Aalto-yliopisto

ELEC-C3240
Elektroniikka 2

Digitaalielektroniikka
Loogiset operaatiot ja Boolen algebra

Sisältö ja alustava aikataulu (periodi IV)

6. Luento Lukujärjestelmät	Perusteet
7. Luento Loogiset operaatiot ja boolen algebra **8. Luento** Karnaugh'n kartat	Alkeismenetelmät ja käsitteet Peruspiirien suunnittelu alkeismenetelmiä käyttäen
9. Luento Tilakoneet	Monimutkaisten kokonaisuuksien luominen
10. Luento Logiikkaporttien CMOS-toteutukset	Transistoritason suunnittelu

Luennon oppimistavoite

- Loogiset perusfunktiot JA, TAI, EI (0,25h)
- Loogisten funktioiden SOP ja POS esitykset (1h)
- Sieventäminen Boolen algebralla ja de Morganin säännöillä. 1,75h

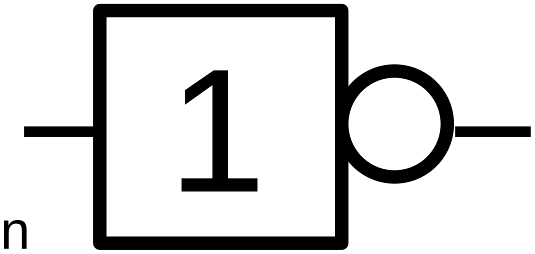
Kuormitus: Luento+laskari+itseopiskelu=2+2+3=7h

Loogiset perusfunktiot

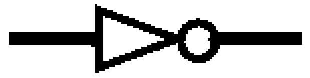
- Merkitään loogisia muuttujia kirjaimilla A, B, C, D, ..,
- Merkitään funktioita kirjaimilla F, G, ..

- Loogiset perusfunktiot ovat EI-, JA- ja TAI- funktiot
  - Jokainen looginen funktio voidaan ilmaista perusfunktioden avulla
  - Muuttujien arvot sisään, funktion arvo ulos
  - Binääriset arvot 0 tai 1

EI-funktio

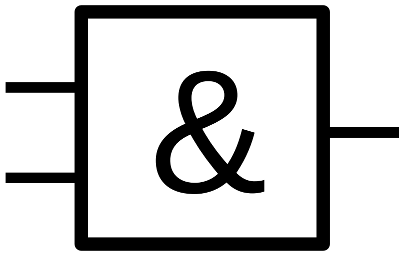


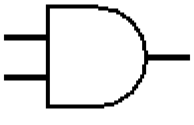
- EI-funktio on yhden muuttujan funktio
- Se saa arvon 1, kun muuttujalla on arvo 0 ja arvon 0, kun muuttujalla on arvo 1
- Merkintä: F = A’ tai F = $\overline{A}$



JA - Funktio

JA-funktio saa arvon 1 silloin ja vain silloin, kun kaikilla sen muuttujilla on arvo 1





- Merkintä:
  - F = A B,
  - F = A • B,
  - F = A x B

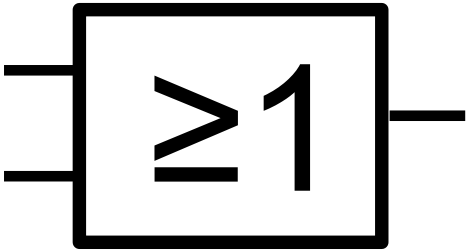
Loogisten funktioiden laskusääntöjä

JA-funktio:

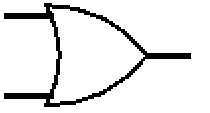
$$0 \cdot 0 = 0$$
$$0 \cdot 1 = 0$$
$$1 \cdot 0 = 0$$
$$1 \cdot 1 = 1$$

- JA-funktiota nimitetään myös loogiseksi tuloksi

TAI-funktio



- TAI-funktio saa arvon 1, kun yhdellä tai useammalla muuttujalla on arvo 1.
- Vain, kun kaikilla muuttujilla on arvo 0, TAI-funktio saa arvon 0
- Merkintä: F = A + B (kun muuttujia on kaksi)



Loogisten funktioiden laskusääntöjä

TAI-funktio:

$0 + 0 = 0$
$0 + 1 = 1$
$1 + 0 = 1$
Huom ! $1 + 1 = 1$

- TAI-funktiota nimitetään myös loogiseksi summaksi

Totuustaulu

- Looginen funktio voidaan määritellä yksikäsitteisesti totuustaulun avulla
- Totuustauluun merkataan muuttujien kaikki mahdolliset kombinaatiot sekä funktion arvo kullakin kombinaatiolla:

Muuttujat

Funktio

A	B	F
0	0	0
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Muuttujien kaikki arvo-kombinaatiot

Funktion saamat arvot

Perusfunktioiden totuustaulut

JA

A	B	AB
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

TAI

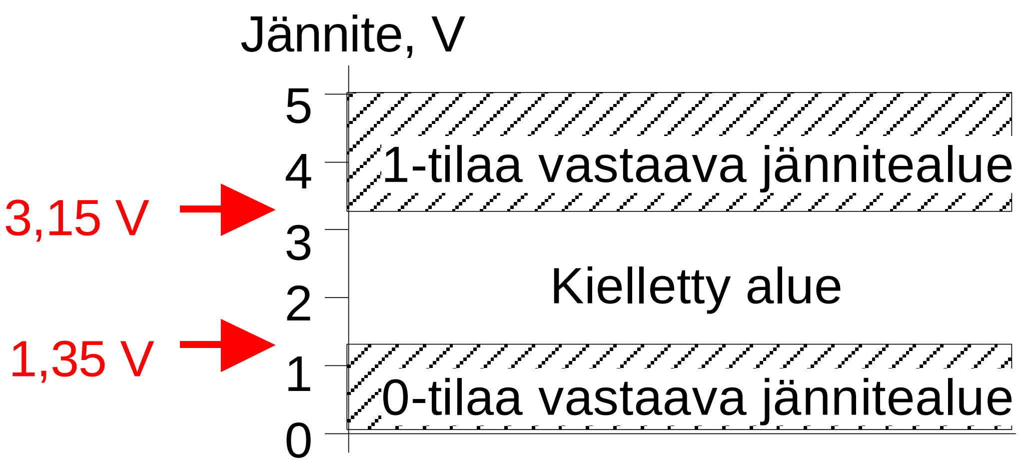
A	B	A+B
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

