1}{\eta} (\alpha - \tilde{\alpha})$$

de même :

Par substitution dans les relations précédentes, on obtient l'équation différentielle :

$$\dot{\sigma} + \frac{1}{\eta} \sigma = C_{el} \dot{\varepsilon} + \frac{1}{\eta} \tilde{\sigma}$$

En posant :  $\sigma_n = \sigma(t_n)$   $\delta = \frac{\Delta t}{\eta}$  et  $\beta = \exp(-\delta)$   $\Delta \varepsilon = \dot{\varepsilon} \Delta t$

la solution est :

$$\sigma_{n+1} = \beta \sigma_n + (1 - \beta) \tilde{\sigma}_{n+1} + \frac{1 - \beta}{\delta} C_{el} \Delta \varepsilon$$

de même :

$$\alpha_{n+1} = \beta \alpha_n + (1 - \beta) \tilde{\alpha}_{n+1}$$

On peut faire apparaître le **module tangent** élasto-viscoplastique :

$$D_T^{vp} = \frac{\Delta \sigma}{\Delta \varepsilon} = \frac{1 - \beta}{\delta} C_{el} + (1 - \beta) \frac{\tilde{\sigma}_{n+1}}{\Delta \varepsilon}$$

La solution viscoplastique dépendante du temps est **contrôlée** par le paramètre de relaxation  $\eta$  et lorsque la **vitesse** de déformation viscoplastique **tend vers 0**, la solution élasto-viscoplastique **conduit** à la solution élasto-plastique. Pratiquement en début de pas on initialise le module tangent élasto-viscoplastique avec le module tangent élasto-plastique qui peut être le module cohérent vu au chapitre 5 tel que :

$$D_T^{vp} = \left( \frac{1 - \beta}{\delta} \right) C_{el} + (1 - \beta) \tilde{D}_T^p$$

En ce sens,  $\eta > 0$  **retarde** la réponse du schéma élasto-viscoplastique et on peut y voir quelque analogie avec le modèle précédent. Le **choix** de  $\eta$  combiné avec l'**amplitude** des  $\Delta t$  **influence** les solutions numériques obtenues. En partant d'une valeur suffisamment grande qui garantit la positivité des termes diagonaux du module tangent viscoplastique,  $\eta$  doit **décroître** ensuite pour la convergence des solutions plastiques et viscoplastiques. Pour l'efficacité de la méthode, un **pilotage automatique** ou contrôle du paramètre de relaxation  $\eta$  est très souvent nécessaire.

### 6.1.2.3 Les modèles micropolaires ou à degrés de libertés supplémentaires

En fait les formulations **non-locales** que l'on va détaillées par la suite peuvent être vues comme une généralisation des milieux à microstructure dits des frères **Cosserat** (1909). La mécanique des milieux continus classiques tel que vue jusqu'à présent ne permet pas d'introduire naturellement une **longueur d'échelle** qui caractérise le matériau par **la taille** de ses grains, fibres, cellules, ... Nous ne développerons pas ces théories mais on peut simplement dire que la description du mouvement de chaque point de matière est enrichi par l'ajout d'un **vecteur de rotation** en plus du **vecteur du déplacement** classique. L'interaction entre deux éléments de **volume** à travers un élément de surface  $dS$  n'est plus dû uniquement au moyen d'**efforts** de traction et de cisaillement (revoir 1<sup>er</sup> chapitre) mais aussi d'un **vecteur moment**. On peut résumer la théorie (simplifiée) avec les tenseurs *non-*

symétriques **force-contrainte**  $\sigma_{ij}$  (MPa) et **couple-contrainte**  $\mu_{ij}$  (MPa.m) tel que :

$$t_i = \sigma_{ij} n_j \quad m_i = \mu_{ij} n_j \quad \text{qui doivent satisfaire aux équations du mouvement :}$$

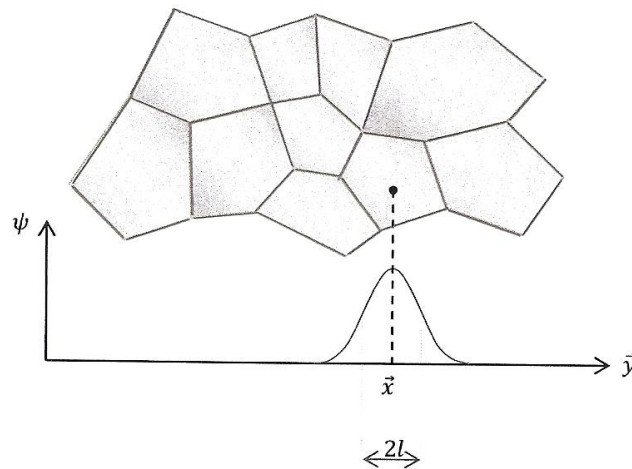
$$\sigma_{ij,j} + f_i = \rho \ddot{u}_i \quad \text{et} \quad \mu_{ij,j} - \varepsilon_{ikl} \sigma_{kl} + c_i = -\frac{1}{2} I \varepsilon_{ijk} \ddot{u}_{j,k} \quad \text{où } I \text{ est l'inertie de}$$

**micro-rotation** isotrope du **micro-milieu** que constitue maintenant la particule.

## 6.2 METHODES NON-LOCALES

### 6.2.1 Formulation intégrale

Les modèles **non-locaux** considèrent que l'état de déformation et de contrainte en un point  $\vec{x}$  ne dépend plus uniquement de l'état en ce point mais aussi de **l'état de l'ensemble** des **autres** points matériels du solide déformable. L'**influence** d'un point  $\vec{y}$  sur le point  $\vec{x}$  est supposé se faire au travers d'une **fonction**  $\psi(\vec{x}, \vec{y})$  qui définit la force de **l'interaction**. Au delà d'un certain rayon d'interaction, appelé **longueur caractéristique** ou **longueur interne**  $\ell$ , l'interaction devient négligeable. Pour connaître l'état en un point matériel, il faut effectuer la **moyenne pondérée** d'une ou plusieurs variables internes.



Si  $f(\vec{x})$  est un champ **local** en  $\vec{x}$ , le champ **non-local**  $\bar{f}(\vec{x})$  correspondant est donné par la forme **intégrale** :

$$\bar{f}(\vec{x}) = \frac{1}{\Psi(\vec{x})} \int_{\Omega} \psi(\vec{x}, \vec{y}) f(\vec{y}) d\Omega \quad \text{avec} \quad \Psi(\vec{x}) = \int_{\Omega} \psi(\vec{x}, \vec{y}) d\Omega$$

$\psi(\vec{x}, \vec{y})$  est une **fonction poids** qui définit l'influence du point situé à la position  $\vec{y}$  sur la valeur du champ calculé en  $\vec{x}$ . Cette fonction poids diminue avec l'augmentation de la distance entre  $\vec{x}$  et  $\vec{y}$  et doit vérifier la condition :

$$\int_{\Omega} \psi(\vec{x}, \vec{y}) d\Omega = 1$$

Cette condition permet de vérifier le fait que si le **champ local** est **uniforme** dans tout le solide alors le **champ non-local** sera lui aussi **uniforme**. Dans la littérature, cette fonction poids est souvent définie comme étant une **gaussienne** ou une fonction en **cloche**.

- **Gaussienne** :

$$\psi(\bar{x}, \bar{y}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2} \ell^3} \exp\left(-\frac{\|\bar{x} - \bar{y}\|^2}{2\ell^2}\right)$$

Elle est définie sur un **support infini** et suppose donc que l'ensemble des points  $\bar{y}$  intervient dans le calcul du champ non-local au point  $\bar{x}$ .

- **Fonction cloche** :

$$\psi(\bar{x}, \bar{y}) = \begin{cases} \frac{105}{32\pi\ell^3} \left(1 - \frac{\|\bar{x} - \bar{y}\|^2}{\ell^2}\right)^2 & \rightarrow \text{si } \|\bar{x} - \bar{y}\| \leq \ell \\ 0 & \rightarrow \text{autrement} \end{cases}$$

Cette fonction polynomiale en cloche est définie sur un **support fini** mais est moins utilisée que la gaussienne.

La longueur caractéristique  $\ell$  apparaît explicitement dans les fonctions poids. Une propriété importante du modèle non-local est que si  $\ell \rightarrow 0$  alors la variable non-locale est identique à la variable locale. Le modèle mécanique local apparaît comme une solution particulière du modèle non-local. Il est possible d'utiliser des **fonctions anisotropes** qui privilégient la pondération suivant une ou plusieurs directions de l'espace. Mais on aura autant de longueur caractéristique que de direction d'anisotropie ce qui peut être le cas dans le comportement endommageable de composites.

### 6.2.2 Formulation à gradient explicite

A partir de la formulation intégrale, il est possible d'obtenir une **formulation différentielle** du champ non-local. Un développement en **série de Taylor** de  $f(\bar{y})$  s'écrit :

$$f(\bar{y}) = f(\bar{x}) + \frac{\partial f}{\partial x_i} (y_i - x_i) + \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} (y_i - x_i)(y_j - x_j) + \frac{1}{3!} \frac{\partial^3 f}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k} (y_i - x_i)(y_j - x_j)(y_k - x_k) + \dots$$

En reportant dans **l'expression intégrale** avec la gaussienne et en **évaluant les intégrales**, on obtient :

$$\bar{f}(\bar{x}) = f(\bar{x}) + c(\ell)\nabla^2 f(\bar{x}) + d(\ell)\nabla^4 f(\bar{x}) + \dots$$

où l'opérateur  $\nabla^n$  est le **laplacien** d'ordre  $n$ . Les paramètres  $c(\ell)$  et  $d(\ell)$  ont la dimension d'une aire et sont fonction de la longueur caractéristique. Les termes impairs ont disparus à cause du caractère isotrope de la fonction poids. En limitant la série aux termes du **second ordre**, on obtient la formulation à **gradient explicite** du champ non-local :

$$\bar{f}(\bar{x}) = f(\bar{x}) + c(\ell)\nabla^2 f(\bar{x})$$

Cette formulation est dite **faiblement non-locale** car elle est réalisée sur un support limité explicite mais elle constitue le point de départ de la formulation implicite qui suit.

