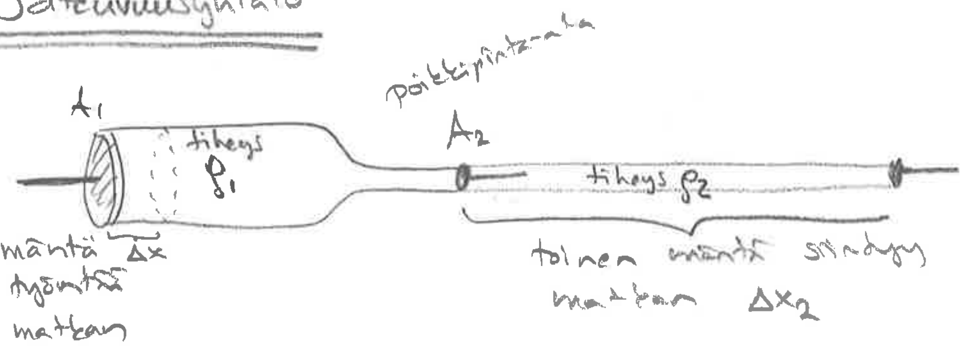
- Siipi + virtaviivat – laminaarinen / turbulentti virtaus (video)

- siirappivideo – laminaarinen virtaus (video)

Jatkuvuusyhtälö



$\boxed{\text{Aineen säilyminen:}}$

$$A_1 \cdot \Delta x_1 \cdot \rho_1 = A_2 \Delta x_2 \rho_2$$

Oletus: stationaarinen virtaus eli virtaus on jatkunut tasaisena jo pitkään eikä fluidia voi (ainakaan enää) kasaantua putken sisään.

Jos prosessi tapahtui ajassa Δt:

$$A_1 \Delta x_1 \rho_1 = A_2 \Delta x_2 \rho_2 \quad | : \Delta t$$

$$\Rightarrow \quad A_1 \rho_1 \underbrace{\frac{\Delta x_1}{\Delta t}}_{\substack{v_1 \\ \text{nopeus}}} = A_2 \rho_2 \underbrace{\frac{\Delta x_2}{\Delta t}}_{\substack{v_2 \\ \text{nopeus}}}$$

$$\Rightarrow \quad A_1 \rho_1 v_1 = A_2 \rho_2 v_2$$

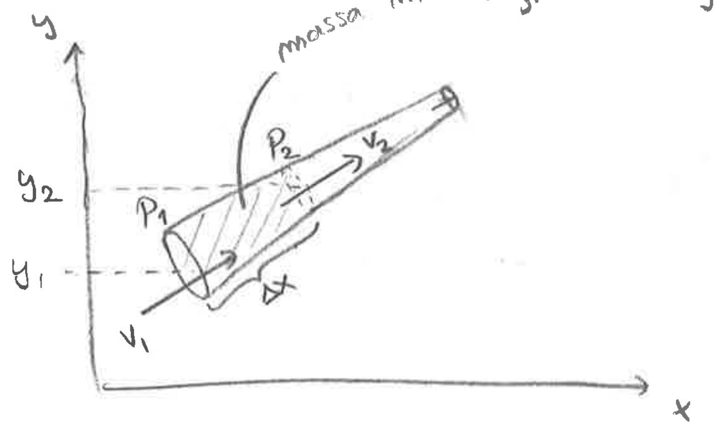
Pätee kaikille kohdille virtausta

$$\Rightarrow \quad \boxed{A \rho v = \text{vakio}}$$

(jos kokoonpuristumaton
$\Rightarrow \rho = \text{vakio}$
$\Rightarrow A \cdot v = \text{vakio}$, kuten esitettiin videolla)

Bernoullin yhtälö eli energian säilymislaki virtauksessa

massa $m = V \cdot \rho_1 = A \cdot \Delta x \cdot \rho_1$



Fluidi virtaa putkessa. Tarkastellaan neste-alkiota, massa m, joka etenee putkessa matkan Δx.

Alkiolla $\begin{cases} \text{liike-energiaa alussa} & \frac{1}{2}mv_1^2 \\ \text{potentiaalienergia} & mgy_1 \end{cases}$

Lopussa $\begin{cases} \text{liike-energiaa} & \frac{1}{2}mv_2^2 \\ \text{potentiaalienergia} & mgy_2 \end{cases}$

Paine kohdistaa alkioon voiman joka tekee siis työtä (demo!)

Voima vasemmalla: $F_1 = P_1 A$; joka tekee työn $W_1 = P_1 A \Delta x$
(positiivinen! kasvattaa alkion energiaa)

Voima oikealta: $F_2 = -P_2 A$, työ $W_2 = -P_2 A \Delta x$
(negatiivinen! Voima liikkeen suuntaa vastaan.)