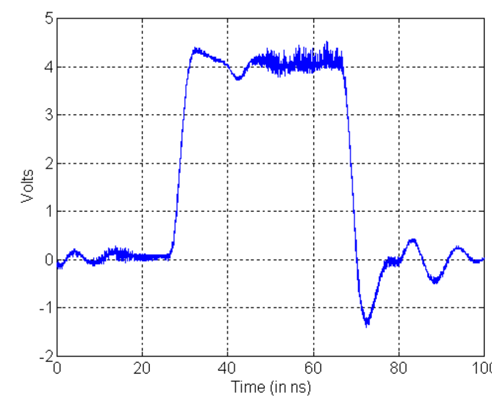
EI

A	A’
0	1
1	0

Porttipiirit

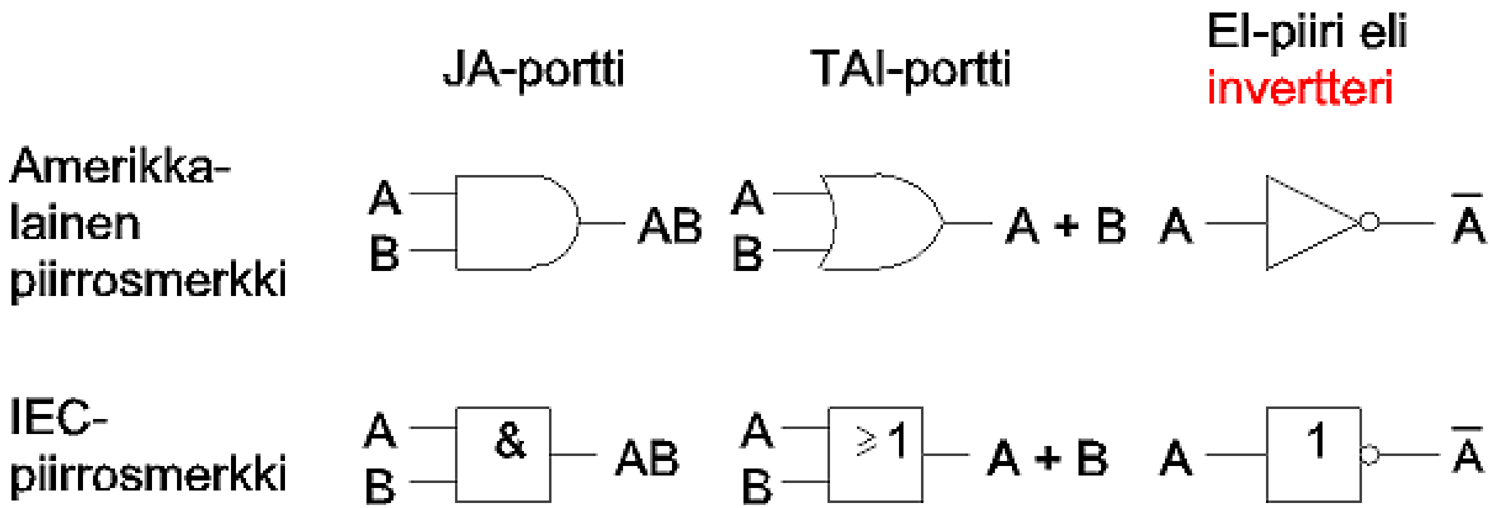
- Loogiset funktiot toteutetaan yleensä sähköisillä piireillä (CMOS)
- Porttipiirit ovat yleisin tapa toteuttaa loogisia funktioita
- Sähköisissä piireissä tiettyä loogisen muuttujan ja funktion arvoa vastaa tietty sähköisen suureen arvoalue
- Esimerkki: CMOS-logiikkapiirit, jännitesignaali, positiivinen logiikka





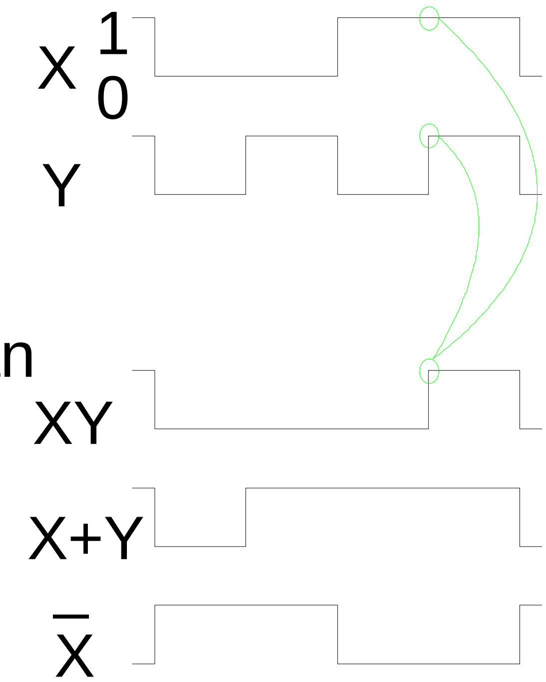
Porttipiirit, jatkoa

- Kullekin perusfunktiolle on oma porttipiirinsä
- Piireille on omat piirrosmerkkinsä
- Perinteiset amerikkalaiset ja kansainvälisen IEC -standardin mukaiset piirrosmerkit:



Aikakaavio

- Kuvaa signaalien käyttäytymistä ajan funktiona
- Voidaan käyttää myös signaaliviiveiden esittämiseen
- Ei yleensä kuvaa kaikkia eri mahdollisuuksia, vaan vain toiminnan kannalta merkittävät
- Aika kasvaa vasemmalta oikealle
- Esimerkkinä perusporttien ja invertterin aikakaaviot



Kaaviossa nollaviiveet

Aikakaavio

Ajoituskaaviot tärkeitä piirin toiminnan ymmärtämisen kannalta, varsinkin digitaalisesti kontrolloiduissa analogisissa piireissä!