### 6.2.3 Formulation à gradient implicite

La formulation implicite est obtenue en prenant le laplacien de la formulation explicite précédente :

$$\nabla^2 \bar{f}(\bar{x}) = \nabla^2 f(\bar{x}) + c(\ell) \nabla^4 f(\bar{x}) + \dots$$

et en substituant avec la première, il vient :

$$\bar{f}(\bar{x}) - c(\ell) \nabla^2 \bar{f}(\bar{x}) = f(\bar{x}) + (d(\ell) - c(\ell)^2) \nabla^4 f(\bar{x}) + \dots$$

On peut montrer que dans cette série, tous les termes de droite sauf le premier commencent par  $(d(\ell) - c(\ell)^2)$ , propriété utilisée un peu plus loin. En limitant cette série au **second ordre**, on obtient l'expression du champ non-local en formulation à **gradient implicite** :

$$\boxed{\bar{f}(\bar{x}) - c(\ell) \nabla^2 \bar{f}(\bar{x}) = f(\bar{x})}$$

Cette équation s'apparente à une **équation de diffusion** où  $c(\ell)$  est un **terme de diffusité**. Pour résoudre cette équation, il faut introduire une condition aux limites. Elle est réalisée avec le produit scalaire nul sur le contour :

$$\bar{\nabla} \bar{f} \cdot \bar{n} = 0 \quad \text{sur} \quad \partial\Omega$$

Des auteurs (Peerlings et al. 1996) ont montré que la définition de  $\bar{f}(\bar{x})$  comme **solution** de l'équation de **diffusion** ci-dessus est **équivalente** à la formulation **non-locale intégrale** en prenant une **fonction de Green** comme fonction de pondération, c'est à dire :

$$\bar{f}(\bar{x}) = \int_{\Omega} G(\bar{x}, \bar{y}) f(\bar{y}) d\Omega \quad \text{avec} \quad G(\bar{x}, \bar{y}) = \frac{1}{4\pi \|\bar{x} - \bar{y}\| \ell^2} \exp\left(-\frac{\|\bar{x} - \bar{y}\|}{\ell}\right)$$

La fonction poids de Green est intéressante car elle entraîne que  $(d(\ell) - c(\ell)^2) = 0$  ce qui permet de dire que la formulation implicite néglige aucun terme dans la série de départ implicite. De plus, dans cette configuration, la valeur de la constante  $c(\ell)$  est donnée par :

$$\boxed{c(\ell) = \ell^2}$$

La formulation implicite comme les deux autres formulations respecte la condition d'égalité entre les champs locaux et non-locaux lorsque  $\ell \rightarrow 0$ .

## 6.3 ELASTO-PLASTICITE AVEC ENDOMMAGEMENT NON-LOCAL

### 6.3.1 La variable d'endommagement non-locale

Le **choix** de la variable locale à insérer dans le modèle non-local dépend du **matériau** et de la **structure** à analyser où existe un phénomène adoucissant. Pour un matériau **élasto-plastique** qui s'**endommage** dans une **structure**, on peut choisir entre autres:

- Les **déplacements**
- Le taux de **restitution d'énergie**  $Y$
- La **déformation plastique équivalente**  $\varepsilon^{eq}$
- La **variable d'endommagement**  $D$  ou la **porosité**  $f$

Les deux dernières variables sont les plus couramment utilisées dans la littérature, soit seule soit même les deux. Les résultats obtenus dépendent du problème traité et sont souvent équivalents. Dans ce polycop agrémenté d'un exemple, on va prendre la **variable d'endommagement**  $D$  du **modèle thermodynamique** exposé au § 5.3.2. L'endommagement est maintenant réalisé au travers de la variable d'endommagement non-locale notée  $\bar{D}$ .

Soit donc  $\bar{D}$  la **forme non-locale** elle aussi comprise entre 0 et 1 :  $0 \leq \bar{D} \leq 1$

- Le tenseur des contraintes effectives s'écrit :  $\tilde{\sigma} = \frac{\sigma}{1 - \bar{D}}$

- Pour l'élasticité isotrope, la loi de Hooke devient :  $\sigma = (1 - \bar{D})(2\mu\varepsilon^e + \lambda \text{tr}(\varepsilon^e)\mathbf{I})$

- Pour la plasticité isotrope de Von-Mises :  $f(\sigma, R, D) = \frac{\sigma_{eq}}{1 - \bar{D}} - \sigma_0(r, \dot{r}) \leq 0$

- Pour les **lois d'évolution** des **variables internes** on a donc:

Le tenseur des déformations plastiques :  $\dot{\varepsilon}^p = \dot{\lambda} \frac{\partial F}{\partial \sigma} = \frac{\dot{\lambda}}{1 - \bar{D}} \frac{3}{2\sigma_{eq}} s$

La variable d'écrouissage :  $\dot{r} = -\dot{\lambda} \frac{\partial F}{\partial R} = \dot{\lambda} = (1 - \bar{D})\dot{\varepsilon}_{eq}$

Le taux d'endommagement local suivant les cas de triaxialité :

$$\begin{aligned} \dot{D} &= \frac{\dot{\lambda}}{1 - \bar{D}} \left( \frac{Y}{S_0} \right)^b & \text{si} & \quad -\frac{p}{\sigma_{eq}} > 0 \\ \dot{D} &= \frac{\dot{\lambda}}{1 - h\bar{D}} \left( \frac{Y}{S_0} \right)^b & \text{si} & \quad -\frac{1}{3} < -\frac{p}{\sigma_{eq}} \leq 0 \\ \dot{D} &= 0 & \text{si} & \quad -\frac{p}{\sigma_{eq}} \leq -\frac{1}{3} \end{aligned}$$

Le calcul de la variable non-locale est effectué soit avec la **méthode intégrale** :

$$\bar{D}(\vec{x}) = \frac{1}{\int_{\Omega} \psi(\vec{x}, \vec{y}) d\Omega} \int_{\Omega} \psi(\vec{x}, \vec{y}) D(\vec{y}) d\Omega$$

soit avec la **méthode implicite** :

$\begin{aligned} \bar{D}(\vec{x}) - \ell^2 \nabla^2 \bar{D}(\vec{x}) &= D(\vec{x}) & \text{sur} & \quad \Omega \\ \bar{\nabla} \bar{D}(\vec{x}) \cdot \vec{n} &= 0 & \text{sur} & \quad \partial\Omega \end{aligned}$
-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

Dans la suite nous présenterons la méthode implicite plus précise et moins gourmande en temps de calcul que la méthode intégrale. En définitive, le multiplicateur plastique est donné en 3D. et en déviateurs par :

$$\dot{\varepsilon}_{eq} = \frac{\dot{\lambda}}{1 - \bar{D}} = \frac{\langle s : \dot{\varepsilon} \rangle}{\sigma_{eq} \left( 1 + \frac{1 - \bar{D}}{3\mu} \frac{\partial \sigma_0}{\partial r} \right)}$$

### 6.3.2 Implémentation de la méthode implicite

Dans ce paragraphe nous allons donner les **principaux ingrédients** pour l'implémentation de la variable non-locale d'endommagement dans un code de calcul par **éléments finis**. Celle-ci va devenir un « **degré de liberté supplémentaire** » aux nœuds. On peut voir avec

le jeu de relations ci-dessus et les chapitres 2 et 5 que la résolution du problème **non-local** est **couplé** à la résolution du problème **mécanique** de l'équilibre. Soit en **schématisant** sur la matrice de raideur du module tangent :

$$\begin{bmatrix} K_{uu} & K_{uD} \\ K_{Du} & K_{DD} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta u \\ \bar{D} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} R_u \\ R_D \end{Bmatrix}$$

La matrice tangente du système global ci-dessus est **non-symétrique** ce qui engendre une forte augmentation des temps de résolution. Il est possible de **découpler** le système et **résoudre** en **séquence** ( $K_{uD} = K_{Du} = 0$ , on parle de **couplage faible**) tout en conservant de bons résultats avec des temps de calculs raisonnables et des pas de temps pas trop grands.