$\Rightarrow$ Energian säilyminen:

$$\underbrace{E_1}_{\text{energia alussa}} + \underbrace{W}_{\text{tehdyt työt}} = \overbrace{E_2}^{\text{energia lopussa}}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}mv_1^2 + mgy_1 + P_1 A\Delta x - P_2 A \Delta x = \frac{1}{2}mv_2^2 + mgy_2$$

$$\Rightarrow \underbrace{\frac{1}{2}mv_1^2 + mgy_1 + P_1 A\Delta x}_{\text{vain paikkaan 1 liittyviä suureita}} = \underbrace{\frac{1}{2}mv_2^2 + mgy_2 + P_2 A\Delta x}_{\text{vain paikkaan 2 liittyviä suureita}}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{2}mv^2 + mgy + p A\Delta x = \text{vakio}$$

Jaetaan massalla m (joka oli sama paikoissa 1 ja 2 jatkuvuusyhtälön (aineen säilymisen) nojalla)

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{2}v^2 + gy + p\frac{A\Delta x}{m} = \text{vakio}.$$

Massa $m = A\Delta x \rho$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{2}v^2 + gy + p \cdot \frac{A\Delta x}{A\Delta x \rho} = \text{vakio}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\frac{1}{2}v^2 + gy + p \cdot \frac{1}{\rho} = \text{vakio}}$$

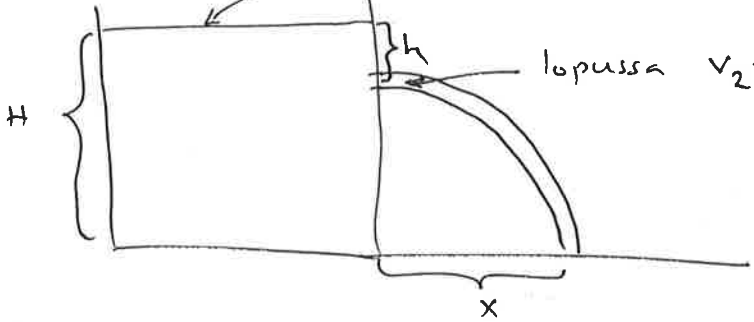
Bernoullin yhtälö

Jos kyseessä kokoonpuristumaton fluidi ($\rho = \text{vakio}$) voidaan vielä kertoa molemmat puolet tiheydellä

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{2}\rho v^2 + \rho g y + p = \text{vakio}; \quad \text{kun } \rho = \text{vakio}.$$

Reikä vesisäiliön seinässä (~~Torricellin koe~~)

alussa $v_1 = 0,\ P_1 = 1\,\text{bar},\ y_1 = H.$



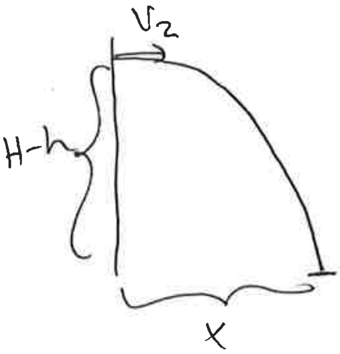
lopussa $v_2 = ?,\ \underbrace{P_2 = 1\,\text{bar} = P_1}_{\text{Paine ei muutu!}},\ y_2 = H - h.$

a) Bernoulli:

$$\frac{1}{2}v_2^2 + \cancel{\rho} g h_2 = \frac{1}{2}\overset{0}{v_1^2} + g h_1$$

$$\Rightarrow\quad v_2 = \sqrt{2g(\underset{H}{h_1} - \underset{H-h}{h_2})} = \underline{\underline{\sqrt{2gh}}}.$$

Suunta on vaakasuoraan. Kuinka kauas suihku kantaa?



Kiihtyvyys alaspäin g.

$\Rightarrow$ osuu lattiaan ajassa $\underline{\underline{\Delta t = \sqrt{\frac{2(H-h)}{g}}}}$

(vakiokiihtyvyydelle $y = \frac{1}{2}gt^2 \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2y}{g}}$)

Ajassa Δt vaakasuoraan kuljettu matka on

$$x = v_2 \cdot \Delta t = \underset{\sqrt{2gh}}{v_2} \cdot \sqrt{\frac{2(H-h)}{g}}$$

$$\Rightarrow\quad x = \sqrt{\frac{2\cancel{g}h \cdot 2(H-h)}{\cancel{g}}} = \underline{\underline{2\sqrt{Hh - h^2}}}.$$

b) Maksimi?

$$\frac{dx}{dh} = \cancel{2\cdot\frac{1}{2}}\,\frac{H-2h}{\sqrt{Hh-h^2}}$$

nollakohdat: $\underline{\underline{h = H/2}}.$

$$v_{max} = \sqrt{2g\,H/2} = \underline{\underline{\sqrt{gH}}}.$$

c) Kantama maksimissa:

$$x_{max} = 2\cdot\sqrt{H\cdot\frac{H}{2} - \left(\frac{H}{2}\right)^2} = 2\sqrt{\frac{H^2}{2} - \frac{H^2}{4}} = \underline{H}.$$