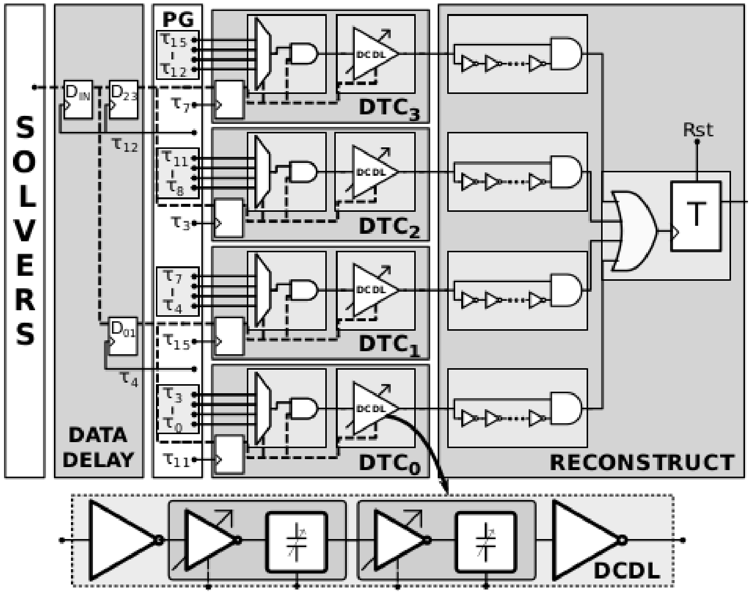


Fig. 3. Block diagram of the phase modulator RF front-end.

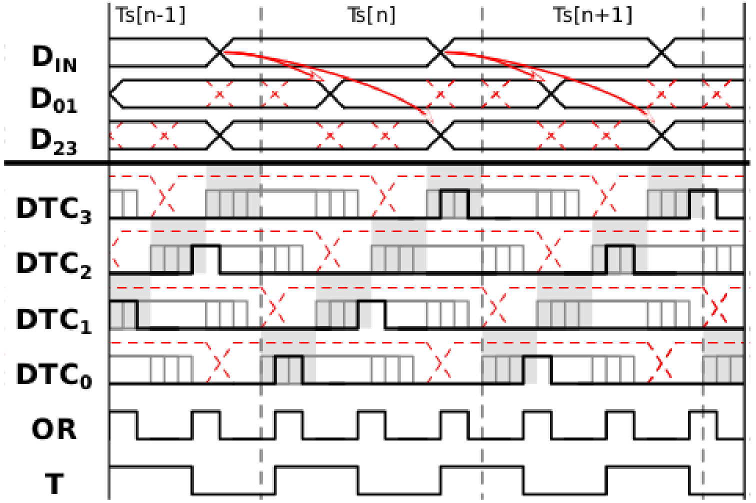
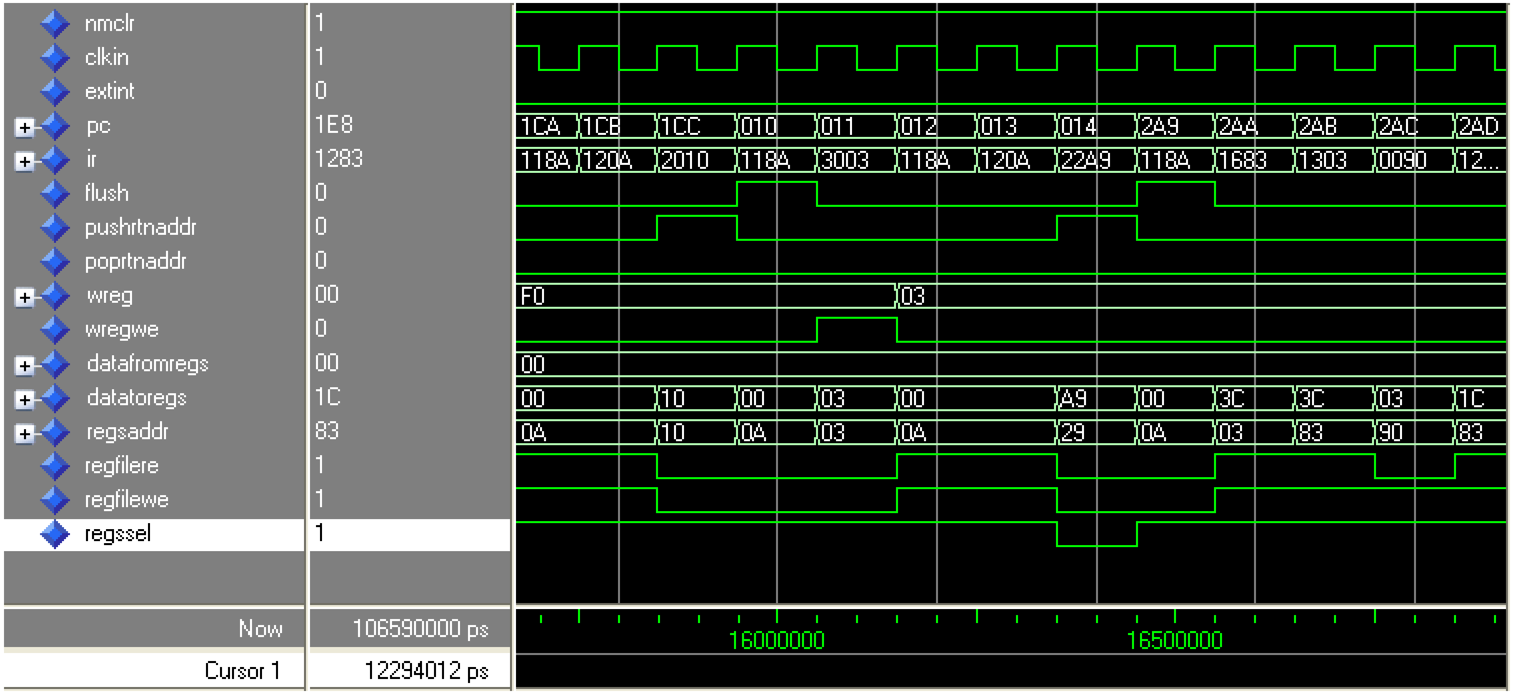


Fig. 4. Timing diagram of the phase modulator RF front-end, depicting reconstruction of a signal at 3/2 F_s. For each DTC, the grey area shows the operating boundaries, the grey lines represent the selectable coarse phases and bolded black curves represent enabled transitions. The red dotted lines represent data signals and their clocking in the DTCs.

Aikakaavio

Yksibittiset, sekä koodatut signaalit mahdollisia.
Tässä esimerkissä 2,3 ja 4 sanaisia heksadesimaalisignaaleita.