Dans ce qui suit on ne s'intéresse qu'à la **discrétisation** de l'**équation de diffusion**, pour la partie mécanique revoir le cours d'éléments-finis. Pour parler comme les mathématiciens, la **formulation forte** initiale est donc :

$$\begin{aligned} \bar{D} - \ell^2 \nabla^2 \bar{D} &= D && \text{sur } \Omega \\ \vec{\nabla} \bar{D} \cdot \vec{n} &= 0 && \text{sur } \partial\Omega \end{aligned}$$

La **formulation faible** du problème non-local s'obtient après **multiplication** de la première équation par la fonction poids  $\bar{D}^*$  et **intégration** sur le domaine  $\Omega$  (les  $\bar{D}^*$  sont le pendant des vitesses virtuelles  $V_i^*$  ou des déplacements virtuels pour la mécanique, chapitres 1 et 2):

$$\int_{\Omega} \bar{D}^* (\bar{D} - \ell^2 \nabla^2 \bar{D}) d\Omega = \int_{\Omega} \bar{D}^* D d\Omega$$

En développant le laplacien en divergence et gradient qui s'écrit ici :

$$\bar{D}^* \ell^2 \nabla^2 \bar{D} = \vec{\nabla} \cdot (\bar{D}^* \ell^2 \vec{\nabla} \bar{D}) - \vec{\nabla} \bar{D}^* \cdot \ell^2 \vec{\nabla} \bar{D}$$

et en reportant dans l'intégrale :  $\int_{\Omega} [\bar{D}^* \bar{D} + \vec{\nabla} \bar{D}^* \cdot \ell^2 \vec{\nabla} \bar{D} - \vec{\nabla} \cdot (\bar{D}^* \ell^2 \vec{\nabla} \bar{D})] d\Omega = \int_{\Omega} \bar{D}^* D d\Omega$

puis en appliquant le théorème de la divergence sur le terme :

$$\ell^2 \int_{\Omega} \vec{\nabla} \cdot (\bar{D}^* \vec{\nabla} \bar{D}) d\Omega = \ell^2 \int_{\Omega} \bar{D}^* \vec{\nabla} \bar{D} \cdot \vec{n} d\Gamma$$

et à cause de la condition  $\vec{\nabla} \bar{D} \cdot \vec{n} = 0$  sur le contour, il reste :

$$\int_{\Omega} [\bar{D}^* \bar{D} + \vec{\nabla} \bar{D}^* \cdot \ell^2 \vec{\nabla} \bar{D}] d\Omega = \int_{\Omega} \bar{D}^* D d\Omega \quad \forall \bar{D}^*$$

La **discrétisation spatiale** par la méthode des éléments finis se fait selon la méthode de Galerkin. Dans les espaces discrets d'interpolation, le champ non-local d'endommagement s'écrit en un point de l'espace  $\vec{x}$  comme :

$$\bar{D}_h(\vec{x}) = \sum_{k=1}^n N_k(\vec{x}) \bar{D}_k$$

L'**indice** h désigne la variable discrète sur l'élément  $\Omega_h$  et par là indirectement la **taille** de **maille**. Classiquement la  $N_k(\vec{x})$  est la fonction d'**interpolation** associée au nœud k, n nombre de nœuds de l'élément. Le problème discrétisé s'écrit alors :

$$\int_{\Omega_h} [\bar{D}_h^* \bar{D}_h + \vec{\nabla} \bar{D}_h^* \cdot \ell^2 \vec{\nabla} \bar{D}_h] d\Omega_h = \int_{\Omega_h} \bar{D}_h^* D d\Omega_h \quad \forall \bar{D}_h^*$$

et il se ramène à un système linéaire d'inconnues aux nœuds  $\bar{D}_i^h$  évalué sur chaque élément  $\Omega_h$  de la discrétisation :  $[K_{ij}^h] \bar{D}_j^h = \{f_i^h\}$

où la **matrice de « raideur » élémentaire** est calculée avec :

$$K_{ij}^h = \int_{\Omega_h} \left( N_i N_j + \ell^2 \frac{\partial N_i}{\partial x_k} \frac{\partial N_j}{\partial x_k} \right) d\Omega_h$$

et les « forces » nodales équivalentes à la variable locale d'endommagement  $D$  avec :

$$\{f_i^h\} = \int_{\Omega_h} N_i N_j D_j d\Omega_h$$

Après calcul et **assemblage** des matrices élémentaire (voir cours éléments-finis), le système linéaire global est résolu et le champ non-local est déterminé aux nœuds puis **interpolé** aux **points d'intégration** des éléments pour le **couplage** avec les variables du comportement du paragraphe précédent. C'est un **couplage faible** dans la mesure où la convergence de l'équilibre mécanique est obtenu séparément du calcul non-local mais pour chaque pas de temps ou incrément du chargement. Autrement, un **couplage fort** implique la résolution non-locale dans chaque itération sur l'équilibre, trop coûteux.

★ **Remarque :**

De nombreux auteurs (DeBorst, Peerlings,...) ont comparé des solutions analytiques avec les solutions numériques sur des problèmes simples 1D afin d'analyser le rapport entre la **taille de maille**  $h$  et la **longueur caractéristique**  $\ell$  sur la précision. Un des problèmes des équations de diffusion en thermique est le phénomène de choc thermique qui se caractérise par des oscillations spatiales du champ de température. Dans le cas stationnaire, afin d'éviter les oscillations et de bien capturer la diffusion, il est montré qu'il faut respecter la condition :

$$h \leq \ell$$

La **difficulté** est que la **longueur caractéristique** est un paramètre **intrinsèque** au **matériau** dont la **caractérisation** et le sens physique est difficile à cerner et encore plus à mesurer. Ainsi pour les matériaux composites, la longueur caractéristique est en étroite relation avec la taille moyenne des fibres dans la matrice, tandis que pour les matériaux granulaires comme les bétons, elle est en relation directe avec la taille des agrégats. C'est beaucoup plus flou pour les matériaux métalliques, cette longueur pouvant être définie comme étant la distance moyenne entre deux inclusions ou défauts mais alors impliquant des valeurs très petites.

Devant ces **difficultés**, de nombreux auteurs l'utilisent comme un **paramètre numérique** qui ne sert uniquement qu'à **régulariser** la solution numérique. Le plus souvent, par **analyse inverse** sur des essais de traction d'éprouvettes lisses et entaillées, la longueur caractéristique est **identifiée** au même titre que les autres paramètres matériau. Il faut cependant veiller à ce que la condition ci-dessus avec la taille de maille soit respectée.

### 6.3.3 Exemple numérique

Nous donnons dans ce dernier paragraphe des résultats **purement numériques** de **comparaison** de calculs **locaux** et **non-locaux** sur un **essai de traction** d'une plaque 4x1 mm d'un matériau élasto-plastique endommageable avec les données suivantes :

Module d'élasticité :	$E=70000\text{MPa}$
Coefficient de Poisson :	$\nu = 0.33$
Loi d'écrouissage :	$\sigma_0(r) = 596(0.0001 + r)^{0.31}$
Paramètre d'endommagement (exposant) :	$b=1$
Paramètre d'endommagement (dénominateur) :	$S_0 = 2,25\text{MPa}$

Déformation seuil :

$$\epsilon_{eq}^D = 0$$

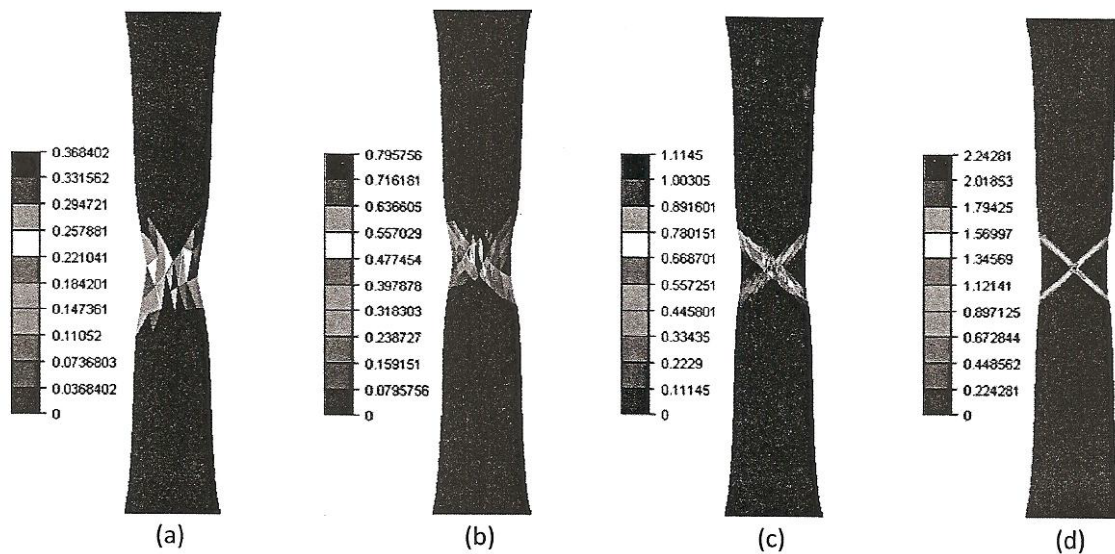
Endommagement critique à rupture :

$$D_c = 1$$

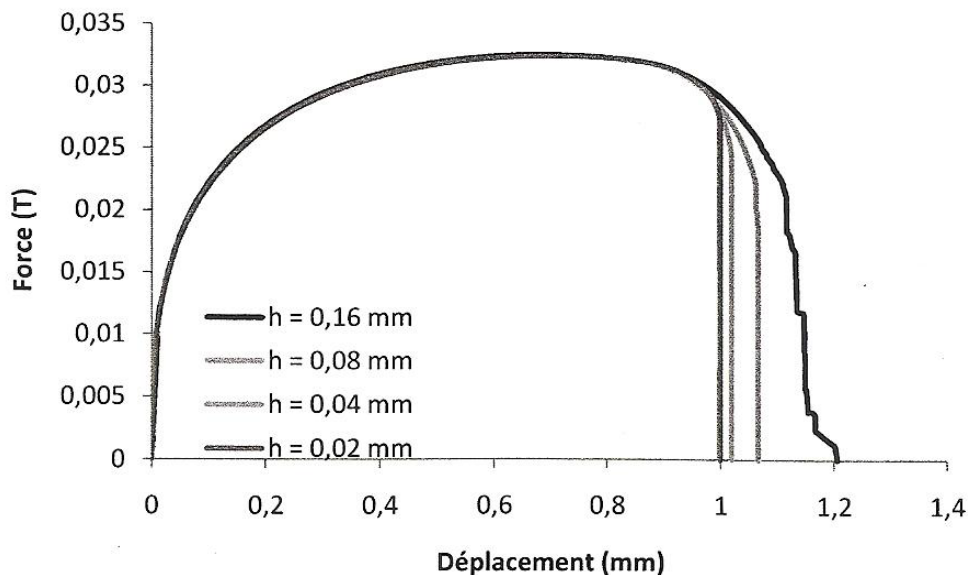
**Taille de maille** (brique 3D. épaisseur 0.1mm): h=0.16, h=0.08, h=0.04, h=0.02 en mm

### 6.3.3.1 Modèle local

Ci-dessous les isovaleurs du taux de déformation plastique équivalente juste avant qu'un élément soit entièrement endommagé ( $D=1$ ), c'est pratiquement les mêmes isovaleurs pour le taux d'endommagement. Il est visible que la taille de la zone de localisation dépend de la taille de maille. Plus la **taille** de maille est **petite**, plus la localisation est **fine**. Les éléments entièrement endommagés vont se concentrer dans une **bande** de la largeur d'un élément.



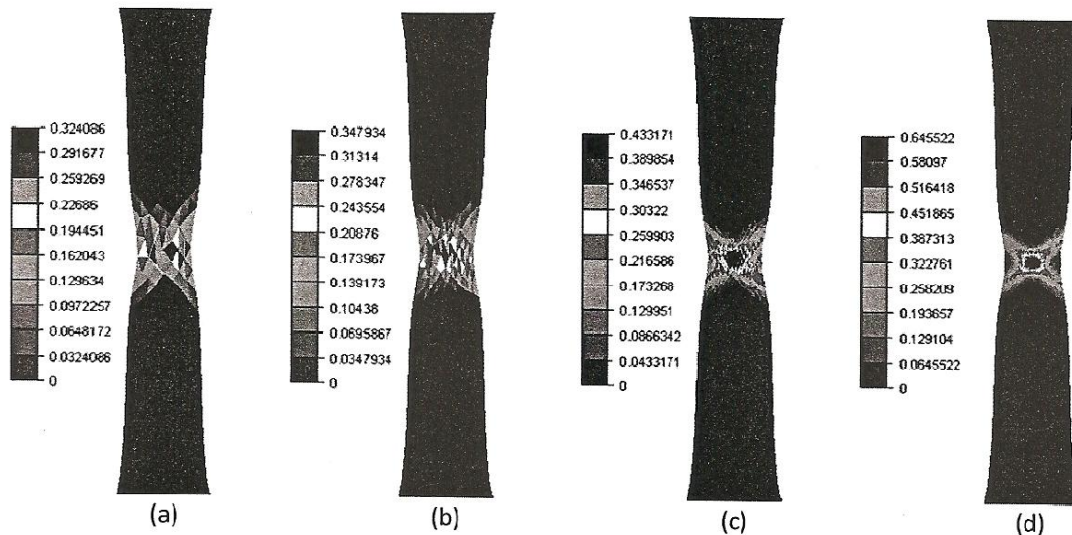
Cette **dépendance** au maillage se répercute directement sur la **réponse** de la structure comme le montre ci-dessous les courbes **force-déplacement**. A partir du point où l'adoucissement s'accélère les courbes diffèrent, dans l'ordre de gauche à droite pour h=0.02 à 0.16mm. Plus le maillage est **fin**, plus la localisation et la rupture sont **rapides**.



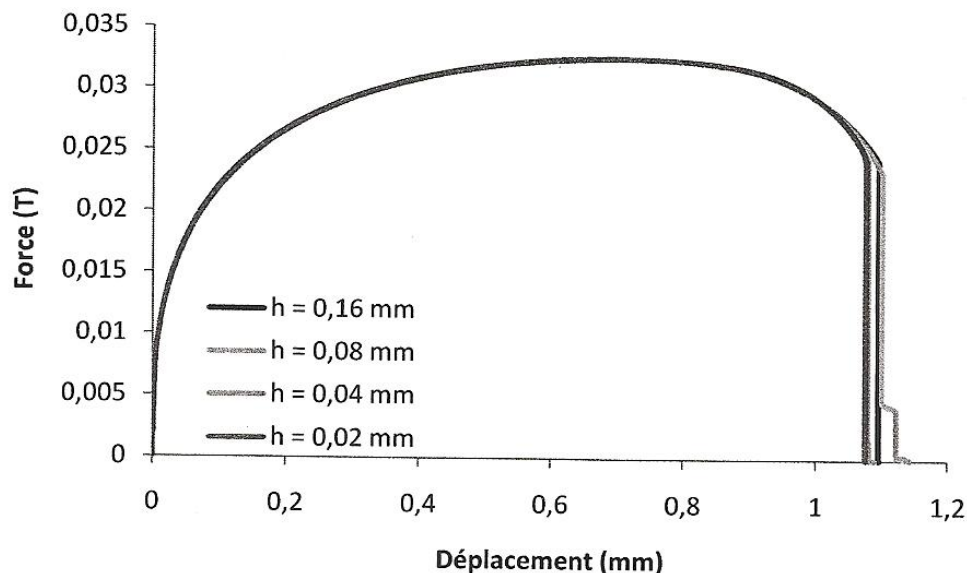


### 6.3.3.2 Modèle non-local

Ci-dessous est le même cas de figure que le cas local précédent mais avec un calcul non-local utilisant une **longueur caractéristique**  $\ell = 0.2$  mm respectant la condition  $h \leq \ell$  pour les 4 tailles de maille. On peut distinguer que la concentration de la localisation dans une bande d'éléments n'a plus lieu. La largeur de la zone endommagée avec un fort taux de déformation plastique équivalente est beaucoup moins sensible à la taille des éléments.

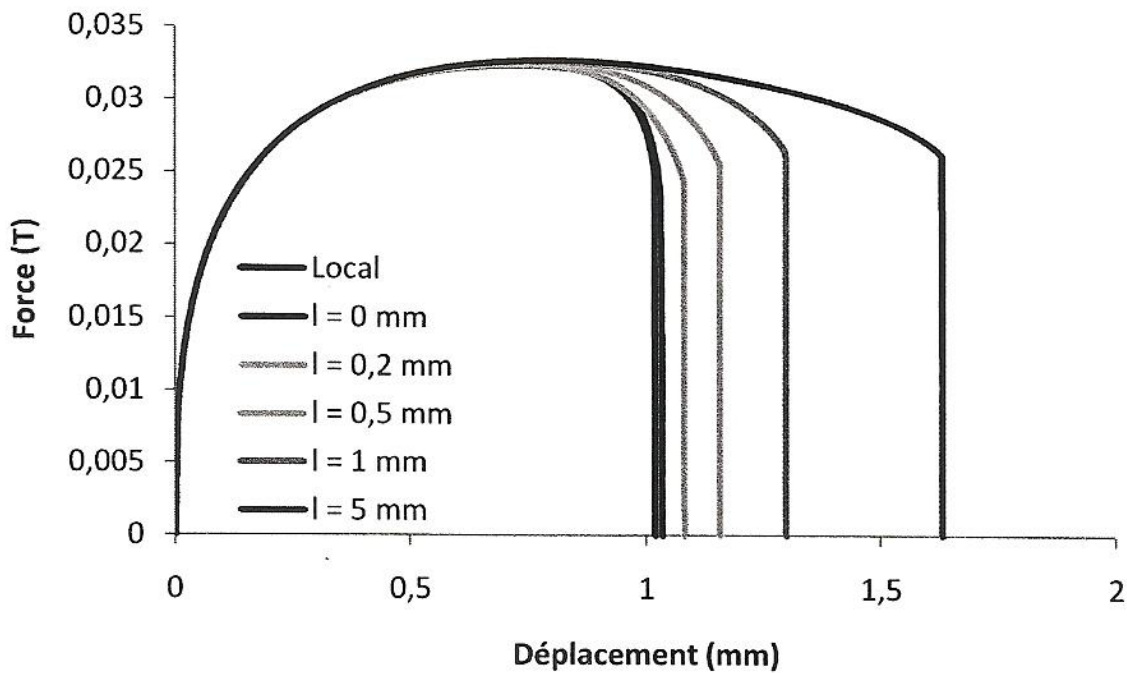


Ci-dessous est la réponse de la structure sur la courbe force-déplacement, la sensibilité à la taille de maille est nettement réduite mais encore un peu présente au moment de la rupture.



### 6.3.3.3 Influence de la longueur caractéristique

Toujours pour le même cas de figure on fait **varier** cette fois la **longueur caractéristique** de 0, 0.2, 0.5, 1.0 et 5 mm avec une **taille de maille fixe** de  $h=0.04$  mm. On peut voir sur la courbe ci après force-déplacement que le calcul **local** et le calcul **non-local** à longueur caractéristique **égale à 0** coïncident pratiquement, ce sont les deux premières courbes à gauche des graphes.



Plus la longueur caractéristique est grande, plus la dissipation de l'endommagement est importante et plus la zone endommagée est étendue. L'**influence** de la longueur caractéristique est **très significative** et ça rejoint les difficultés mentionnées au paragraphe précédent.

✶ **Remarques:**

De nombreuses recherches se font pour **identifier** cette longueur caractéristique par des analyses inverses multicritères associant des mesures directes des champs de déformation par corrélation d'images. De plus des **difficultés** surviennent avec les modèles non-locaux en **propagation** de **fissure** car la zone entièrement endommagée peut avoir une largeur de plusieurs éléments ce qui pose le problème du positionnement de la fissure. La modélisation correcte de la fissuration dans les modèles non-locaux est un sujet de recherche très ouvert.