Aalto-yliopisto

Logiikkapiirin suunnittelu

Logiikkapiirin suunnittelu

- Laaditaan totuustaulu tai -taulut
- Muodostetaan kytkentäfunktiot
- Sievennetään funktiot
- Toteutetaan piiri käytettävissä olevista peruspiireistä
- Testataan suunnitellun piirin toiminta

Kytkentäfunktion kolme esitystapaa

Totuustaulu

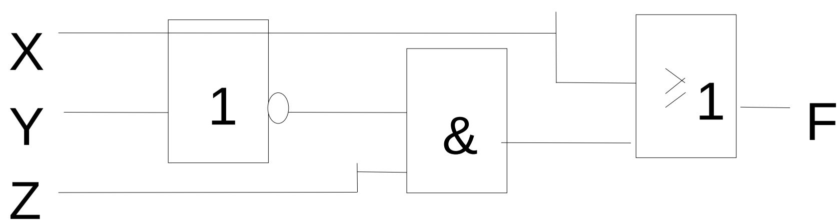
X	Y	Z	F
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

MÄÄRITTELY

SIEVENNYS

Looginen funktio

$$F = X + \overline{Y}Z$$



Piirikaavio

TOTEUTUS

Logiikkapiirin suunnittelu

- Laaditaan totuustaulu tai -taulut
- Muodostetaan kytkentäfunktiot
- Sievennetään funktiot
- Suunnitellaan piiri käytettävissä olevista peruspiireistä
- Testataan suunnitellun piirin toiminta
- Ongelmana on kytkentäfunktioiden muodostaminen ja sieventäminen: Miten löydetään yksinkertaisin totuustaulun toteuttava kytkentäfunktio ?
- Käytetään kytkentäalgebraa (Boolen algebraa)

Kytkentäalgebran teoreemoja

Yhden muuttujan teoreemat:

$X + 0 = X$	Duaali-teoreemat	$X \cdot 1 = X$
$X + 1 = 1$		$X \cdot 0 = 0$
$X + X = X$	$\longleftrightarrow$	$X \cdot X = X$
$X + \overline{X} = 1$		$X \cdot \overline{X} = 0$
$\overline{\overline{X}} = X$		

Usean muuttujan teoreemat:

$X + Y = Y + X$	Duaali-teoreemat	$X\,Y = Y\,X$
$X + (Y + Z) = (X + Y) + Z$		$X(Y\,Z) = (X\,Y)Z$
$X(Y + Z) = X\,Y + X\,Z$	$\longleftrightarrow$	$X + Y\,Z = (X + Y)(X + Z)$

DeMorganin kaavat:

$\overline{X + Y} = \overline{X} \cdot \overline{Y}$ $\qquad$ $\overline{X \cdot Y} = \overline{X} + \overline{Y}$

DeMorganin teoreemat

Käytännön ohjeet loogisen funktion sieventämiseksi:

- Komplementoidaan koko lauseke kahteen kertaan.
- Koska komplementin komplementti on lauseke itse, arvo ei muutu.
- Jos operaattori vaihdetaan (komplementoidaan) komplementtiviiva ”katkeaa” (kts. deMorgan)
- kokeile itse:

$$AB + CD$$

DeMorganin teoreemat

Käytännön ohjeet:

- Komplementoidaan koko lauseke kahteen kertaan.
- Koska komplementin komplementti on lauseke itse, arvo ei muutu.
- Jos operaattori vaihdetaan (komplementoidaan) komplementtiviiva ”katkeaa” (kts. deMorgan)
- kokeile itse:

$$AB + CD = \overline{\overline{AB+CD}} =$$

Aalto-yliopisto

DeMorganin teoreemat

Käytännön ohjeet:

- Komplementoidaan koko lauseke kahteen kertaan.
- Koska komplementin komplementti on lauseke itse, arvo ei muutu.
- Jos operaattori vaihdetaan (komplementoidaan) komplementtiviiva ”katkeaa” (kts. deMorgan)
- kokeile itse:

$$AB + CD = \overline{\overline{AB+CD}} = \overline{\overline{(AB)}\;\overline{(CD)}} =$$

DeMorganin teoreemat

Käytännön ohjeet:

- Komplementoidaan koko lauseke kahteen kertaan.
- Koska komplementin komplementti on lauseke itse, arvo ei muutu.
- Jos operaattori vaihdetaan (komplementoidaan) komplementtiviiva ”katkeaa” (kts. deMorgan)
- kokeile itse:

$$AB + CD = \overline{\overline{AB+CD}} = \overline{\overline{(AB)}\;\overline{(CD)}} = \overline{(\overline{A}+\overline{B})\;(\overline{C}+\overline{D})} =$$

DeMorganin teoreemat

Käytännön ohjeet:

- Komplementoidaan koko lauseke kahteen kertaan.
- Koska komplementin komplementti on lauseke itse, arvo ei muutu.
- Jos operaattori vaihdetaan (komplementoidaan) komplementtiviiva ”katkeaa” (kts. deMorgan)
- kokeile itse:

$$AB + CD = \overline{\overline{AB+CD}} = \overline{\overline{(AB)}\;\overline{(CD)}} = \overline{(\overline{A}+\overline{B})\;(\overline{C}+\overline{D})} = \overline{(\overline{A}+\overline{B})}+\overline{(\overline{C}+\overline{D})}$$

Kytkentäfunktioiden sievennys / optimointi

Kytkentäfunktioiden sievennys / optimointi

- Tarvitaan lähestymistapa jolla monimutkaisia kytkentäfunktioita voidaan sieventää:
  - Standardimuodot SOP ja POS
- Näihin päästään etsimällä totuustaulusta minimi- ja maksimitermit
- Tämän jälkeen hienompi optimointi saavutetaan ryhmittelemällä Boolen ja de Morganin säännöillä niin että saavutetaan haluttu lopputulos.

Kytkentäfunktioiden sievennys / optimointi

- **Tarvitaan lähestymistapa jolla monimutkaisia kytkentäfunktioita voidaan sieventää:**
  - **Standardimuodot SOP ja POS**
- Näihin päästään etsimällä totuustaulusta minimi- ja maksimitermit
- Tämän jälkeen hienompi optimointi saavutetaan ryhmittelemällä Boolen ja de Morganin säännöillä niin että saavutetaan haluttu lopputulos.