---

## Références thématiques en 10 livres et INTERNET

### Chapitres 1, 2 :

Petite déformations : [3, 9]

Grandes déformations : [2, 4]

### Chapitres 3,4 :

Lois de comportement en petites déformations : [7]

Hyperélasticité : [6]

Lois de comportement en grandes déformations : [5]

### Chapitre 5 :

Plasticité : [7, 10]

Endommagement : [8]

### Chapitre 6 : [1, 3]

- [1] S. Candel. [Mécanique des fluides](#). Dunod, 2001.
- [2] J. Coirier. [Mécanique Des Milieux Continus - Cours Et Exercices Corrigés](#). Dunod, 2001.
- [3] G. Duvaut. [Mécanique Des Milieux Continus](#). Dunod, 1998.
- [4] S. Forest. [Mécanique des milieux continus](#). Presses De L'Ecole Des Mines, 2008.
- [5] S. Forest, G. Cailletaud, J. Besson, and J.L. Chaboche. [Mécanique non linéaire des matériaux](#). Hermes, 2001.
- [6] G.A. Holzapfel. [Nonlinear Solid Mechanics: A Continuum Approach for Engineering](#). Wiley, 2001.
- [7] J. Lemaitre and J.L. Chaboche. [Mécanique des matériaux solides](#). Dunod, 1993.
- [8] J. Lemaitre and R. Desmorat. [Engineering Damage Mechanics: Ductile, Creep, Fatigue and Brittle Failures](#). Springer, 2005.
- [9] P. Royis. [Mécanique des milieux continus - Cours, exercices et problèmes](#). P.U.L., 2005.
- [10] N. Valoroso. <http://www.librecours.org/documents/21/2168.pdf>, 2002.

### **Sites INTERNET très utiles et intéressants :**

[http://www.imprimerie.polytechnique.fr/Editions/Files/p\\_T1.pdf](http://www.imprimerie.polytechnique.fr/Editions/Files/p_T1.pdf)

[http://www.imprimerie.polytechnique.fr/Editions/Files/p\\_T2.pdf](http://www.imprimerie.polytechnique.fr/Editions/Files/p_T2.pdf)

[http://www.imprimerie.polytechnique.fr/Editions/Files/p\\_T3.pdf](http://www.imprimerie.polytechnique.fr/Editions/Files/p_T3.pdf)

[http://www.imprimerie.polytechnique.fr/Cours/Files/elasto\\_plasticite\\_part1.pdf](http://www.imprimerie.polytechnique.fr/Cours/Files/elasto_plasticite_part1.pdf)

[http://www.imprimerie.polytechnique.fr/Cours/Files/elasto\\_plasticite\\_part2.pdf](http://www.imprimerie.polytechnique.fr/Cours/Files/elasto_plasticite_part2.pdf)

[http://www.imprimerie.polytechnique.fr/Cours/Files/elasto\\_plasticite\\_part3.pdf](http://www.imprimerie.polytechnique.fr/Cours/Files/elasto_plasticite_part3.pdf)

[http://mms2.ensmp.fr/ressources/ens\\_polycopies.php](http://mms2.ensmp.fr/ressources/ens_polycopies.php)

---

**ANNEXE**

## Exemple du codage en FORTRAN de 2 routines UMAT pour ABAQUS

(à utiliser avec éléments coques « Shell S4R » en petites ou grandes déformations)  
La première correspond à l'algorithme d'intégration donné § 5.1.4.

```

c
c   INTEGRATION IMPLICITE elasto-plastique anisotrope
c
SUBROUTINE UMAT (STRESS, STATEV, DDSDD, SSE, SPD, SCD,
1 RPL, DDSDDT, DRPLDE, DRPLDT,
2 STRAN, DSTRAN, TIME, DTIME, TEMP, DTEMP, PREDEF, DPRED, CMNAME,
3 NDI, NSHR, NTENS, NSTATV, PROPS, NPROPS, COORDS, DROT, PNEWDT,
4 CELENT, DFGRD0, DFGRD1, NOEL, NPT, LAYER, KSPT, KSTEP, KINC)
c
CHARACTER*80 CMNAME
c
DIMENSION STRESS (NTENS), STATEV (NSTATV),
1 DDSDD (NTENS, NTENS),
2 DDSDDT (NTENS), DRPLDE (NTENS), TIME (2),
3 STRAN (NTENS), DSTRAN (NTENS), PREDEF (1), DPRED (1),
4 PROPS (NPROPS), COORDS (3), DROT (3, 3), DFGRD0 (3, 3),
5 DFGRD1 (3, 3)
c
c   CONSTRAINTES PLANES avec NDI=2 et NSHR=1 NTENS=NDI+NSHR=3
c
c   TABLEAUX LOCAUX
c
DIMENSION AVECT (3), DMATT (3, 3), DVECT (3), SINIT (3), D (3, 3),
. DESIG (3), SIGMA (3), SGTOT (3), STRES (3), DSTRES (3),
. STRSG (3), AMATX (6), DMATX (3, 3), HMATX (3, 3), PMATX (3, 3),
* RMATT (3, 3), QMATT (3, 3), QMAT1 (3, 3), SMATT (3, 3), UNITE (3, 3),
* RVECT (3), QVECT (3), SVECT (3)
c
c   MAXIT nombre iteration MAX et TOLEB tolerance de convergence sur
c   q(critere)=sigma(courbe) a la fin de l'increment
c
DATA MAXIT, TOLEB/50, 0.0001/
c
IF (NDI.NE.2) THEN
write (6, *) 'NDI=', NDI, ' NSHR=', NSHR
WRITE (6, *) 'ERROR : SUBROUTINE N''EST VALABLE QUE POUR DES
$          CONSTRAINTES PLANES          '
STOP
ENDIF
IF (NSHR.NE.1) THEN
write (6, *) 'NSHR=', NSHR
write (6, *) 'ERROR: NSHR non egale a 1'
STOP
ENDIF
c
c   Constantes elastiques et anisotropie plastique données dans la routine MODAN
c
CALL MODAN (AMATX, DMATT, NPROPS, PROPS, HMATX, PMATX)
c
c   Recuperation contraintes debut du pas dans STRSG et SINIT
c
DO I=1, NTENS
STRSG (I) = STRESS (I)
SINIT (I) = STRESS (I)
ENDDO
c
c   Initialisation matrice de raideur (DMATT est la matrice elastique)
c
DO 15 I=1, NTENS
DO 15 J=1, NTENS
D (I, J) = DMATT (I, J)
UNITE (I, J) = 0.0
IF (I.EQ.J) UNITE (I, J) = 1.0
RMATT (I, J) = DMATT (I, J)

```

```

DDSDDE (I, J)=0.
15 CONTINUE
C
C   Nombre de composantes (ici NSTRE=NTENS=3)
C
NSTRE=NTENS
C
C   si on veut l'increment de def elastique a travers l'epaisseur (en z)
C
DEPSX=DSTRAN (1)
DEPSY=DSTRAN (2)
DEPSXY=DSTRAN (3)
DEPSZ=-PROPS (2) * (DEPSX+DEPSY) / (1.-PROPS (2))
C
C   Increment de contrainte elastique dans STRES (DSTRAN increment de def total)
C
DO 20 ISTR1=1,NSTRE
STRES (ISTR1)=0.
DO 20 JSTRE=1,NSTRE
20 STRES (ISTR1)=STRES (ISTR1)+DMATT (ISTR1, JSTRE) *DSTRAN (JSTRE)
C
C   Prediction elastique dans SIGMA
C
DO 30 ISTR1=1,NSTRE
DESIG (ISTR1)=STRES (ISTR1)
30 SIGMA (ISTR1)=STRSG (ISTR1)+STRES (ISTR1)
C
C   Valeurs debut de l'increment:
C   Deformation plastique equivalente EPSTN dans STATEV(1)
C   Contrainte equivalente EFFST dans STATEV(2)
C
EPSTN=STATEV (1)
EFFST=STATEV (2)
EPBAR=EPSTN
C
C   Courbe ecrouissage dans routine FLOWPL et critere dans routine INVAR
C   PREYS: contrainte egivalente sur la courbe ecrouissage
C   HARDS: module tangent plastique
C   YIELD: contrainte equivalente du critere avec les SIGMA
C
CALL FLOWPL (PROPS, NPROPS, EPSTN, HARDS, PREYS)
CALL INVAR (AMATX, SIGMA, YIELD)
C
C   Test si le point deja plastique (GO TO 55)
C
ESPRES=EFFST-PREYS
IF (ESPRES.GE.0.0) GOTO 55
C
ESCUR=YIELD-PREYS
C
C   Si < ou = 0 le point est encore elastique: GOTO 60
C
IF (ESCUR.LE.0.0) GOTO 60
C
C   Le point ici est en transition elastique-plastique
C   Pas de calcul d'intersection avec schéma implicite GO TO 70
C
GOTO 70
C
C   Le point ici etait deja plastique
C
55 ESCUR=YIELD-EFFST
C
C   Test si le point est en decharge elastique (GO TO 60)
C
IF (ESCUR.LE.0.0) GOTO 60
C
70 CONTINUE
C
C   Integration elasto-plastique implicite par iterations
C
C   Initialisation multiplicateur plastique DEBAR (= increment dep pla equivalente)
C
DEPST=0.0
DEBAR=0.0
C
C   Initialisation à la prediction élastique

```

```

c      SGTOT va etre l'etat de contrainte à calculer pour satisfaire le critere à la fin
c      de l'increment
c
DO 80 ISTR1=1,NSTRE
SGTOT(ISTR1)=SIGMA(ISTR1)
80 CONTINUE
c
c      Boucle iteration IT
c
DO 90 IT=1,MAXIT
c
c      Calcul critere avec les SGTOT dans INVAR
c
CALL INVAR(AMATX,SGTOT,YIELD)
c
c      Calcul contrainte equivalente PREYS et module tangent plastique HARDS avec
c      la def plastique equivalente reactualisée EPSTN dans FLOWPL
c
CALL FLOWPL(PROPS,NPROPS,EPSTN,HARDS,PREYS)
c
c      FLows: calcul de AVECT vecteur {a} gradient a la surface de charge, DVECT= [D]{a}
c      et ABETA= 1/({a}T[D]{a})
c
CALL FLOWS(ABETA,AVECT,DVECT,YIELD,
           HARDS,SGTOT,AMATX,DMATT)
c
c      Test de convergence: il faut tendre vers F=(YIELD-PREYS)=0 avec dF=0
c
ERR=(ABS(YIELD-PREYS)/ABS(PREYS))*100.
write(*,*)err
IF(ERR.LE.TOLEB)GOTO 95
c
DVALU=1./ABETA
FONCT=YIELD-PREYS
c
c      Estimation à la première IT avec la prediction elastique
c
IF(IT.EQ.1) THEN
c
DDBAR=FONCT/DVALU
DO I=1,NSTRE
SGTOT(I)=SIGMA(I)-DDBAR*DVECT(I)
ENDDO
c
c      IT > 1
c
ELSE
c
DO I=1,NSTRE
DO J=1,NSTRE
SMATT(I,J)=(HMATX(I,J)-AVECT(I)*AVECT(J))/YIELD
ENDDO
ENDDO
c
DO I=1,NSTRE
DO J=1,NSTRE
QMATT(I,J)=UNITE(I,J)
DO K=1,3
QMATT(I,J)=QMATT(I,J)+DEBAR*DMATT(I,K)*SMATT(K,J)
ENDDO
ENDDO
ENDDO
c
CALL MATINV(QMATT,QMAT1,NSTRE)
c
DO I=1,NSTRE
RVECT(I)=SGTOT(I)-SIGMA(I)+DEBAR*DVECT(I)
ENDDO
c
DO I=1,NSTRE
QVECT(I)=0.
DO J=1,NSTRE
QVECT(I)=QVECT(I)+QMATT1(I,J)*RVECT(J)
ENDDO
ENDDO
c
DO I=1,NSTRE

```

```

      SVECT(I)=0.
      DO J=1,NSTRE
        SVECT(I)=SVECT(I)+QMAT1(I,J)*DVECT(J)
      ENDDO
ENDDO
C
      DNUM=FONCT
      DNOM=HARDS
      DO I=1,NSTRE
        DNUM=DNUM-AVECT(I)*QVECT(I)
        DNOM=DNOM+AVECT(I)*SVECT(I)
      ENDDO
C
C      Variation DDBAR du multiplicateur plastique DEBAR
C
      DDBAR=DNUM/DNOM
      IF(DDBAR.LE.0.0)DDBAR=0
C
C      Correction de l'etat de contrainte courant SGTOT
C
      DO I=1,NSTRE
        SGTOT(I)=SGTOT(I)-QVECT(I)-DDBAR*SVECT(I)
      ENDDO
C
      ENDIF
C
C      Reactualisation de DEBAR et de la deformation plastique equivalente
C
      DEBAR=DEBAR+DDBAR
C
      EPSTN=EPSTN+DDBAR
C
C      Fin boucle iteration
C
90 CONTINUE
C
      write(*,*)
      write(*,*)'PAS convergence en',IT,' iterations'
      write(*,*)' YIELD=',YIELD,' PREYS=',PREYS
      write(*,*)' NOEL=',NOEL
C
C      ARRET du calcul dans ce cas
C
      STOP
C
95 CONTINUE
C
C      Calcul increment deformation a travers l'epaisseur si besoin
C      les increments de def plastique pourront etre cumules à l'aide
C      des STATEV pour utilisation possible dans des critères
C      Increment de def plastique dans DPLAX,DPLAY,DPLAXY,DPLAZ
C
      DPLAX=DEBAR*AVECT(1)
      DPLAY=DEBAR*AVECT(2)
      DPLAXY=DEBAR*AVECT(3)
      DPLAZ=- (DPLAX+DPLAY)
C
C      Cumul et sauvegarde des deformations plastiques
C
      STATEV(3)=STATEV(3)+DPLAX
      STATEV(4)=STATEV(4)+DPLAY
      STATEV(5)=STATEV(5)+DPLAXY
      STATEV(6)=STATEV(6)+DPLAZ
C
C      Increment de deformation elastique si besoin
C
      DELAX=DEPSX-DPLAX
      DELAY=DEPSY-DPLAY
      DELAXY=DEPSXY-DPLAXY
      DELAZ=-PROPS(2)*(DELAX+DELAY)/(1.-PROPS(2))
      DEPSZ=DELAZ+DPLAZ
C
      DEPST=DEBAR
C
      DO 130 ISTR1=1,NSTRE
130 STRSG(ISTR1)=SGTOT(ISTR1)
      EFFST=YIELD

```



```

C
C ***** Calcul matrice de raideur tangente coherente *****
C
C
C      DO ISTRE=1,NSTRE
C      STRES (ISTRE)=STRSG (ISTRE)
C      ENDDO
C
C      CALL INVAR (AMATX, STRES, YIELD)
C      CALL FLOWPL (PROPS, NPROPS, EPSTN, HARDS, PREYS)
C
C      AVECT (1) = (HMATX (1, 1) *STRES (1) +HMATX (1, 2) *STRES (2)) /YIELD
C      AVECT (2) = (HMATX (2, 1) *STRES (1) +HMATX (2, 2) *STRES (2)) /YIELD
C      AVECT (3) = (HMATX (3, 3) *STRES (3)) /YIELD
C
C      DO I=1,NSTRE
C        DO J=1,NSTRE
C          SMATT (I, J) = (HMATX (I, J) -AVECT (I) *AVECT (J)) /YIELD
C        ENDDO
C      ENDDO
C
C      DO I=1,NSTRE
C        DO J=1,NSTRE
C          QMATT (I, J) =UNITE (I, J)
C        DO K=1,NSTRE
C          QMATT (I, J) =QMATT (I, J) +DEPST *DMATT (I, K) *SMATT (K, J)
C        ENDDO
C      ENDDO
C      ENDDO
C
C      CALL MATINV (QMATT, QMAT1, NSTRE)
C
C      DO I=1,NSTRE
C        DO J=1,NSTRE
C          RMATT (I, J) =0.0
C        DO K=1,NSTRE
C          RMATT (I, J) =RMATT (I, J) +QMAT1 (I, K) *DMATT (K, J)
C        ENDDO
C      ENDDO
C      ENDDO
C
C      CALL FLOWS (ABETA, AVECT, DVECT, YIELD,
C      .          HARDS, STRES, AMATX, RMATT)
C
C      DO 270 ISTRE=1,NSTRE
C      DO 270 JSTRE=1,NSTRE
270    DMATX (ISTRE, JSTRE) =RMATT (ISTRE, JSTRE) -ABETA *
C      .          DVECT (ISTRE) *DVECT (JSTRE)
C
C      GOTO 190
C
C ***** fin elasto-plastique GO TO 190 *****
C
C      Point elastique
C
C      60 CONTINUE
C
C      DO 180 ISTR1=1,NSTRE
180    STRSG (ISTR1) =STRSG (ISTR1) +DESIG (ISTR1)
C      EFFST=YIELD
C
C      Matrice tangente = matrice elastique
C
C      DO I=1,NSTRE
C        DO J=1,NSTRE
C          DMATX (I, J) =DMATT (I, J)
C        ENDDO
C      ENDDO
C
C ***** fin elastique *****
C
190    CONTINUE
C
C      Reactualisation pour ABAQUS
C
C      DO I=1,NTENS
C        STRESS (I) =STRSG (I)

```

```

DSTRES (I)=STRSG (I) -SINIT (I)
ENDDO
C
C   Sauvegarde variables d'etat: def equivalente et contrainte equivalente
C
STATEV (1)=EPSTN
STATEV (2)=EFFST
C
C   Matrice de raideur DDSDE pour ABAQUS
C
DO 395 K1=1,NTENS
DO 395 K2=1,NTENS
DDSDDE (K2,K1)=DMATX (K1,K2)
395 CONTINUE
C
C   TOTAL CHANGE IN SPECIFIC ENERGY
C
TDE=0.
DO K1=1,NTENS
TDE=TDE+ (STRESS (K1)+0.5*DSTRES (K1)) *DSTRAN (K1)
ENDDO
C
C   CHANGE IN SPECIFIC ELASTIC STRAIN ENERGY
C
DEE=0.
DO K1=1,NDI
TERM1=0.
TERM2=0.
DO K2=1,NDI
TERM1=TERM1+D (K1,K2) *STRAN (K2)
TERM2=TERM2+D (K1,K2) *DSTRAN (K2)
ENDDO

DEE=DEE+ (TERM1+0.5*TERM2) *DSTRAN (K1)
ENDDO
C
GMOD=PROPS (1) / (2* (1+PROPS (2)))
C
I1=NDI
DO K1=1,NSHR
I1=I1+1
DEE=DEE+GMOD* (STRAN (I1)+0.5*DSTRAN (I1)) *DSTRAN (I1)
ENDDO
C
SSE=SSE+DEE
SCD=SCD+TDE-DEE
C
RETURN
END
C
C***** ECROUISSAGE *****
C
SUBROUTINE FLOWPL (PROPS,NPROPS,EPSTN,HARDS,PREYS)
C
DIMENSION PROPS (NPROPS)
C
C   Loi d'écrouissage de swift ou autres à coder
C
B=PROPS (6)
C=PROPS (7)
PN=PROPS (8)
C
PREYS=B* (C+EPSTN) **PN
HARDS=B*PN* (C+EPSTN) ** (PN-1.)
C
RETURN
END
C
C***** ANISOTROPIE *****
C
SUBROUTINE MODAN (AMATX,DMATT,NPROPS,PROPS,HMATX,PMATX)
C
DIMENSION AMATX (6),DMATT (3,3),PROPS (NPROPS),
.          HMATX (3,3),PMATX (3,3)
C
C   COEFFICIENTS ANISOTROPIQUES DE HILL EN CONTRAINTES PLANES
C