Kytkentäfunktioiden standardimuodot

- Kytkentäfunktio voidaan esittää monessa eri muodossa
- Kaikki kytkentäfunktiot voidaan esittää ns. standardimuodoissa:
  - tulojen summamuodossa (sum of products = SOP)
  - ja summien tulomuodossa (product of sums = POS)
- Esimerkki:

Tulotermit

Tulojen summamuoto: $F(X, Y, Z) = X + \overline{Y}Z + \overline{X}YZ$

Summien tulomuoto: $G(X, Y, Z) = (X + Y)\overline{Y}(\overline{X} + Y + \overline{Z})$

Summatermit

Kytkentäfunktioiden sievennys / optimointi

- Tarvitaan lähestymistapa jolla monimutkaisia kytkentäfunktioita voidaan sieventää:
  - Standardimuodot SOP ja POS
- **Näihin päästään etsimällä totuustaulusta minimi- ja maksimitermit**
- Tämän jälkeen hienompi optimointi saavutetaan ryhmittelemällä Boolen ja de Morganin säännöillä niin että saavutetaan haluttu lopputulos.

Kytkentäfunktioiden standardimuodot

- n:llä muuttujalla on 2^n minimitermiä ja 2^n maksimitermiä
- Minimitermi (looginen tulo) saa arvon 1 totuustaulun rivillä
- Maksimitermi (looginen summa) saa arvon 0 totuustaulun rivillä
- Esimerkki: kolmen muuttujan minimi- ja maksimitermit:

X Y Z	Minimitermit		Maksimitermit	
	Tulotermi	Symboli	Summatermi	Symboli
0 0 0	$\overline{X}\,\overline{Y}\,\overline{Z}$	m0	$X + Y + Z$	M0
0 0 1	$\overline{X}\,\overline{Y}\,Z$	m1	$X + Y + \overline{Z}$	M1
0 1 0	$\overline{X}\,Y\,\overline{Z}$	m2	$X + \overline{Y} + Z$	M2
0 1 1	$\overline{X}\,Y\,Z$	m3	$X + \overline{Y} + \overline{Z}$	M3
1 0 0	$X\,\overline{Y}\,\overline{Z}$	m4	$\overline{X} + Y + Z$	M4
1 0 1	$X\,\overline{Y}\,Z$	m5	$\overline{X} + Y + \overline{Z}$	M5
1 1 0	$X\,Y\,\overline{Z}$	m6	$\overline{X} + \overline{Y} + Z$	M6
1 1 1	$X\,Y\,Z$	m7	$\overline{X} + \overline{Y} + \overline{Z}$	M7

Kytkentäfunktioiden standardimuodot

- Minimitermi (looginen tulo) saa arvon 1 totuustaulun rivillä
  - Kaikilla muilla tulotermien arvoilla minimitermi saa arvon 0

X Y Z	Minimitermit Tulotermi	Symboli
0 0 0	$\bar{X}\bar{Y}\bar{Z}$	m0
0 0 1	$\bar{X}\bar{Y}Z$	m1
0 1 0	$\bar{X}Y\bar{Z}$	m2
0 1 1	$\bar{X}YZ$	m3
1 0 0	$X\bar{Y}\bar{Z}$	m4
1 0 1	$X\bar{Y}Z$	m5
1 1 0	$XY\bar{Z}$	m6
1 1 1	XYZ	m7

Kytkentäfunktioiden standardimuodot

- Kytkentäfunktiota kuvaavan lausekkeen muodostaminen totuustaulusta minimitermeillä:
  - Looginen summa minimitermeistä, joiden kohdalla funktio saa arvon 1

X Y Z	F	Minimitermit Tulotermi	Symboli
0 0 0	1	$\overline{X}\,\overline{Y}\,\overline{Z}$	m0
0 0 1	0	$\overline{X}\,\overline{Y}\,Z$	m1
0 1 0	1	$\overline{X}\,Y\,\overline{Z}$	m2
0 1 1	0	$\overline{X}\,Y\,Z$	m3
1 0 0	0	$X\,\overline{Y}\,\overline{Z}$	m4
1 0 1	1	$X\,\overline{Y}\,Z$	m5
1 1 0	0	$X\,Y\,\overline{Z}$	m6
1 1 1	1	$X\,Y\,Z$	m7

Kytkentäfunktioiden standardimuodot

- Kytkentäfunktiota kuvaavan lausekkeen muodostaminen totuustaulusta minimitermeillä:
  – Looginen summa minimitermeistä (SOP), joiden kohdalla funktio saa arvon 1

X	Y	Z	F	Minimitermit Tulotermi	Minimitermit Symboli
0	0	0	1	$\overline{X}\,\overline{Y}\,\overline{Z}$	m0
0	0	1	0	$\overline{X}\,\overline{Y}\,Z$	m1
0	1	0	1	$\overline{X}\,Y\,\overline{Z}$	m2
0	1	1	0	$\overline{X}\,Y\,Z$	m3
1	0	0	0	$X\,\overline{Y}\,\overline{Z}$	m4
1	0	1	1	$X\,\overline{Y}\,Z$	m5
1	1	0	0	$X\,Y\,\overline{Z}$	m6
1	1	1	1	$X\,Y\,Z$	m7

$$F = \overline{X}\,\overline{Y}\,\overline{Z} + \overline{X}\,Y\,\overline{Z} + X\,\overline{Y}\,Z + X\,Y\,Z$$

Kytkentäfunktioiden standardimuodot

- Kytkentäfunktiota kuvaavan lausekkeen muodostaminen totuustaulusta minimitermeillä:
  - Looginen summa minimitermeistä (SOP), joiden kohdalla funktio saa arvon 1

X Y Z	F	Minimitermit: Tulotermi	Minimitermit: Symboli
0 0 0	1	$\overline{X}\,\overline{Y}\,\overline{Z}$	m0
0 0 1	0	$\overline{X}\,\overline{Y}\,Z$	m1
0 1 0	1	$\overline{X}\,Y\,\overline{Z}$	m2
0 1 1	0	$\overline{X}\,Y\,Z$	m3
1 0 0	0	$X\,\overline{Y}\,\overline{Z}$	m4
1 0 1	1	$X\,\overline{Y}\,Z$	m5
1 1 0	0	$X\,Y\,\overline{Z}$	m6
1 1 1	1	$X\,Y\,Z$	m7

$$F = \overline{X}\,\overline{Y}\,\overline{Z} + \overline{X}\,Y\,\overline{Z} + X\,\overline{Y}\,Z + X\,Y\,Z$$

Näin saatua lauseketta nimitetään kanoniseksi tulojen summamuodoksi

Kytkentäfunktioiden standardimuodot

- Maksimitermi (looginen summa) saa arvon 0 totuustaulun rivillä
  - Kaikilla muilla tulotermien arvoilla maksimitermi saa arvon 1