```

```

YOUNG=PROPS (1)
POISS=PROPS (2)
C
C   Coefficients de Lankford, si isotrope (Von Mises R0=R45=R90=1 )
C
R0= PROPS (3)
R45= PROPS (4)
R90= PROPS (5)
C
C   Coefficients de Hill (direction 1 à 0 degres de reference)
C
H=R0/(1+R0)
G=1-H
F=R0/R90/(1+R0)
P=(2*R45+1)*(R90+R0)/(2*R90*(1+R0))
C
C   Coefficients de Hill sous forme vecteur
C
DO 5 I=1,6
5  AMATX(I)=0.0
   AMATX(1)=G+H
   AMATX(4)=F+H
   AMATX(6)=2*P
   AMATX(2)=-H
C
C   MATRICE D'ELASTICITE ISOTROPE: DMATT
C
GASH=1.0-PROPS(2)*PROPS(2)
DO 10 I=1,3
DO 10 J=1,3
10  HMATX(I,J)=0.0
    DMATT(I,J)=0.0
C
DMATT(1,1)=PROPS(1)/GASH
DMATT(2,2)=DMATT(1,1)
DMATT(1,2)=PROPS(2)*DMATT(2,2)
DMATT(2,1)=DMATT(1,2)
DMATT(3,3)=PROPS(1)/2/(1+PROPS(2))
C
C   Matrice des coefficients de Hill
C
HMATX(1,1)=AMATX(1)
HMATX(1,2)=AMATX(2)
HMATX(2,1)=AMATX(2)
HMATX(2,2)=AMATX(4)
HMATX(3,3)=AMATX(6)
C
DO 20 I=1,3
DO 20 J=1,3
PMATX(I,J)=0.
DO 20 K=1,3
20  PMATX(I,J)=PMATX(I,J)+DMATT(I,K)*HMATX(K,J)
C
RETURN
END
C
C ***** CRITERE *****
C
SUBROUTINE INVAR(A,ST,YIELD)
C
C   Critere de Hill ou de Von Mises
C
DIMENSION ST(3),A(6)
GASH=A(1)*ST(1)*ST(1)+2.0*A(2)*ST(1)*ST(2)+A(4)*ST(2)*ST(2)+
.  A(6)*ST(3)*ST(3)
C
C   Contrainte equivalente du critere
C
YIELD=SQRT(GASH)
C
RETURN
END
C
C ***** loi d'ecoulement et vecteur gradient {a} = AVECT *****
C
SUBROUTINE FLOWS(ABETA,AVECT,DVECT,YIELD,
.  HARDS,SG,A,DMATT)

```

```

C
  DIMENSION AVECT(3),DMATT(3,3),DVECT(3),
  .          SG(3),A(6)
C
  AVECT(1)=(A(1)*SG(1)+A(2)*SG(2)+A(3)*SG(3))/YIELD
  AVECT(2)=(A(2)*SG(1)+A(4)*SG(2)+A(5)*SG(3))/YIELD
  AVECT(3)=(A(3)*SG(1)+A(5)*SG(2)+A(6)*SG(3))/YIELD
C
  DO 10 I=1,3
  DVECT(I)=0.0
  DO 10 J=1,3
10  DVECT(I)=DVECT(I)+DMATT(I,J)*AVECT(J)
C
  DENOM=HARDS
  DO 20 ISTR=1,3
20  DENOM=DENOM+AVECT(ISTR)*DVECT(ISTR)
C
  ABETA=1.0/DENOM
C
  RETURN
  END
C
C ***** Inversion de AA(N,N) dans AINV(N,N) *****
C
  SUBROUTINE MATINV(AA,AINV,N)
C
  DIMENSION AA(3,3),AINV(3,3),A(3,6),ID(3)
C
  NN=N+1
  N2=2*N
  DO 200 I=1,N
  DO 200 J=1,N
200  A(I,J)=AA(I,J)
C
  K=1
  DO 1 I=1,N
  DO 1 J=NN,N2
  A(I,J)=0.
  1 CONTINUE
  DO 21 I=1,N
  A(I,N+I)=1.
21  ID(I)=I
  2 CONTINUE
  KK=K+1
  IS=K
  IT=K
  B=ABS(A(K,K))
  DO 3 I=K,N
  DO 3 J=K,N
  IF(ABS(A(I,J))-B)3,3,31
31  IS=I
  IT=J
  B=ABS(A(I,J))
  3 CONTINUE
  IF(IS-K)4,4,41
41  DO 42 J=K,N2
  C=A(IS,J)
  A(IS,J)=A(K,J)
42  A(K,J)=C
  4 CONTINUE
  IF(IT-K)5,5,51
51  IC=ID(K)
  ID(K)=ID(IT)
  ID(IT)=IC
  DO 52 I=1,N
  C=A(I,IT)
  A(I,IT)=A(I,K)
52  A(I,K)=C
  5 CONTINUE
  IF(A(K,K))6,120,6
  6 CONTINUE
  DO 7 J=KK,N2
  A(K,J)=A(K,J)/A(K,K)
  DO 7 I=KK,N
  W=A(I,K)*A(K,J)
  A(I,J)=A(I,J)-W
  IF(ABS(A(I,J))-0.000001*ABS(W))71,7,7

```

```

71 A(I,J)=0.
7 CONTINUE
  K=KK
  IF(K-N)2,81,120
81 IF(A(N,N))8,120,8
8 CONTINUE
  DO 9 J=NN,N2
  A(N,J)=A(N,J)/A(N,N)
9 CONTINUE
  N1=N-1
  DO 10 M=1,N1
  I=N-M
  II=I+1
  DO 10 K=II,N
  DO 10 J=NN,N2
  A(I,J)=A(I,J)-A(I,K)*A(K,J)
10 CONTINUE
  DO 11 I=1,N
  DO 11 J=1,N
  IF(ID(J)-I)11,111,11
111 DO 112 K=NN,N2
112 AINV(I,K-N)=A(J,K)
11 CONTINUE
  RETURN
120 WRITE(6,1000)
  STOP
1000 FORMAT(//,10X,'MATRICE QMATT SINGULIERE',//)
  END

```

c

**c Cette dernière ROUTINE en FORTRAN 66 (1966) n'est pas d'aujourd'hui mais elle marche !**

c

## Exemple 2 : UMAT en intégration élasto-plastique explicite avec correction

(Les sousroutines sont les mêmes que dans la Umat implicite)

```

c
c
c      INTEGRATION ELASTO-PLASTIQUE ANISOTROPE EXPLICITE avec CORRECTION
c
c
c      SUBROUTINE UMAT (STRESS, STATEV, DDSDE, SSE, SPD, SCD,
1 RPL, DDSDDT, DRPLDE, DRPLDT,
2 STRAN, DSTRAN, TIME, DTIME, TEMP, DTEMP, PREDEF, DPRED, CMNAME,
3 NDI, NSHR, NTENS, NSTATV, PROPS, NPROPS, COORDS, DROT, PNEWDT,
4 CELENT, DFGRD0, DFGRD1, NOEL, NPT, LAYER, KSPT, KSTEP, KINC)
c
c      CHARACTER*80 CMNAME
c
c      DIMENSION STRESS (NTENS), STATEV (NSTATV),
1 DDSDE (NTENS, NTENS),
2 DDSDDT (NTENS), DRPLDE (NTENS), TIME (2),
3 STRAN (NTENS), DSTRAN (NTENS), PREDEF (1), DPRED (1),
4 PROPS (NPROPS), COORDS (3), DROT (3, 3), DFGRD0 (3, 3),
5 DFGRD1 (3, 3)
c
c      CONSTRAINTES PLANES avec NDI=2 et NSHR=1 NTENS=NDI+NSHR=3
c
c      TABLEAUX LOCAUX
c
c      DIMENSION AVECT (3), DMATT (3, 3), DVECT (3), SINIT (3), D (3, 3),
.      DESIG (3), SIGMA (3), SGTOT (3), STRES (3), DSTRES (3),
.      STRSG (3), AMATX (6), DMATX (3, 3), HMATX (3, 3), PMATX (3, 3),
*      RMATT (3, 3), QMATT (3, 3), QMAT1 (3, 3), SMATT (3, 3), UNITE (3, 3)
c
c      IF (NDI.NE.2) THEN
c          write (6, *) 'NDI=', NDI, ' NSHR=', NSHR
c          WRITE (6, *) 'ERROR : CETTE SUBROUTINE N'EST VALABLE QUE POUR DES
$              CONSTRAINTES PLANES      '
c          STOP
c          ENDIF
c          IF (NSHR.NE.1) THEN
c              write (6, *) 'NSHR=', NSHR
c              write (6, *) 'ERROR: NSHR non egale a 1'
c              STOP
c          ENDIF
c
c      Constantes elastiques et anisotropie plastique dans la routine MODAN
c
c      CALL MODAN (AMATX, DMATT, NPROPS, PROPS, HMATX, PMATX)
c

```

```

c      Contraintes debut du pas dans STRSG et SINIT
c
      DO I=1,NTENS
      STRSG(I)=STRESS(I)
      SINIT(I)=STRESS(I)
      ENDDO
c
c      Initialisation matrice de raideur (DMATT est la matrice elastique)
c
      DO 15 I=1,NTENS
      DO 15 J=1,NTENS
        D(I,J)=DMATT(I,J)
        UNITE(I,J)=0.0
        IF(I.EQ.J) UNITE(I,J)=1.0
        RMATT(I,J)=DMATT(I,J)
        DDSDE(I,J)=0.
15 CONTINUE
c
c      Nombre de composantes (ici NSTRE=NTENS=3)
c
      NSTRE=NTENS
c
c      Si on veut l'increment de def elastique a travers l'epaisseur (en z)
c
      DEPSX=DSTRAN(1)
      DEPSY=DSTRAN(2)
      DEPSXY=DSTRAN(3)
      DEPSZ=-PROPS(2)*(DEPSX+DEPSY)/(1.-PROPS(2))
c
c      Increment de contrainte elastique dans STRES (DSTRAN increment de def total)
c
      DO 20 ISTR=1,NSTRE
      STRES(ISTR)=0.
      DO 20 JSTRE=1,NSTRE
20 STRES(ISTR)=STRES(ISTR)+DMATT(ISTR,JSTRE)*DSTRAN(JSTRE)
c
c      Prediction elastique dans SIGMA
c
      DO 30 ISTR1=1,NSTRE
      DESIG(ISTR1)=STRES(ISTR1)
30 SIGMA(ISTR1)=STRSG(ISTR1)+STRES(ISTR1)
c
c      Valeurs debut de l'increment:
c      Deformation plastique equivalente dans STATEV(1)
c      Contrainte equivalente dans STATEV(2)
c
      EPSTN=STATEV(1)
      EFFST=STATEV(2)
      EPBAR=EPSTN
c

```

```

c      Courbe ecrouissage dans routine FLOWPL et critere dans routine INVAR
c      PREYS: contrainte equivalente sur la courbe ecrouissage
c      HARDS: module tangent plastique
c      YIELD: contrainte equivalente du critere avec les SIGMA
c
CALL FLOWPL (PROPS,NPROPS,EPSTN,HARDS,PREYS)
CALL INVAR (AMATX,SIGMA,YIELD)
C
c      Test si le point deja plastique (GO TO 55)
c
ESPRE=EFFST-PREYS
IF (ESPRE.GE.0.0) GOTO 55
c
ESCUR=YIELD-PREYS
c
c      Si < ou = 0 le point est encore elastique GOTO 60
c
IF (ESCUR.LE.0.0) GOTO 60
c
c      Pour le point de transition elastique-plastique par linearisation
c
RFACT=ESCUR/ (YIELD-EFFST)
GOTO 70
c
c      Le point etait deja plastique
c
55 ESCUR=YIELD-EFFST
c
c      Test si decharge elastique
c
IF (ESCUR.LE.0.0) GOTO 60
RFACT=1.0
c
70 CONTINUE
c
c      Integration explicite par sous-incrementation MSTEP + correction
c
MSTEP=ESCUR*20.0/PREYS+1.0
IF (MSTEP.GT.10)MSTEP=10
C
REDUC=1.0-RFACT
DO 80 ISTR1=1,NSTRE
SGTOT (ISTR1)=STRSG (ISTR1)+REDUC*STRES (ISTR1)
80 STRES (ISTR1)=RFACT*STRES (ISTR1)/MSTEP
c
c      Sous incrementation
c
DO 90 ISTEP=1,MSTEP
C
c      Calcul critere avec les SGTOT dans INVAR

```



```

c
CALL INVAR (AMATX,SGTOT,YIELD)
C
c Calcul contrainte equivalente PREYS et module tangent plastique HARDS avec
c la def plastique equivalente reactualisée EPSTN dans FLOWPL
c
CALL FLOWPL (PROPS,NPROPS,EPSTN,HARDS,PREYS)
C
c FLAWS: calcul de AVECT vecteur {a} gradient a la surface de charge, DVECT= [D]{a}
c et ABETA= 1/({a}T[D]{a})
c
CALL FLOWS (ABETA,AVECT,DVECT,YIELD,
.      HARDS,SGTOT,AMATX,DMATT)
c
AGASH=0.0
DO 100 ISTR1=1,NSTRE
100 AGASH=AGASH+AVECT (ISTR1)*STRES (ISTR1)
c
c Increment du multiplicateur plastique DLAMD
c
DLAMD=AGASH*ABETA
IF (DLAMD.LT.0.0) DLAMD=0.0
c
c Actualisation explicite des contraintes SGTOT
c
BGASH=0.0
DO 110 ISTR1=1,NSTRE
BGASH=BGASH+AVECT (ISTR1)*SGTOT (ISTR1)
110 SGTOT (ISTR1)=SGTOT (ISTR1)+STRES (ISTR1)-DLAMD*DVECT (ISTR1)
c
c Actualisation deformation plastique equivalente
c
DEBAR=DLAMD
EPSTN=EPSTN+DEBAR
C
90 CONTINUE
c
c Correction lineaire pour que F ≈ 0 à la fin du pas
c
CALL INVAR (AMATX,SGTOT,YIELD)
CALL FLOWPL (PROPS,NPROPS,EPSTN,HARDS,CURYS)
c
BRING=1.0
IF (YIELD.GT.CURYS) BRING=CURYS/YIELD
DO 130 ISTR1=1,NSTRE
130 STRSG (ISTR1)=BRING*SGTOT (ISTR1)
EFFST=BRING*YIELD
c
c Fin correction
c

```

```

c      Calcul increment deformation a travers l'epaisseur si besoin
c      Les increments de deformation plastique pourront etre cumulés à l'aide
c      des STATEV pour utilisation eventuelle
c      Increment de deformation plastique dans DPLAX,DPLAY,DPLAXY,DPLAZ
c
DPLAX=DEBAR*AVECT (1)
DPLAY=DEBAR*AVECT (2)
DPLAXY=DEBAR*AVECT (3)
DPLAZ=- (DPLAX+DPLAY)
c
c      Cumul et sauvegarde des deformations plastiques
c
STATEV (3)=STATEV (3)+DPLAX
STATEV (4)=STATEV (4)+DPLAY
STATEV (5)=STATEV (5)+DPLAXY
STATEV (6)=STATEV (6)+DPLAZ
c
c      Increment deformation elastique si besoin
c
DELAX=DEPSX-DPLAX
DELAY=DEPSY-DPLAY
DELAXY=DEPSXY-DPLAXY
DELAZ=-PROPS (2) * (DELAX+DELAY) / (1.-PROPS (2))
DEPSZ=DELAZ+DPLAZ
c
DO 135 ISTR1=1,NSTRE
135 STRSG (ISTR1)=SGTOT (ISTR1)
EFFST=YIELD
c
ENDIF
c
c      Calcul matrice de raideur tangente continue
c
DO ISTRE=1,NSTRE
STRES (ISTRE)=STRSG (ISTRE)
ENDDO
c
CALL INVAR (AMATX, STRES, YIELD)
CALL FLOWPL (PROPS, NPROPS, EPSTN, HARDS, PREYS)
c
CALL FLOWS (ABETA, AVECT, DVECT, YIELD,
.          HARDS, STRES, AMATX, DMATT)
c
DO 270 ISTRE=1,NSTRE
DO 270 JSTRE=1,NSTRE
270 DMATX (ISTRE, JSTRE)=DMATT (ISTRE, JSTRE)-ABETA*
.          DVECT (ISTRE) *DVECT (JSTRE)
c
GOTO 190

```

```

C
C ***** Fin elasto-plastique GO TO 190 *****
C
C   60 Point elastique
C
60 CONTINUE
C
DO 180 ISTR1=1,NSTRE
180 STRSG(ISTR1)=STRSG(ISTR1)+DESIG(ISTR1)
EFFST=YIELD
C
C   Matrice elastique
C
DO I=1,NTENS
DO J=1,NTENS
DMATX(I,J)=DMATT(I,J)
ENDDO
ENDDO
C
190 CONTINUE
C
C   Reactualisation pour abaqus
C
DO I=1,NTENS
STRESS(I)=STRSG(I)
DSTRES(I)=STRSG(I)-SINIT(I)
ENDDO
C
STATEV(1)=EPSTN
STATEV(2)=EFFST
C
C   Matrice de raideur tangente pour abaqus
C
DO 395 K1=1,NTENS
DO 395 K2=1,NTENS
DDSDDE(K2,K1)=DMATX(K1,K2)
395 CONTINUE
C
C   TOTAL CHANGE IN SPECIFIC ENERGY
C
TDE=0.
DO K1=1,NTENS
TDE=TDE+(STRESS(K1)+0.5*DSTRES(K1))*DSTRAN(K1)
ENDDO
C
C   CHANGE IN SPECIFIC ELASTIC STRAIN ENERGY
C
DEE=0.
DO K1=1,NDI

```

```

      TERM1=0.
      TERM2=0.
      DO K2=1,NDI
        TERM1=TERM1+D(K1,K2)*STRAN(K2)
        TERM2=TERM2+D(K1,K2)*DSTRAN(K2)
      ENDDO
      DEE=DEE+(TERM1+0.5*TERM2)*DSTRAN(K1)
      ENDDO
      GMOD=PROPS(1)/(2*(1+PROPS(2)))
      I1=NDI
      DO K1=1,NSHR
        I1=I1+1
        DEE=DEE+GMOD*(STRAN(I1)+0.5*DSTRAN(I1))*DSTRAN(I1)
      ENDDO
      SSE=SSE+DEE
      SCD=SCD+TDE-DEE

      RETURN
      END
C
C***** SUBROUTINES IDENTIQUES a UMAT IMPLICITE *****
```