X Y Z	Maksimitermit Summatermi	Maksimitermit Symboli
0 0 0	$X + Y + Z$	$M0$
0 0 1	$X + Y + \overline{Z}$	$M1$
0 1 0	$X + \overline{Y} + Z$	$M2$
0 1 1	$X + \overline{Y} + \overline{Z}$	$M3$
1 0 0	$\overline{X} + Y + Z$	$M4$
1 0 1	$\overline{X} + Y + \overline{Z}$	$M5$
1 1 0	$\overline{X} + \overline{Y} + Z$	$M6$
1 1 1	$\overline{X} + \overline{Y} + \overline{Z}$	$M7$

Kytkentäfunktioiden standardimuodot, jatkoa

- Kytkentäfunktiota kuvaavan lausekkeen muodostaminen totuustaulusta maksimitermeillä:
  - Looginen tulo maksimitermeistä, joiden kohdalla funktio saa arvon 0

X Y Z	F	Maksimitermit Summatermi	Symboli
0 0 0	1	$X + Y + Z$	M0
0 0 1	0	$X + Y + \overline{Z}$	M1
0 1 0	1	$X + \overline{Y} + Z$	M2
0 1 1	0	$X + \overline{Y} + \overline{Z}$	M3
1 0 0	0	$\overline{X} + Y + Z$	M4
1 0 1	1	$\overline{X} + Y + \overline{Z}$	M5
1 1 0	0	$\overline{X} + \overline{Y} + Z$	M6
1 1 1	1	$\overline{X} + \overline{Y} + \overline{Z}$	M7

Kytkentäfunktioiden standardimuodot, jatkoa

- Kytkentäfunktiota kuvaavan lausekkeen muodostaminen totuustaulusta maksimitermeillä:
  - Looginen tulo maksimitermeistä, joiden kohdalla funktio saa arvon 0

X Y Z	F	Maksimitermit Summatermi	Symboli
0 0 0	1	$X + Y + Z$	M0
0 0 1	0	$X + Y + \overline{Z}$	M1
0 1 0	1	$X + \overline{Y} + Z$	M2
0 1 1	0	$X + \overline{Y} + \overline{Z}$	M3
1 0 0	0	$\overline{X} + Y + Z$	M4
1 0 1	1	$\overline{X} + Y + \overline{Z}$	M5
1 1 0	0	$\overline{X} + \overline{Y} + Z$	M6
1 1 1	1	$\overline{X} + \overline{Y} + \overline{Z}$	M7

$$F = (X + Y + \overline{Z})(X + \overline{Y} + \overline{Z})$$
$$(\overline{X} + Y + Z)(\overline{X} + \overline{Y} + Z)$$

Kytkentäfunktioiden standardimuodot, jatkoa

- Kytkentäfunktiota kuvaavan lausekkeen muodostaminen totuustaulusta maksimitermeillä:
  - Looginen tulo maksimitermeistä, joiden kohdalla funktio saa arvon 0

X Y Z	F	Maksimitermit Summatermi	Symboli
0 0 0	1	$X + Y + Z$	M0
0 0 1	0	$X + Y + \overline{Z}$	M1
0 1 0	1	$X + \overline{Y} + Z$	M2
0 1 1	0	$X + \overline{Y} + \overline{Z}$	M3
1 0 0	0	$\overline{X} + Y + Z$	M4
1 0 1	1	$\overline{X} + Y + \overline{Z}$	M5
1 1 0	0	$\overline{X} + \overline{Y} + Z$	M6
1 1 1	1	$\overline{X} + \overline{Y} + \overline{Z}$	M7

$$F = (X + Y + \overline{Z})(X + \overline{Y} + \overline{Z})$$

$$(\overline{X} + Y + Z)(\overline{X} + \overline{Y} + Z)$$

Näin saatua lauseketta nimitetään kanoniseksi summien tulomuodoksi

Kytkentäfunktioiden standardimuodot, jatkoa

- Merkintätapoja:

$F = X'Y'Z' + X'YZ' + X'YZ + XYZ = m0 + m2 + m5 + m7$

$F(X, Y, Z) = \Sigma\, m(0, 2, 5, 7)$

$F = (X + Y + Z')(X + Y' + Z')(X' + Y + Z)(X' + Y' + Z)$

$= M1 \cdot M3 \cdot M4 \cdot M6$

$F(X, Y, Z) = \prod M(1, 3, 4, 6)$

Harjoitus: SOP-muoto

- Tee seuraavan funktion totuustaulu
- kirjoita kanoninen tulojen summamuoto eli funktion lauseke käyttäen minimitermejä:

  $F(A, B) = A + A' B$

Harjoitus: SOP-muoto

- Tee seuraavan funktion totuustaulu
- kirjoita kanoninen tulojen summamuoto eli funktion lauseke käyttäen minimitermejä:

  $F(A, B) = A + A' B$

A	B	F
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

$F(A, B) = \overline{A}\,B + A\,\overline{B} + A\,B$

$F(A, B) = \Sigma m\,(1, 2, 3)$

Kahden tason ja usean tason piirit

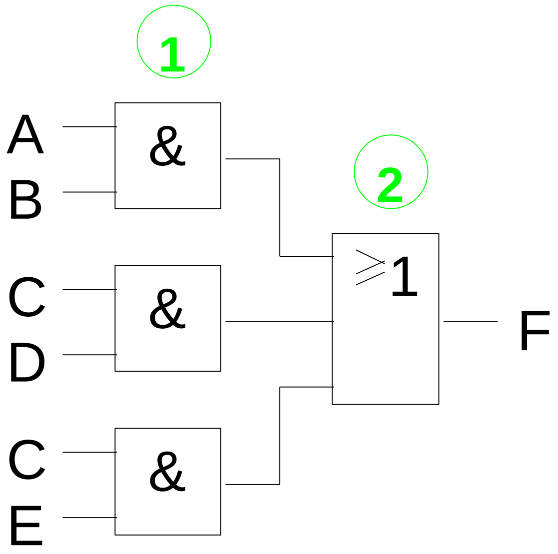
- Esimerkki kytkentäfunktion kahden ja usean tason toteutuksesta:

$$F = \underbrace{A\,B + C\,D + C\,E}_{\text{SOP-muoto}} = A\,B + C(D + E)$$

Kahden tason ja usean tason piirit

- Esimerkki kytkentäfunktion kahden ja usean tason toteutuksesta:

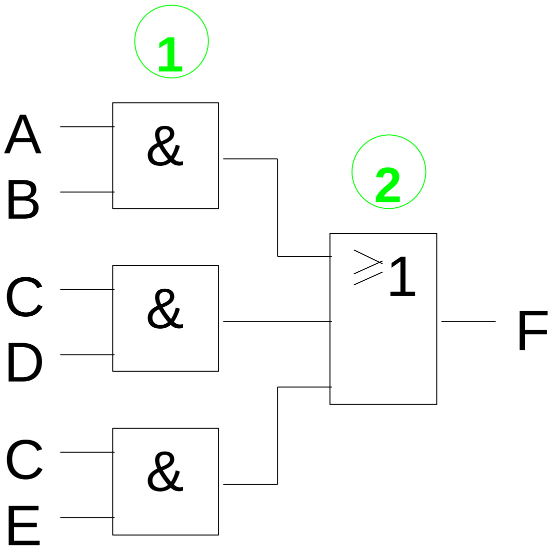
$F = A\,B + C\,D + C\,E$



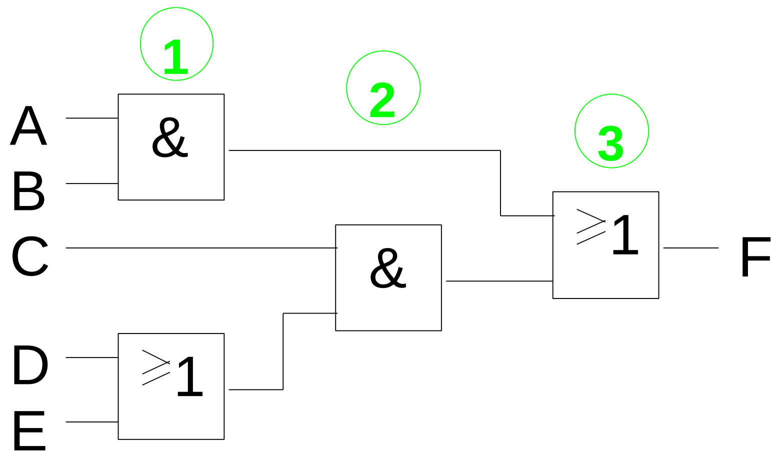
Kahden tason ja usean tason piirit

- Esimerkki kytkentäfunktion kahden ja usean tason toteutuksesta:

$$F = A\,B + C\,D + C\,E = A\,B + C(D + E)$$



$F = A\,B + C\,D + C\,E$



$F = A\,B + C(D + E)$

Kahden tason ja usean tason piirit

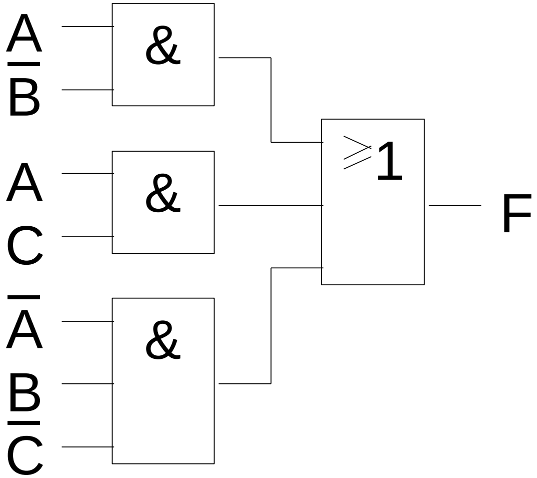
- SOP- ja POS-lausekkeista saadaan kahden tason piirejä
- Useamman tason piiritoteutus voi olla yksinkertaisempi kuin kahden tason piiritoteutus
- Se, kannattaako piiri toteuttaa kahden vai useamman tason toteutuksella riippuu toteutusteknologiasta.
  - Monituloinen portti voi olla liian hidas
  - Moniasteinen logiikka voi kasvattaa tehonkulutusta “laskennan“ edetessä ketjussa. Jokainen tilanmuutos kuluttaa energiaa.

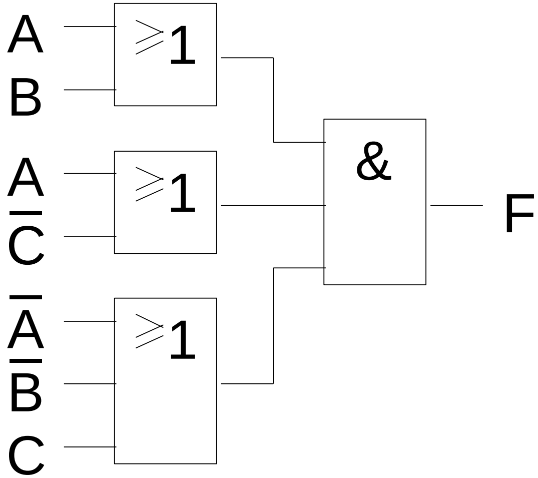
SOP- ja POS-toteutukset

- Esimerkki 1 kytkentäfunktion SOP- ja POS-toteutuksesta:

SOP POS

$$F = A\bar{B} + AC + \bar{A}B\bar{C} = (A + B)(A + \bar{C})(\bar{A} + \bar{B} + C)$$





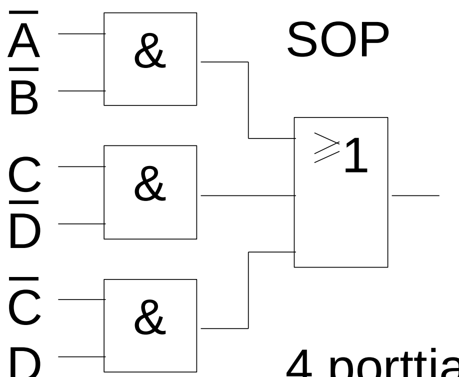
Tässä esimerkissä toteutukset ovat yhtä mutkikkaita

POS- ja SOP-toteutukset, jatkoa

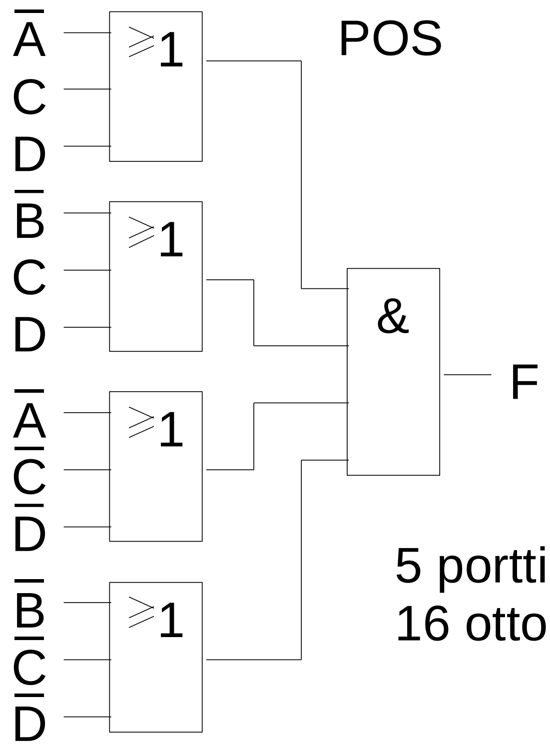
- Esimerkki 2 kytkentäfunktion POS- ja SOP-toteutuksesta:

$$F = (\overline{A} + C + D)(\overline{B} + C + D)(\overline{A} + \overline{C} + \overline{D})(\overline{B} + \overline{C} + \overline{D}) \quad \text{(POS)}$$

$$= \overline{A}\,\overline{B} + C\,\overline{D} + \overline{C}\,D \quad \text{(SOP)}$$



4 porttia
9 ottoa



5 porttia
16 ottoa

Tässä esimerkissä toteutusten mutkikkuus on erilainen

Aalto-yliopisto

Kytkentäfunktioiden sievennys / optimointi

- Tarvitaan lähestymistapa jolla monimutkaisia kytkentäfunktioita voidaan sieventää:
  - Standardimuodot SOP ja POS
- Näihin päästään etsimällä totuustaulusta minimi- ja maksimitermit
- **Tämän jälkeen hienompi optimointi saavutetaan ryhmittelemällä Boolen ja de Morganin säännöillä niin että saavutetaan haluttu lopputulos.**

Lausekkeiden sieventäminen

- Loogisen funktion yleistä minimointia pidetään ongelmana “selviämättömänä” (intractable), t.s, se on teoriassa mahdollista, mutta ei käytännöllisessä ajassa.
- Sieventäminen on kuitenkin usein mahdollista
- Menetelmiä:
  - Boolen algebra ja de Morganin teoreemat, tuottavat useita eri vaihtoehtoisia toteutuksia, joiden “paremmuus” riippuu lopullisesta toteutustavasta (voidaan esim pyrkiä välttämään kolmituloisia portteja.
    - “Optimoitavat ominaisuudet”=Nopeus-Tehonkulutus-Pinta-ala.
  - Karnaugh´n kartta.
  - Muut menetelmät, erityisesti tietokoneen avulla tehtävä sievennys.

Lausekkeiden sieventäminen

- Lähtökohtana funktion kanoninen toteutus.

X Y Z	F	Minimimitermit Tulotermi	
0 0 0	0		m0
0 0 1	0		m1
0 1 0	0		m2
0 1 1	1	$\overline{X}YZ$	m3
1 0 0	0		m4
1 0 1	0		m5
1 1 0	0		m6
1 1 1	1	XYZ	m7

$F=\overline{X}YZ+XYZ$

Onko mahdollista esittää tämä Yksinkertaisemmassa muodossa?

Lausekkeiden sieventäminen

- Lähtökohtana funktion kanoninen toteutus.
- Runnotaan ja ryhmitellään uudelleen Boolen ja de Morganin säännöillä niin kauan että saavutetaan haluttu lopputulos.

X	Y	Z	F	Tulotermi	Minimimitermit
0	0	0	0		m0
0	0	1	0		m1
0	1	0	0		m2
0	1	1	1	$\bar{X}YZ$	m3
1	0	0	0		m4
1	0	1	0		m5
1	1	0	0		m6
1	1	1	1	XYZ	m7

$$F=\bar{X}YZ+XYZ$$
$$=(\bar{X}+X)YZ=1YZ=YZ=\overline{\bar{Y}+\bar{Z}}$$

Lausekkeiden sieventäminen

- Lähtökohtana funktion kanoninen toteutus.
- Runnotaan ja ryhmitellään uudelleen Boolen ja de Morganin säännöillä niin kauan että saavutetaan haluttu lopputulos.

X	Y	Z	F	Tulotermi	Minimimitermit
0	0	0	0		m0
0	0	1	0		m1
0	1	0	1	$\overline{X}Y\overline{Z}$	m2
0	1	1	1	$\overline{X}YZ$	m3
1	0	0	0		m4
1	0	1	1	$X\overline{Y}Z$	m5
1	1	0	1	$XY\overline{Z}$	m6
1	1	1	1	XYZ	m7

$$F=\overline{X}Y\overline{Z}+\overline{X}YZ+X\overline{Y}Z+XY\overline{Z}+XYZ$$

Lausekkeiden sieventäminen

- Lähtökohtana funktion kanoninen toteutus.
- Runnotaan ja ryhmitellään uudelleen Boolen ja de Morganin säännöillä niin kauan että saavutetaan haluttu lopputulos.

X Y Z	F	Minimimitermit Tulotermi	
0 0 0	0		m0
0 0 1	0		m1
0 1 0	1	$\bar{X}Y\bar{Z}$	m2
0 1 1	1	$\bar{X}YZ$	m3
1 0 0	0		m4
1 0 1	1	$X\bar{Y}Z$	m5
1 1 0	1	$XY\bar{Z}$	m6
1 1 1	1	XYZ	m7

$$F=\bar{X}Y\bar{Z}+\bar{X}YZ+X\bar{Y}Z+XY\bar{Z}+XYZ$$
$$=XY(\bar{Z}+Z)+X\bar{Y}Z+\bar{X}Y(\bar{Z}+Z)$$
$$=XY+X\bar{Y}Z+\bar{X}Y$$
$$=(X+\bar{X})Y+X\bar{Y}Z$$
$$=Y+X\bar{Y}Z$$
$$=Y(1+XZ)+\bar{Y}XZ$$
$$=Y+XZ=\overline{\bar{Y}(\overline{XZ})}=\overline{\bar{Y}(\bar{X}+\bar{Z})}=Y+\overline{(\bar{X}+\bar{Z})}$$

SOP

Vain JA

POS

Vain TAI

Luennon oppimistavoite

- Loogiset perusfunktiot JA, TAI, EI (0,25h)
- Loogisten funktioiden SOP ja POS esitykset (1h)
- Sieventäminen Boolen algebralla ja de Morganin säänöillä. 1,75h

Kuormitus: Luento+laskari+itseopiskelu=2+2+3=7h